## *I часть*

**Пределы.**

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-2)^3}{5n^2-21}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{n^3+n}}{\sqrt[3]{n^3-1}-2n}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})$;
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$;
5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{5x+5}-5}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{3x\cdot\sin x}$;
8. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{tg\pi x}{x+2}$.

**Дифференцирование.**

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=12\sqrt{x}+4x^3-\frac{3\sqrt{x^8}}{8}$; б) $y=\sin 6x\cdot\cos(1-x)$; в) $y=\sqrt{\cos 3x+4x^3}$;

г) $y=ctg^4\left(1+\sqrt{x}\right)$; д) $y=\frac{\arccos\left(x^2\right)}{6+\sqrt{x}}$; е) $y=arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

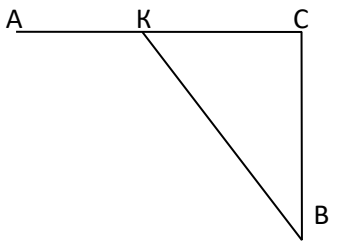
2. Найти производную функции, заданной параметрически: а) $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos 4t,\\ y=\sqrt{3+t}.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=2\sin 4t+\cos 6t,\\ y=2\sin^2 t.\end{cases}$

3. Под действием силы $F=10H$ тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути $S$ от времени $t$ дается уравнением $S=A-Bt+Ct^2$, где $C=1м/c^2$. Найти массу тела $m$.

4. В какой точке параболы $x^2=9y$ абсцисса возрастает вдвое быстрее, чем ордината?

## *II часть*

5. Пешеход, идя по тротуару, проходит 1.5 м в 1 сек., а по полю 0.9 м за 1 сек. Пешеход вышел из пункта А в пункт К по тротуару, а затем из пункта К в пункт В по полю. Расстояние АС=42м, ВС=36м. По какому пути АКВ должен идти пешеход, чтобы пройти его в кратчайшее время. Чему оно равно?




6. На горизонтальной плоскости находится большой неподвижный полностью заполненный водой сосуд. Через маленькой отверстие в его боковой стенке вытекает струя воды. На какой высоте должно быть отверстие, чтобы дальность полета струи была максимальной? Какова эта дальность? Высота сосуда *H*.

7. Наблюдатель находится напротив картины, закрепленной на вертикальной стене. Нижний край картины расположен выше уровня глаз наблюдателя на $a$, верхний край – на $b$. На каком расстоянии от стены должен стоять наблюдатель, чтобы угол, под которым он видит картину, оказался наибольшим?

8. Дана функция $S(x,y)=\sqrt{(x-10)^2+1}+\sqrt{(y-4)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}$. Найти наименьшее значение $S(x,y)$. При каких значениях $x$ и $y$ оно достигается?

9. Пчелиный улей находится в центре правильного треугольника со стороной 1. Одна сторона треугольника намазана мёдом, другая — вареньем, а третья посыпана сахаром. Пчела должна вылететь из улья, поесть мёда, варенья и сахара и вернуться домой. Найдите длину её кратчайшего пути.

***III часть***

10. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{e^x-x-1}$.  2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.  3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-1}{(5x)^x-1}$.

11. Найдите значения параметров $a$ и $b$, если известно, что

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{2x+3}\right)^x=e$;  2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(ax+1)+\sin bx}{\cos x+\cos 2x-2}=\dfrac{4}{5}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos bx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x\sin x)}{1-\sqrt{1+2x^2}}$.

12. Пусть $S$ - площадь круга, ограниченного окружностью $\Gamma$, $\sigma_n$ - площадь правильного $n$-угольника, вписанного в $\Gamma$, $S_n$ - площадь правильного $n$-угольника, описанного вокруг $\Gamma$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S-\sigma_n}{S_n-S}$.

13. Определить $\lambda$ и $\mu$ так, чтобы имело место равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0$.

14. Вычислить сотую производную функции: $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$.

15. Найти сумму $\dfrac{1}{2-x_1}+\dfrac{1}{2-x_2}+\dfrac{1}{2-x_3}$, если $x_1, x_2, x_3$ - корни многочлена $f(x)=x^3-3x-1$.