I часть

Производная

1. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$.

2. Выяснить, при каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x$ возрастает на всей числовой прямой.

Ряды

3. Разложить функцию в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0 = 0$ (по степеням x). Найти область сходимости полученного ряда к заданной функции.

$$1) y = \frac{x}{1-x^2},\ x_0 = 0. \quad 2) y = \sqrt[3]{8-3x},\ x_0 = 0.$$

4. Вычислить: 1) $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 0,0001; 2) $\sin 1°$ с точностью до 10^{-6}.

II часть

5. В какой точке эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ касательная к нему образует с осями координат треугольник наименьшей площади.

6. Траектория частицы, движущейся в плоскости, задается уравнением $y = kx - bx^2$. Найти скорость частицы при $x = 0$, если проекция ускорения на ось OY равна нулю: $a_y = 0$, а проекция ускорения на ось OX равна положительной константе $a_x = a$.

7. Необходимо поразить неподвижную цель, расположенную на расстоянии S и высоте H от орудия. Найти, с какой минимальной скоростью и под каким углом φ к горизонту нужно произвести выстрел, чтобы выполнить поставленную задачу.

III часть

8. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x+9x^2/2}}{x^3}$.

9. Высота цилиндрической банки равна радиусу основания. Банка обвязана шнурком, лежащим в плоскости осевого сечения цилиндра и проходящим через два малых углубления на окружности нижнего основания. Шнурок туго натянут. Можно ли снять шнурок с банки, не растягивая его и не разрывая?

10. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. При этом оно испытывает силу сопротивления, пропорциональную скорости. Сколько времени будет подниматься тело? Найти, на какую высоту оно поднимется. Получить из путем предельного перехода формулу $h = \frac{v_0^2}{2g}$ для случая, когда сопротивление воздуха мало.