

Слободянюк А.И.
«Очень длинные физические задачи»

Часть 1.
Задачи 1 – 9.

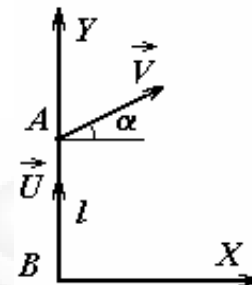
Содержание:

Задача 1. «Черепахи».....	3
Задача 2.	6
Задача 3. «Клюшка и шайба»	11
Задача 4. «Внутри конуса»	14
Задача 5. «Оборотный маятник»	24
Задача 6. «Упругая цепочка»	29
Задача 7. «Прямая и адиабата»	38
Задача 8. «Кристалл»	46
Задача 9. «Фазовые переходы».....	51

Задача 1. «Черепahi»

Когда одна черепаха догоняет другую, она движется так, что вектор ее скорости все время направлен на преследуемую черепаху. Во всех пунктах данной задачи размерами черепах можно пренебречь.

1. Черепаха А движется с постоянной скоростью v вдоль прямой составляющей угол α с осью x . Черепаха В, находящаяся в начале координат, решила догнать черепаху А, когда она пересекала ось Y на расстоянии l , и начала двигаться с постоянной по модулю скоростью u ($u > v$). Через какое время она догонит черепаху А?



2. Пусть скорость черепахи В $u = v$. Найдите расстояние между черепахами по прошествии достаточно большого промежутка времени.

3. n черепах находятся в вершинах правильного n -угольника со стороной l и начинают двигаться с постоянными по модулю скоростями u , так что вектор скорости первой все время направлен на вторую, второй на третью, ... n -ой на первую. Через какое время черепахи встретятся?

Рассмотрите отдельно случаи $n = 2$, $n = 4$ и дайте им простое объяснение. Как зависит время движения черепах до встречи от числа черепах при $n \rightarrow \infty$?

Решение.

1. Пусть в произвольный момент времени скорость черепахи В направлена под углом φ к оси X . В этот момент времени скорость сближения черепах (разность проекций скоростей на прямую, соединяющую их положения) определяется формулой

$$v_{сб.} = u - v \cos(\alpha - \varphi). \quad (1)$$

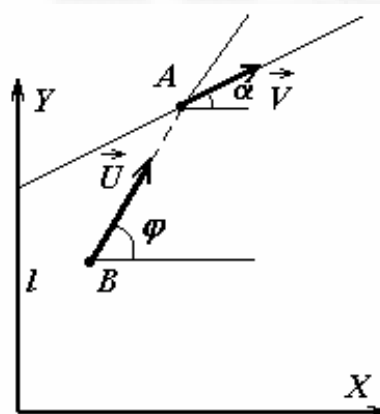
Разобьем время движения на небольшие временные интервалы Δt_i . В момент

встречи черепах должны выполняться соотношения:

$$l = \sum (u - v \cos(\alpha - \varphi_i)) \Delta t_i, \quad (2)$$

(смысл которого - расстояние между черепахами изменилось от l до нуля); кроме того, в момент встречи координаты черепах равны:

$$(v \cos \alpha) t = \sum (u \cos \varphi_i) \Delta t_i, \quad (3)$$



$$(v \sin \alpha)t + l = \sum (u \sin \varphi_i) \Delta t_i. \quad (4)$$

Нам не известен закон, по которому изменяется угол φ , поэтому мы не можем вычислить суммы, стоящие в этих выражениях, но мы можем их выразить из равенств (3)-(4)

$$\sum (\cos \varphi_i) \Delta t_i = \frac{v \cos \alpha}{u} t;$$

$$\sum (\sin \varphi_i) \Delta t_i = \frac{v \sin \alpha}{u} t + l \frac{v}{u};$$

и подставить в преобразованное уравнение (2):

$$\begin{aligned} l &= \sum (u - v \cos(\alpha - \varphi_i)) \Delta t_i = ut - v \sum (\cos \alpha \cos \varphi_i + \sin \alpha \sin \varphi_i) \Delta t_i = \\ &= ut - v \cos \alpha \sum (\cos \varphi_i) \Delta t_i - v \sin \alpha \sum (\sin \varphi_i) \Delta t_i = \\ &= ut - v \cos \alpha \left(\frac{v}{u} t \cos \alpha \right) - v \sin \alpha \left(\frac{v}{u} t \sin \alpha + \frac{l}{u} \right) = \\ &= ut - \frac{v^2}{u} t - \frac{v}{u} l \sin \alpha; \end{aligned}$$

из которого находим

$$\boxed{t = l \frac{u + v \sin \alpha}{u^2 - v^2}}. \quad (5)$$

Заметим, что это решение имеет смысл, только при $u > v$, иначе вторая черепаха попросту не догонит первую. При $\alpha = \pm \pi / 2$ формула (5) приводит к тривиальным частным случаям $t = \frac{l}{u \mp v}$.

2. Если скорости черепах одинаковы, то прошествии некоторого времени они станут двигаться по одной прямой на неизменном расстоянии h друг от друга. Мы можем воспользоваться теми же рассуждениями, что и в решении первого пункта, соответствующим образом видоизменив уравнения (2)-(4)

$$l - h = \sum (u - v \cos(\alpha - \varphi_i)) \Delta t_i, \quad (6)$$

$$(v \cos \alpha)t - \sum (u \cos \varphi_i) \Delta t_i = h \cos \alpha, \quad (7)$$

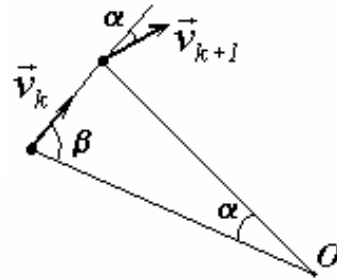
$$(v \sin \alpha)t + l - \sum (u \sin \varphi_i) \Delta t_i = h \sin \alpha. \quad (8)$$

Совместное решение этих уравнений по аналогичной п.1 методике приводит к результату

$$\boxed{h = l \frac{1 + \sin \alpha}{2}}, \quad (9)$$

частные случаи которого предлагаю рассмотреть самостоятельно.

3. Из соображений симметрии очевидно, что в любой момент времени черепахи будут находиться в вершинах правильного n -угольника, который постоянно поворачивается и сжимается. Однако в процессе движения углы между векторами скоростей черепах изменяться не будут. Легко найти угол между скоростями «соседних» черепах - он равен центральному углу α правильного n -угольника, причем $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Поэтому скорость сближения соседних черепах находится по формуле



$v_{сб.} = v(1 - \cos \frac{2\pi}{n}) = 2v \sin^2 \frac{\pi}{n}$. Тогда время движения черепах до встречи вычисляется по формуле

$$t = \frac{l}{v_{сб.}} = \frac{l}{2v \sin^2 \frac{\pi}{n}} \quad (10).$$

В случае $n = 2$, когда две черепахи ползут навстречу друг другу из (10) следует очевидный результат $t = \frac{l}{2v}$.

При $n = 4$, из формулы (10) следует, что $t = \frac{l}{v}$. В этом случае черепахи находятся в вершинах квадрата, их скорости взаимно перпендикулярны, поэтому скорость сближения равна скорости черепах, следовательно время сближения должно равняться $\frac{l}{v}$. При $n \rightarrow \infty$ угол α становится малым, а его синус стремится к самому углу, поэтому формула (10) дает в упрощенное выражение $t = \frac{l}{2\pi^2 v} n^2$, которое также легко интерпретируется - время достижения согласия в группе из n человек пропорционально n^2 .

Другой способ решения последней задачи заключается в определении скорости приближения черепах к центру многоугольника и начального расстояния до центра.

Заметим, что траектории черепах представляют собой спирали с бесконечным числом витков, длина которых, тем не менее, конечна.

Комментарии к задаче. Эта задача, конечно является нетипичной для кинематики, для ее решения требуются использовать не совсем тривиальный метод. Фактически этот метод основан на четком понимании физического смысла возможных проекций вектора скорости (скорость сближения, скорость приближения к центру и т.д.) При решении некоторых кинематических задач необходимо разложить «движение на составляющие». Так, например, в последнем пункте движение каждой черепахи можно представить как приближение к центру и вращение вокруг него. Иногда движение твердого тела удобно рассматривать как сумму поступательного движения и вращения, или как вращение вокруг мгновенной оси.

Задача 2.

Через два блока, подвешенных на одной высоте, переброшена длинная нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза. К середине нити прикрепляют еще один такой же груз (рис.1) и отпускаю его без начальной скорости. Расстояние между осями блоков равно l . Тернием и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

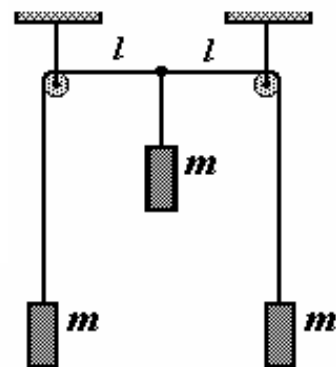


Рис.1

1. Определите максимальное смещение центрального груза в процессе движения.
2. В каком положении грузы могут находиться в состоянии равновесия?
3. Чему равны скорость и ускорение центрального груза, когда он проходит положение равновесия?
4. Грузы находятся в положении равновесия. Затем центральный груз смещают вниз на малое расстояние от этого положения. Определите период малых колебаний системы.

Воспользуйтесь приближенной формулой справедливой при малых значениях x и любых показателях степени α

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$$

Решение.

1. Обозначим смещение центрального груза x_0 , а смещения боковых грузов x_1 (рис.2). Эти величины связаны соотношением

$$x_1 = \sqrt{l^2 + x_0^2} - l. \quad (1)$$

Вычисляя производные по времени от обеих частей равенства (1), получим связь между скоростями грузов

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dx_0} \cdot \frac{dx_0}{dt} = \frac{x_0}{\sqrt{l^2 + x_0^2}} v_0, \quad (2)$$

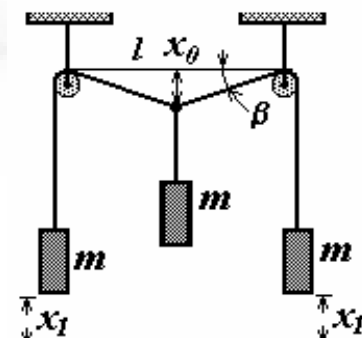


Рис.2

где v_0, v_1 - скорости центрального и боковых грузов, соответственно. При выводе формулы (2) использовано правило вычисления производной от

сложной функции. Понятно, что производная от координаты по времени является, скоростью.

Запишем теперь выражение для изменения потенциальной энергии системы

$$\Delta U = -mgx_0 + 2mgx_l = -mgx_0 + 2mg(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l). \quad (3)$$

Выражение для кинетической энергии системы имеет вид

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} + 2\frac{mv_l^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \left(1 + 2\frac{x_0^2}{l^2 + x_0^2} \right) = \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2}. \quad (4)$$

Используя закон сохранения механической энергии, можно записать уравнение

$$\frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2} = mgx_0 - 2mg(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l). \quad (5)$$

При максимальном смещении скорость груза обращается в нуль, поэтому уравнение для определения максимального смещения имеет вид

$$mgx_0 - 2mg(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l) = 0. \quad (6)$$

Решая это уравнение, получим максимальное смещение груза

$$x_{0,max} = \frac{4}{3}l. \quad (7)$$

Отметим, что максимальное смещение груза можно было найти непосредственно из уравнения (3), полагая $\Delta U = 0$. Тем не менее, мы записали уравнение закона сохранения энергии (5), так как, во-первых, оно показывает, что скорости всех грузов одновременно обращаются в нуль, во-вторых это уравнение понадобится в дальнейшем.

2. Положение равновесия любой механической системы соответствует минимуму потенциальной энергии. Вычислим производную от функции (3) и приравняем ее нулю

$$\frac{dU}{dx_0} = -mg + 2mg \frac{x_0}{\sqrt{l^2 + x_0^2}} = 0. \quad (8)$$

Решение этого уравнения находится элементарно

$$\bar{x}_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad (9)$$

где мы обозначили $\bar{x}_0$ - положение равновесия грузов.

Полученные результат почти очевиден - при этом значении все три нити образуют между собой равные углы, натяжения нитей равны mg , поэтому система находится в равновесии.

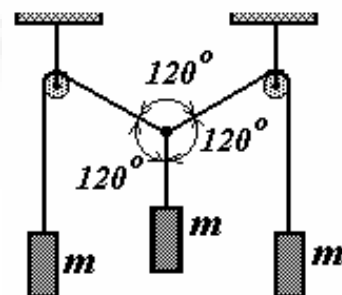


Рис.3

3. Скорость центрального груза выразим из уравнения (5)

$$v_0 = \sqrt{2g\left(x_0 - 2\sqrt{x_0^2 + l^2} + 2l\right) \frac{x_0^2 + l^2}{3x_0^2 + l^2}}. \quad (10)$$

Подстановка равновесного значения (9) приводит к следующему результату

$$\bar{v}_0 = \sqrt{\frac{4}{3}gl(2 - \sqrt{3})}. \quad (11)$$

Ускорение груза можно вычислить как производную от функции (10), но для незначительного упрощения алгебраических выкладок, мы вычислим производные от обеих частей уравнения (5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(mgx_0 - 2mg\left(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l\right)\right). \quad (12)$$

В точке равновесия правая часть этого уравнения обращается в нуль (именно из этого условия мы находили положение равновесия). Аккуратно вычислим производную левой части и приравняем ее к нулю

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2}\right) &= \frac{2mv_0a_0}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2} + \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{6x_0(l^2 + x_0^2) - 2x_0(l^2 + 3x_0^2)}{(l^2 + x_0^2)^2} = \\ &= mv_0a_0 \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2} + \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{4x_0l^2}{(l^2 + x_0^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Подставляя равновесное значение (9) и найденное значение скорости (11), находим значение ускорения

$$\bar{a}_0 = -g \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}. \quad (13)$$

4. Для вычисления периода малых колебаний воспользуемся традиционной методикой, основанной на законе сохранения энергии. Если некоторая величина x является малым смещением из положения равновесия, то закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E, \quad (14)$$

где $v = \frac{dx}{dt}$ - скорость изменения величины x , E - полная энергия системы,

$\frac{kx^2}{2}$ - приближенное выражение для потенциальной энергии (в самом общем случае, если x является малым смещением от положения равновесия, потенциальную энергию можно представить в таком виде). Если получено уравнение типа (14), то его решением будут гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (15)$$

и амплитудой, которая определяется энергией системы.

Таким образом нам необходимо представить уравнение закона сохранения энергии (5) в виде (14). Для этого координату центрального груза представим в виде

$$x_0 = \bar{x}_0 + \delta, \quad (16)$$

где $\bar{x}_0$ - положение равновесия, определяемое формулой (9), δ - смещение от этого положения, которое мы будем полагать малым. Теперь нам необходимо выразить кинетическую и потенциальную энергию системы через величину δ , а затем провести разложение этих функций по малому параметру δ до второго порядка. То есть пренебречь слагаемыми, которые имеют порядок δ^3 и выше.

В выражение для кинетической энергии входит квадрат скорости (которая сама является величиной второго порядка малости), поэтому вместо переменной величины x_0 следует сразу подставить ее равновесное значение $\bar{x}_0$

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2} \approx \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3\bar{x}_0^2}{l^2 + \bar{x}_0^2} = \frac{3}{2}m \cdot \frac{v_0^2}{2}. \quad (17)$$

Преобразование выражения для потенциальной энергии несколько сложнее и требует определенных навыков, поэтому проведем эти преобразования достаточно подробно с некоторыми комментариями. Исходное выражение имеет вид (в котором мы опускаем постоянное слагаемое, не влияющее на поведение системы)

$$U = -mgx_0 + 2mg\sqrt{l^2 + x_0^2} = mg(-x_0 + 2\sqrt{l^2 + x_0^2}).$$

Далее подставим выражение (16) и преобразуем выражение, стоящее в скобках

$-x_0 + 2\sqrt{l^2 + x_0^2} = -(\bar{x}_0 + \delta) + 2\sqrt{l^2 + (\bar{x}_0 + \delta)^2}$	раскрываем скобки;
$-(\bar{x}_0 + \delta) + 2\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2} + 2\bar{x}_0\delta + \delta^2$	оставляем квадратичные слагаемые;
$-\delta + 2\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2\bar{x}_0\delta + \delta^2}{l^2 + \bar{x}_0^2}}$	опускаем постоянное слагаемое, под корнем выделяем малое слагаемое;
$-\delta + 2\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2\bar{x}_0\delta + \delta^2}{l^2 + \bar{x}_0^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{2\bar{x}_0\delta + \delta^2}{l^2 + \bar{x}_0^2}\right)^2\right)$	в последнем члене пренебрегаем слагаемым δ^2 , перегруппировываем, очередной раз опускаем постоянный член;
$-\delta + \frac{2\bar{x}_0^2}{\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2}}\delta + \delta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2}} - \frac{1}{8} \sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2} \left(\frac{2\bar{x}_0^2}{l^2 + \bar{x}_0^2} \right)^2 \right)$	подставляем значение для $\bar{x}_0$ приводим подобные члены, убеждаемся в исчезновении линейного по δ слагаемого;

$$\frac{3\sqrt{3}}{8l}\delta^2$$

получаем окончательный результат.

Итак, приближенное выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = \frac{3\sqrt{3}}{4l}mg\frac{\delta^2}{2}, \quad (18)$$

а уравнение закона сохранения энергии преобразовывается к виду

$$\frac{3}{2}m\frac{v^2}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4l}mg\frac{\delta^2}{2} = E. \quad (19)$$

Используя формулу (15), получаем требуемый результат

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{\sqrt{3}g}}. \quad (20)$$

Комментарии к задаче. Самое поразительное в полученном результате, то что в точке равновесия ускорение отлично от нуля! Это значит, что скорость центрального груза в этой точке не достигает максимального значения (как это обычно бывает). Дело в том, что в нашем случае движутся три груза, причем связь между скоростями включает зависит от координат тел. Конечно, в точке равновесия (при минимальной потенциальной энергии) суммарная кинетическая энергия системы максимальна, однако из этого не следует, что скорость центрального тела максимальна именно в этой точке.

На рис.4 представлены графики зависимостей скоростей тел v_0, v_1 и потенциальной энергии U от угла β , который образует нить с горизонтом (см.рис.2). Видно, что скорость центрального тела достигает максимума выше положения равновесия, а скорости боковых грузов максимальны ниже этой точки.

Формально уравнения закона сохранения энергии (5) можно представить как уравнение движения тела с переменной эффективной массой

$$m^* = m \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2}, \quad \text{которая}$$

изменяется от m (при $x_0 = 0$)

движется только центральный груз, скорость боковых равна нулю при любой скорости центрального) до $3m$ (при $x_0 \gg l$ когда скорости всех грузов становятся равными).

Рекомендую более внимательно разобраться с процессами, проходящими в рассматриваемой системе, для чего предлагаю решить эту задачу на основании уравнений второго закона Ньютона.

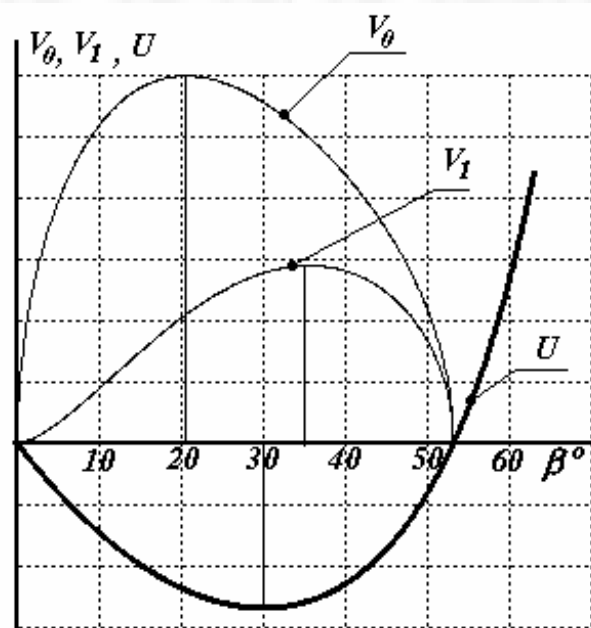
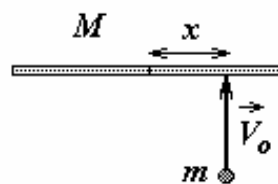


Рис.4

Задача 3. «Клюшка и шайба»

На гладком горизонтальном льду лежит однородный стержень длины l и массы M . На стержень налетает со скоростью $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно стержню, небольшая шайба массы m . Точка удара находится на расстоянии x от центра стержня. Удар абсолютно упругий.



1. Найдите: скорость шайбы v_l , скорость центра стержня u , угловую скорость вращения стержня ω после первого удара. Ответы выразите через параметры $\mu = M/m$ и $\xi = x/l$.
2. При каком соотношении между параметрами μ и ξ шайба столкнется со стержнем только один раз? Изобразите схематически эту область параметров на диаграмме (μ, ξ) .
3. При каком соотношении между параметрами μ и ξ после второго удара шайба будет двигаться с прежней скоростью $\vec{v}_0$?
4. Пусть $\xi = 0,333$, $\mu = 0,330$. На какой угол изменится направление вектора скорости шайбы после всех ее столкновений со стержнем?

Решение.

1. Для решения задачи следует воспользоваться законами сохранения:
- импульса

$$mv_0 = mv_l + Mu; \quad (1)$$

- момента импульса (относительно вертикальной оси, проходящей через центр стержня)

$$mv_0 x = mv_l x + I\omega; \quad (2)$$

- энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_l^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}; \quad (3)$$

где $I = \frac{Ml^2}{12}$ - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр.

Итак, мы имеем три уравнения с тремя неизвестными величинами - v_l, u, ω ; причем одно из этих уравнений является квадратным, поэтому данная система имеет два решения. Однако одно из этих решений нам известно - это скорости до столкновения. Можно, и нужно использовать это

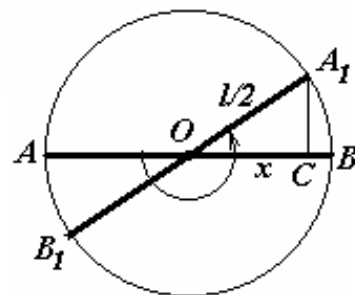
обстоятельство, для того, чтобы решить систему наиболее простым способом. Продемонстрируем подробно эти выкладки.

$u = \frac{m}{M}(v_0 - v_1)$ $\omega = \frac{mx}{I}(v_0 - v_1)$	Выражаем из уравнений (1) и (2);
$m(v_0^2 - v_1^2) = Mu^2 + I\omega^2$	переписываем уравнение (3) в виде;
$m(v_0^2 - v_1^2) = M\left(\frac{m}{M}(v_0 - v_1)\right)^2 +$ $+ I\left(\frac{mx}{I}(v_0 - v_1)\right)^2$	подставляем выражения для скоростей
$\mu(v_0 + v_1) = 12\xi^2(v_0 - v_1) +$ $+ (v_0 - v_1)$	теперь можно безболезненно сократить на $(v_0 - v_1)$, так как при этом мы потеряем корень, который нас не интересует; кроме того, сразу можно ввести требуемые безразмерные параметры $\mu = \frac{M}{m} \text{ и } \xi = \frac{x}{l};$
$v_1 = v_0 \frac{12\xi^2 + 1 - \mu}{12\xi^2 + 1 + \mu};$ $u = v_0 \frac{2}{12\xi^2 + 1 + \mu}; \quad (4)$ $\omega l = v_0 \frac{24\xi}{12\xi^2 + 1 + \mu}.$	выражаем значение скорости шайбы после удара и, с помощью первой строки данной таблицы, скорость центра стержня и угловую скорость его вращения.

Формулы (4) дает ответ на первый вопрос задачи.

2. Рассмотрим движение шайбы и стержня после первого удара. Этот анализ удобно проводить в системе отсчета, связанной с центром стержня O . В этой системе стержень вращается с найденной угловой скоростью ω и «заметает» круг радиусом $l/2$. Второй удар может произойти только в пределах этого круга. Допустим, что скорость шайбы больше, чем скорость центра стержня $v_1 - u > 0$. Из формул (4) следует, что это условие будет выполняться, если справедливо неравенство

$$\mu < 12\xi^2 - 1. \quad (5)$$



Чтобы избежать второго удара, шайба должна успеть «выскочить» за пределы этого круга (то есть пройти отрезок CA_1) прежде, чем ее настигнет конец стержня A . Для того, чтобы пройти отрезок CA_1 шайбе потребуется

время $t_1 = \frac{\sqrt{(l/2)^2 - x^2}}{v_1 - u}$, а стержень повернется на угол

$\angle AOA_1 = \pi + \arccos(\frac{x}{l/2})$, за время $t_2 = \frac{\pi + \arccos(\frac{2x}{l})}{\omega}$. Понятно, что

второго столкновения не произойдет, если $t_2 > t_1$. Используя выражения (4), после элементарных и очевидных преобразований можно получить требуемое условие

$$\mu < 12\xi^2 - 1 - \frac{12\xi\sqrt{1-4\xi^2}}{\pi - \arccos 2\xi}. \quad (6)$$

Заметьте, что при выполнении неравенства (6), автоматически выполняется и неравенство (5).

Аналогично рассмотрим случай, когда $v_1 - u < 0$, что будет выполняться при

$$\mu > 12\xi^2 - 1. \quad (7)$$

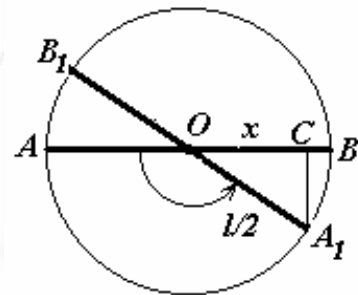
Сохраняя прежние обозначения и рассуждения, в этом случае запишем:

- время движения шайбы за пределы «опасного» круга остается прежним

$$t_1 = \frac{\sqrt{(l/2)^2 - x^2}}{u - v_1};$$

- время поворота стержня до точки A_1

$$t_2 = \frac{\pi - \arccos(\frac{2x}{l})}{\omega}.$$



Столкновения не произойдет, если $t_2 > t_1$. С помощью формул (4), находим условие отсутствия столкновения в этом случае

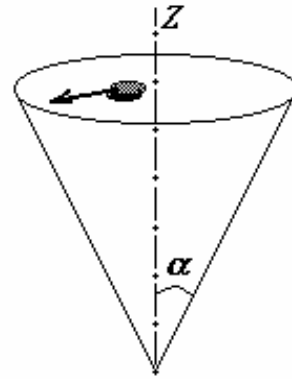
$$\mu > 12\xi^2 - 1 + \frac{12\xi\sqrt{1-4\xi^2}}{\pi - \arccos 2\xi}. \quad (8)$$

И в этом случае выполнение неравенства (8) влечет выполнение неравенства (7). Таким образом, объединение неравенств (6) и (8) дает ответ на второй вопрос задачи.

Функции, фигурирующие в этих неравенствах достаточно сложны для того, чтобы точно построить требуемые области на диаграмме (μ, ξ) . Однако построить их схематически вполне по силам.

Задача 4. «Внутри конуса»

Исследуется движение без трения небольшой шайбы (которую можно считать материальной точкой) по внутренней поверхности конуса, ось которого Z вертикальна, а тангенс угла полураствора α равен k .



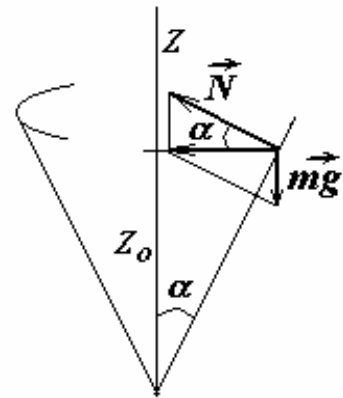
1. Какова должна быть скорость шайбы V_0 , чтобы она могла двигаться по поверхности конуса в горизонтальной плоскости на высоте z_0 от вершины конуса?
2. Шайбе, находящейся на высоте z_0 от вершины конуса, сообщили скорость V в горизонтальном направлении вдоль поверхности конуса. Найдите пределы изменения координаты z шайбы в процессе ее движения.
3. Шайба движется в горизонтальной плоскости на высоте z_0 от вершины конуса. Затем в результате толчка ее скорость увеличивается на небольшую величину v (направление вектора скорости при этом не изменяется). Найдите в каких пределах будет изменяться координата z шайбы в процессе движения и период ее колебаний вдоль вертикальной оси.
4. Шайба движется в горизонтальной плоскости на высоте z_0 от вершины конуса. Затем ей толчком сообщают небольшое приращение скорости v , направленное вверх вдоль образующей конуса ($v \ll \sqrt{gz_0}$). Найдите в каких пределах будет изменяться координата z шайбы в процессе движения и период ее колебаний вдоль вертикальной оси.

Рекомендуем воспользоваться приближенной формулой

$$(1+x)^{-2} \approx 1 - 2x + 3x^2$$

Решение.

1. В процессе движения на шайбу действуют две силы: $m\vec{g}$ - сила тяжести, направленная вертикально вниз; $\vec{N}$ - сила реакции, направленная перпендикулярно поверхности конуса. Для того, что бы шайба двигалась на постоянной высоте z_0 , необходимо, чтобы сумма этих сил была направлена горизонтально к оси конуса и обеспечивала шайбе центростремительное ускорение $\frac{V_0^2}{r}$, где



$r = z_0 \tan \alpha$ - радиус окружности, по которой движется шайба. На основании второго закона Ньютона и, глядя на рисунок, можно записать уравнение

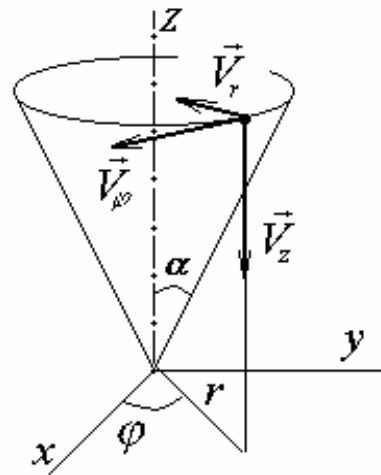
$$\frac{mV_0^2}{z_0 \tan \alpha} = \frac{mg}{\tan \alpha}, \quad (1)$$

из которого следует, что искомая скорость шайбы должна быть

$$\boxed{V_0 = \sqrt{gz_0}}. \quad (2)$$

2. Для изучения характера движения шайбы при произвольном значении начальной скорости воспользуемся законами сохранения механической энергии (она сохраняется, так как отсутствуют силы трения) и момента импульса, который сохраняется в следствие очевидной осевой симметрии задачи.

Положение шайбы удобно в данном случае задавать с помощью следующих координат: z - высота от вершины конуса, r - расстояние до оси конуса, φ - угол поворота. Соответствующие этим координатам компоненты скорости шайбы V_z, V_r, V_φ показаны на рисунке.



Уравнение закона сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{m(V_z^2 + V_r^2 + V_\varphi^2)}{2} + mgz = \frac{mV^2}{2} + mgz_0. \quad (3)$$

Так как $r = z \tan \alpha = kz$, то и $V_r = kV_z$, поэтому уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{(1+k^2)V_z^2}{2} + \frac{V_\phi^2}{2} + gz = \frac{V^2}{2} + gz_0. \quad (4)$$

Закон сохранения момента импульса относительно оси конуса дает уравнение

$$mrV_\phi = mr_0V. \quad (5)$$

в котором учтено, что начальная скорость шайбы $\vec{V}$ направлена горизонтально. Принимая во внимание прямопропорциональную связь между координатами r и z , из уравнения (5) можно выразить

$$V_\phi = \frac{z_0V}{z}. \quad (6)$$

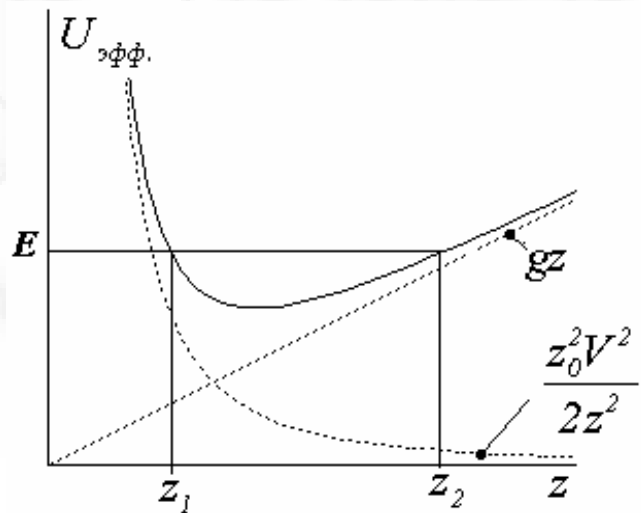
Подставляя это выражение в уравнение (4), получим

$$\frac{(1+k^2)V_z^2}{2} + \frac{z_0^2V^2}{2z^2} + gz = \frac{V^2}{2} + gz_0. \quad (7)$$

По своему виду это уравнение соответствует уравнению закона сохранения механической энергии при движении материальной точки вдоль одной оси z , если считать, что потенциальная энергия точки зависит от координаты z по закону

$$U_{\text{эфф.}}(z) = \frac{z_0^2V^2}{2z^2} + gz. \quad (8)$$

Особо подчеркнем, что указанное соответствие носит чисто формальный, математический характер, так как физический смысл первого слагаемого в последнем выражении - часть кинетической энергии. Однако, благодаря закону сохранения момента импульса его удалось представить в виде функции от координаты z . Поэтому функцию (8) часто называют «эффективной» потенциальной энергией. Теперь можно проанализировать характер движения вдоль этой оси, построив график зависимости $U_{\text{эфф.}}(z)$. На рисунке пунктирные кривые соответствуют



отдельным слагаемым формулы (8), сплошная линия - их сумма. Если полная энергия точки равна E , то точки возврата являются абсциссами z_1, z_2 точек пересечения горизонтальной прямой $U_{\text{эфф.}} = E$ с графиком функции $U_{\text{эфф.}}(z)$. Отметим, однако, что вид потенциальной кривой зависит от начальных условий, что еще раз подтверждает, что в данном случае потенциальная энергия является «эффективной».

Для того, чтобы найти пределы изменения координаты z шайбы, необходимо в уравнении (7) положить $V_z = 0$, так как именно в крайних точках (точках возврата) соответствующая скорость принимает нулевые значения. Таким образом, получаем

$$\frac{z_0^2 V^2}{2z^2} + gz = \frac{V^2}{2} + gz_0 \quad (9)$$

Обратите внимание, относительно неизвестной величины z полученное уравнение является уравнением третьей степени. Однако, оно может быть решено элементарными методами, так как один из корней уравнения известен - он соответствует начальным условиям $z_1 = z_0$. Это обстоятельство позволяет понизить степень уравнения посредством следующих преобразований:

$$\frac{V^2}{2} \left(\frac{z_0^2}{z^2} - 1 \right) = g(z_0 - z) \Rightarrow \frac{V^2}{2} \cdot \frac{z_0^2 - z^2}{z^2} = g(z_0 - z);$$

и после сокращения и приведения к общему знаменателю, получить квадратное уравнение

$$z^2 - \frac{V^2}{2g} \cdot z - \frac{V^2}{2g} \cdot z_0 = 0.$$

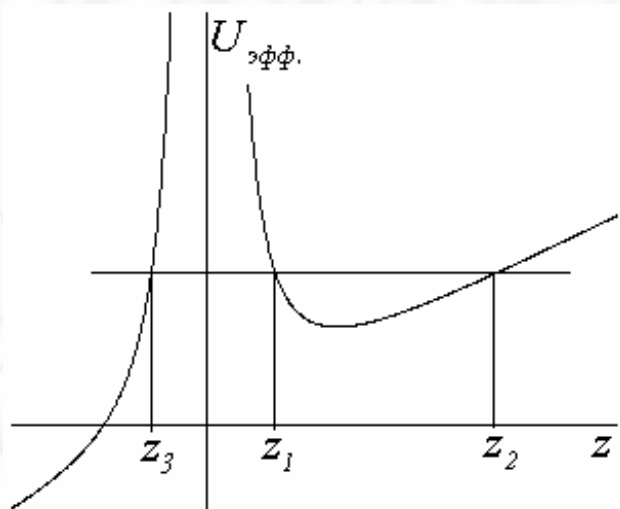
Корни этого уравнения

$$z_{2,3} = \frac{V^2}{4g} \left(1 \pm \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{V^2}} \right). \quad (10)$$

Отрицательный корень физического смысла не имеет - шайба не может «проскочить» через точку $z = 0$ - вершину конуса. Этот корень появился из-за того, что формально, функция (8) определена и при $z < 0$ (см. рисунок). Поэтому мы это корень отбросим.

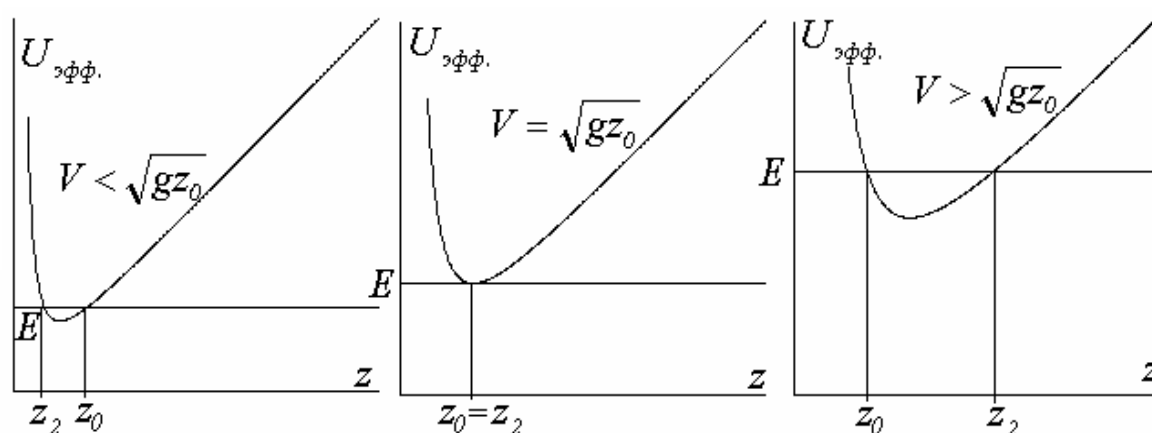
Итак, координата z в процессе движения шайбы будет изменяться в пределах

$$z \in \left[z_0, \frac{V^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{V^2}} \right) \right]. \quad (11)$$



Отметим, что при $V = V_0 = \sqrt{gz_0}$, второй предел изменения вертикальной координаты равен z_0 , то есть эта координата не будет изменяться в ходе движения - иными словами, шайба будет двигаться по окружности в горизонтальной плоскости. Этот результат был получен нами в первой части задачи. При $V < V_0$ шайба первоначально начнет опускаться ($z_2 < z_0$), при $V > V_0$ шайба будет подниматься по поверхности конуса. Эти частные случаи можно проиллюстрировать с помощью потенциальной кривой.

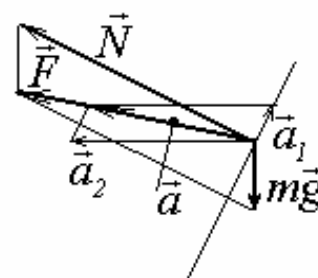
Обратите внимание на изменение вида графика функции эффективной потенциальной энергии.



На всех рисунках отрезком горизонтальной прямой отмечен уровень полной механической энергии шайбы $E = \frac{V^2}{2} + gz$.

Попытаемся прояснить еще один своеобразный парадокс. Как мы установили, в процессе движения шайба будет совершать колебания в вертикальном направлении, изменяя свою координату z в установленных пределах (естественно, что в то же время шайба будет также постоянно вращаться вокруг вертикальной оси конуса). При этом на определенных интервалах она будет подниматься. Какая же сила будет сообщать шайбе ускорение направленное вверх вдоль внутренней поверхности конуса? Действительно, на шайбу действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила реакции $\vec{N}$, направленная перпендикулярно поверхности конуса. Их сумма $\vec{F}$ не может иметь составляющую вдоль поверхности конуса, направленную вверх!

Вспомним, что по 2 закону Ньютона, вектор результирующей силы совпадает с направлением полного ускорения, которое в данном случае является суммой центростремительного ускорения $\vec{a}_2$ и ускорения $\vec{a}_1$, изменяющего величину проекции скорости на боковую поверхность конуса. Это суммарное ускорение $\vec{a}$ вполне может быть направлено также как и суммарная сила. Иными словами, ускорение $\vec{a}_1$, «компенсируется» соответствующей компонентой центростремительного ускорения $\vec{a}_2$ (см. рисунок), так, что никакого парадокса и противоречия со вторым законом Ньютона нет.



3. Если шайба движется в горизонтальной плоскости, то ее скорость определяется формулой (2) $V_0 = \sqrt{gz_0}$. После того, как шайбе сообщили дополнительное приращение скорости v , ее энергия и момент импульса изменились. Однако, уравнения законов сохранения энергии и момента импульса (4)-(5) полностью сохраняют свой вид, если подставить новое значение скорости $V = V_0 + v$. Поэтому пределы изменения координаты z можно рассчитать по формуле (11).

$$z_1 = z_0; \quad z_2 = \frac{(V_0 + v)^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{(V_0 + v)^2}} \right) \quad (12)$$

Упростим ответ, учтя, что $v \ll V_0$.

Эти преобразования рассмотрим, достаточно подробно, с некоторыми комментариями.

$\frac{(V_0 + v)^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{(V_0 + v)^2}} \right)$	исходное выражение, заметьте, что второе слагаемое под корнем не является малым
$\frac{V_0^2 (1 + v/V_0)^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{V_0^2 (1 + v/V_0)^2}} \right)$	выделяем в явном виде малый безразмерный параметр v/V_0
$\frac{z_0}{4} (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 + \sqrt{1 + 8(1 - 2 \frac{v}{V_0})} \right)$	подставляем значение V_0^2 и используем формулу $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$
$\frac{z_0}{4} (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 + \sqrt{9 - 16 \frac{v}{V_0}} \right)$	раскрываем скобки
$\frac{z_0}{4} (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 + 3 \sqrt{1 - \frac{16}{9} \frac{v}{V_0}} \right)$	
$\frac{z_0}{4} (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 + 3(1 - \frac{8}{9} \frac{v}{V_0}) \right)$	еще раз используем формулу $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$
$z_0 (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{v}{V_0} \right)$	преобразуем дроби
$z_0 (1 + \frac{4}{3} \frac{v}{V_0})$	раскрываем скобки, пренебрегая малым членом $(\frac{v}{V_0})^2$

Эти достаточно громоздкие преобразования можно существенно упростить, используя формулу разложения Тэйлора (если Вы, конечно, знакомы с ним):

$$z = F(V_0 + v) \approx F(V_0) + F'(V_0) \cdot v.$$

Вычисление производной $F'(V_0)$, в данном случае также не очень простая операция, но все же она короче, чем представленное выше разложение. Можете убедиться самостоятельно, что результат будет тем же.

Таким образом, вертикальная координата изменяется в пределах от z_0 до $z_0 (1 + \frac{4}{3} \frac{v}{V_0}) = z_0 (1 + \frac{4}{3} \frac{v}{\sqrt{gz_0}})$. При малом v пределы изменения координаты малы, поэтому и колебания вдоль вертикальной оси можно

считать малыми и для определения их периода можно воспользоваться стандартной методикой, основанной на анализе закона сохранения энергии.

Если при движении с одной степенью свободы, описываемой некоторой координатой ξ , закон сохранения энергии может быть записан в виде

$$\frac{\mu v_{\xi}^2}{2} + \frac{\kappa \xi^2}{2} = \text{const}, \quad (13)$$

где μ, κ - некоторые постоянные величины, v_{ξ} - скорость изменения координаты ξ , то движение частицы представляют собой гармонические колебания с круговой частотой $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ и периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\kappa}}$. Отметим, что случае, соответствующем уравнению (13), величина ξ есть отклонение от положения равновесия. Если в законе сохранения энергии появляется слагаемое линейно зависящее от координаты

$$\frac{\mu v_{\xi}^2}{2} + \frac{\kappa \xi^2}{2} + \beta \xi = \text{const},$$

то этот член не изменяет период колебаний, а приводит к смещению положения равновесия - в этом случае координата ξ отсчитывается не от положения равновесия, а от некоторой иной точки.

Преобразуем выражение для эффективной потенциальной энергии (8), полагая $z = z_0 + \xi$, где $\xi \ll z_0$.

$U_{\text{эфф.}}(z) = \frac{z_0^2 V^2}{2z^2} + gz$	исходное выражение
$\frac{z_0^2 (V_0 + v)^2}{2(z_0 + \xi)^2} + g(z_0 + \xi)$	подставляем выражения, включающие малые величины
$\frac{z_0^2 V_0^2 (1 + v/V_0)^2}{2z_0^2 (1 + \xi/z_0)^2} + gz_0 + g\xi$	выделяем в явном виде безразмерные малые параметры
$\frac{V_0^2}{2} (1 + \frac{v}{V_0})^2 (1 - 2(\frac{\xi}{z_0}) + 3(\frac{\xi}{z_0})^2) + gz_0 + g\xi$	используем приближенную формулу, приведенную в условии задачи; обратите внимание - разлагаем до второго порядка малости!
$A + B\xi + \frac{3V_0^2}{2z_0^2} (1 + \frac{v}{V_0})^2 \xi^2$	Раскрываем скобки, приводим подобные члены, не существенные для определения периода колебания константы A, B в явном виде не выписываем.

$A + B\xi + \frac{3gz_0}{2z_0^2}\xi^2$	Подставляем значение V_0^2, пренебрегаем малым слагаемым v/V_0 - это необходимо сделать, так в разложении мы оставляем члены не выше второго порядка малости. Заметьте, если изначально пренебречь этим членом, то коэффициент B обратится в нуль, что с физической точки зрения не верно.
--	--

Тот же результат можно получить более формальным способом, используя третий член в разложении Тэйлора

$$U(z_0 + \xi) \approx U(z_0) + U'(z_0) \cdot \xi + \frac{1}{2}U''(z_0) \cdot \xi^2.$$

То есть, коэффициент K в уравнении (13) равен второй производной от потенциальной энергии, взятой в точке равновесия.

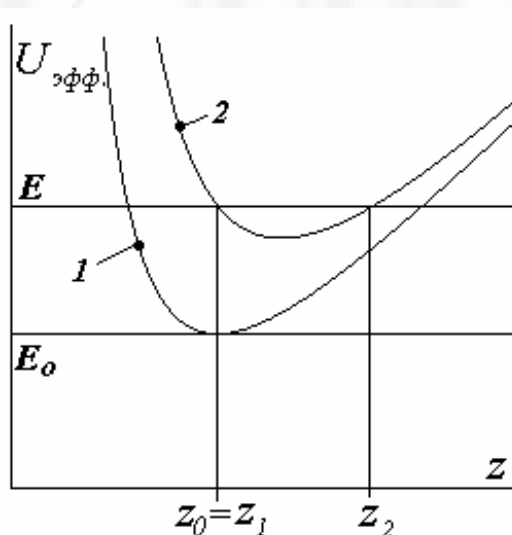
Подставим полученное выражение в закон сохранения энергии (7) и получим, с учетом $V_\xi = V_z$:

$$\frac{(1+k^2)V_\xi^2}{2} + \frac{3g}{2z_0}\xi^2 + B\xi = \text{const},$$

из которого следует, что период колебаний, согласно общей методике, определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1+k^2)z_0}{3g}} \quad (14)$$

Проиллюстрируем произошедшие изменения на графике потенциальной кривой - на рисунке: 1- потенциальная кривая до изменения скорости, E_0 - начальная энергия шайбы. После того, как шайбе сообщили дополнительную скорость изменилась кривая эффективной потенциальной энергии 2 и увеличилась энергия шайбы E . Для наглядности рисунка мы увеличили скорость шайбы в полтора раза.



4. По-прежнему, при движении шайбы в горизонтальной плоскости ее скорость определяется выражением $V_0 = \sqrt{gz_0}$. Если шайбе сообщить дополнительное приращение скорости v , направленное вдоль боковой

поверхности конуса, то ее полная энергия увеличится на величину $\frac{mv^2}{2}$, а момент импульса останется неизменным. Поэтому уравнения (4)-(5) преобразуются к виду

$$\frac{(1+k^2)V_z^2}{2} + \frac{V_\phi^2}{2} + gz = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0, \quad (15)$$

$$mrV_\phi = mr_0V_0. \quad (16)$$

Избавляясь от V_ϕ , получим

$$\frac{(1+k^2)V_z^2}{2} + \frac{z_0^2V_0^2}{2z^2} + gz = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0. \quad (17)$$

Методика дальнейших расчетов остается прежней: полагая $V_z = 0$ и решая уравнение (17) относительно z , получим пределы изменения вертикальной координаты. Однако в данном случае уравнение (17) преобразуется к уравнению третьей степени, решить которое элементарными методами сложно. Воспользуемся тем обстоятельством, что $v \ll V_0$. Следовательно, изменение координаты z будет также мало. Поэтому можно сразу положить $z = z_0 + \xi$, где $\xi \ll z_0$, и провести разложение по малому параметру ξ/z_0 в самом уравнении (17). Так как нам необходимо получить два корня уравнения, то разложение необходимо вести до второго порядка малости. Цепочка преобразований в данном случае не слишком громоздка и подобна проведенным ранее, поэтому мы ее приведем без комментариев.

$$\frac{z_0^2V_0^2}{2(z_0 + \xi)^2} + g(z + \xi) = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0;$$

$$\frac{z_0^2V_0^2}{2z_0^2(1 + \xi/z_0)^2} + g(z_0 + \xi) = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0;$$

$$\frac{V_0^2}{2} \left(1 - 2\frac{\xi}{z_0} + 3\left(\frac{\xi}{z_0}\right)^2\right) + g(z_0 + \xi) = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0;$$

$$\frac{V_0^2}{2} 3\left(\frac{\xi}{z_0}\right)^2 = \frac{v^2}{2};$$

$$\frac{3}{2} \frac{g}{z_0} \xi^2 = \frac{v^2}{2} .$$

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{z_0 v^2}{3g}}$$

Таким образом, пределы изменения вертикальной координаты определяются выражениями:

$$z_1 = z_0 - \sqrt{\frac{z_0 v^2}{3g}}; \quad z_2 = z_0 + \sqrt{\frac{z_0 v^2}{3g}} \quad (18)$$

Обратите внимание, что в данном случае точка z_0 является точкой равновесия, об этом свидетельствует отсутствие линейного по ξ слагаемого в выражении для эффективной потенциальной энергии. Заметим также, что пределы изменения вертикальной координаты не зависят от того, как направлено изменение скорости «вверх» или «вниз».

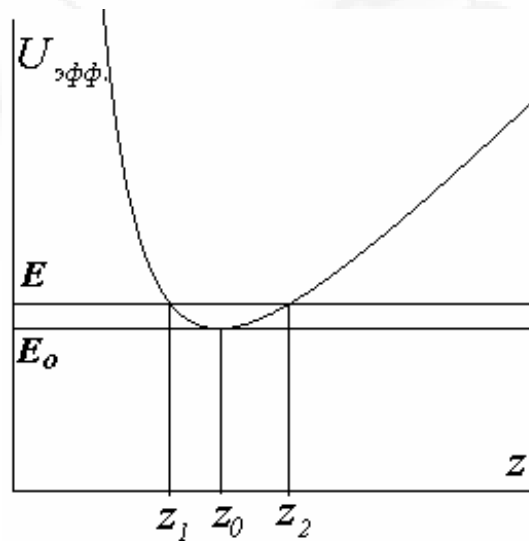
Подставим упрощенное выражение для эффективной потенциальной энергии в уравнение (17), получим

$$\frac{(1+k^2)V_\xi^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{g}{z_0} \xi^2 = \frac{v^2}{2} . \quad (19)$$

Из этого уравнения следует, что период колебаний вдоль вертикальной оси в этом случае определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{3g}} . \quad (20)$$

Дадим графическую иллюстрацию и в этом случае. Так как эффективная потенциальная энергия определяется только радиальной составляющей скорости, то она осталась неизменной. Изменилась только полная энергия шайбы. Как и в предыдущем случае, приращение скорости в два раза меньше скорости начальной. Заметьте, что изменение полной энергии в данном случае меньше.



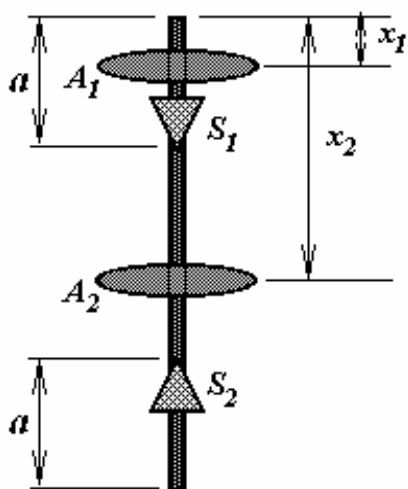
Для закрепления методики решения задач такого типа рекомендую самостоятельно решить практически аналогичную задачу.

Военный космический корабль движется с выключенными двигателями по круговой орбите на высоте $h = 600 \text{ км}$ над поверхностью Земли. На корабле установлена пушка, которая может выпускать снаряды со скоростью $v_0 = 800 \text{ м/с}$ относительно корабля. Масса снаряда значительно меньше массы корабля.

1. Снаряд выстрелили в направлении движения корабля.
 - а) На какое максимальное расстояние от поверхности Земли удалится снаряд?
 - б) Найдите период обращения снаряда вокруг Земли.
2. Снаряд выстреливают в направлении противоположном центру Земли.
 - а) Найдите максимальное и минимальное удаление снаряда от поверхности Земли.
 - б) Чему равен период обращения снаряда в этом случае?
 - в) При каких начальных скоростях снаряда относительно корабля снаряд сможет упасть на Землю?

Задача 5. «Оборотный маятник»

Оборотный маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной l , по которому можно перемещать две одинаковых массивных чечевицы A_1 и A_2 . Положение чечевиц определяется координатами x_1 и x_2 . Маятник может колебаться в вертикальной плоскости, будучи подвешенным на упорах S_1 или S_2 (в этом случае его необходимо перевернуть). Масса стержня значительно меньше массы чечевиц. Чечевицы можно считать материальными точками. Расстояния от упоров до концов стержня одинаковы и равны a .



1. Найдите периоды колебаний маятника в прямом (на упоре S_1) и обратном (на упоре S_2) положениях в зависимости от x_1 и x_2 .
2. Постройте график зависимости периода колебаний маятника в прямом положении при $x_1 = \frac{a}{2}$ от положения второй чечевицы.
3. Найдите множество значений x_1, x_2 , при которых период колебаний маятника T_1 в прямом положении один и тот же. Постройте эти множества точек на диаграмме (x_1, x_2) для различных значений T_1 . Постройте аналогичные кривые для колебаний маятника в обратном положении.

4. На диаграмме (x_1, x_2) постройте множество значений (x_1, x_2) , при которых периоды колебаний маятника в прямом и обратном положениях равны и постоянны. Покажите, что этот период равен периоду колебаний математического маятника с длиной равной расстоянию между упорами.

Решение.

1. Воспользуемся известной формулой для периода колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgb}}, \quad (1)$$

где M - масса маятника, I - момент инерции маятника относительно оси вращения, b - расстояние от оси вращения до центра масс маятника. Момент инерции маятника в прямом положении рассчитывается по формуле

$$I = m(a - x_1)^2 + m(x_2 - a)^2, \quad (2)$$

здесь m - масса одной чечевицы. Расстояние от центра масс до оси вращения вычисляется по формуле

$$b = \frac{x_1 + x_2}{2} - a = \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a)}{2}. \quad (3)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника в прямом положении выражается формулой (учитывая, что масса маятника $M = 2m$)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(a - x_1)^2 + (x_2 - a)^2}{g((x_1 - a) + (x_2 - a))}}. \quad (4)$$

Формула для периода колебаний в обратном положении может быть получена из (4) заменой $x_2 \rightarrow (l - x_2)$, $x_1 \rightarrow (l - x_1)$:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{(a - l + x_1)^2 + (l - x_2 - a)^2}{g((l - x_1 - a) + (l - x_2 - a))}}. \quad (5)$$

2. Для построения требуемого графика функции $T_1(x_2)$ подставим $x_1 = \frac{a}{2}$ и преобразуем выражение (4)

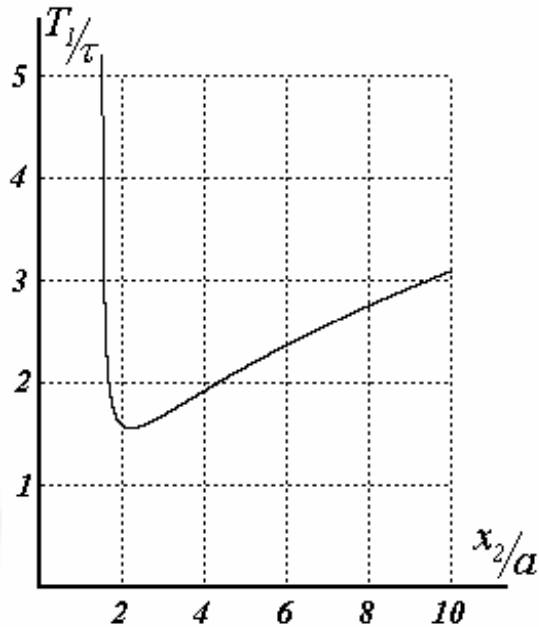
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(a - x_1)^2 + (x_2 - a)^2}{g((x_1 - a) + (x_2 - a))}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \sqrt{\frac{(\frac{x_2}{a} - 1)^2 + \frac{1}{4}}{\frac{x_2}{a} - \frac{3}{2}}}. \quad (6)$$

График этой функции удобно строить в следующих координатах: по горизонтали - отношение x_2 / a ; по вертикали -

T_1 / τ , где $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. Тогда

проанализировать и построить график этой функции можно по известным методикам.

Результат построения представлен на рисунке.



3. Из формулы (4) следует, что множество точек (x_1, x_2) , для которых период колебаний T_1 постоянен удовлетворяет уравнению

$$\frac{(a - x_1)^2 + (x_2 - a)^2}{(x_1 - a) + (x_2 - a)} = \frac{gT_1^2}{4\pi^2}. \quad (7)$$

Если обозначить $\frac{gT_1^2}{4\pi^2} = 2p$, то уравнение (7) легко привести к виду

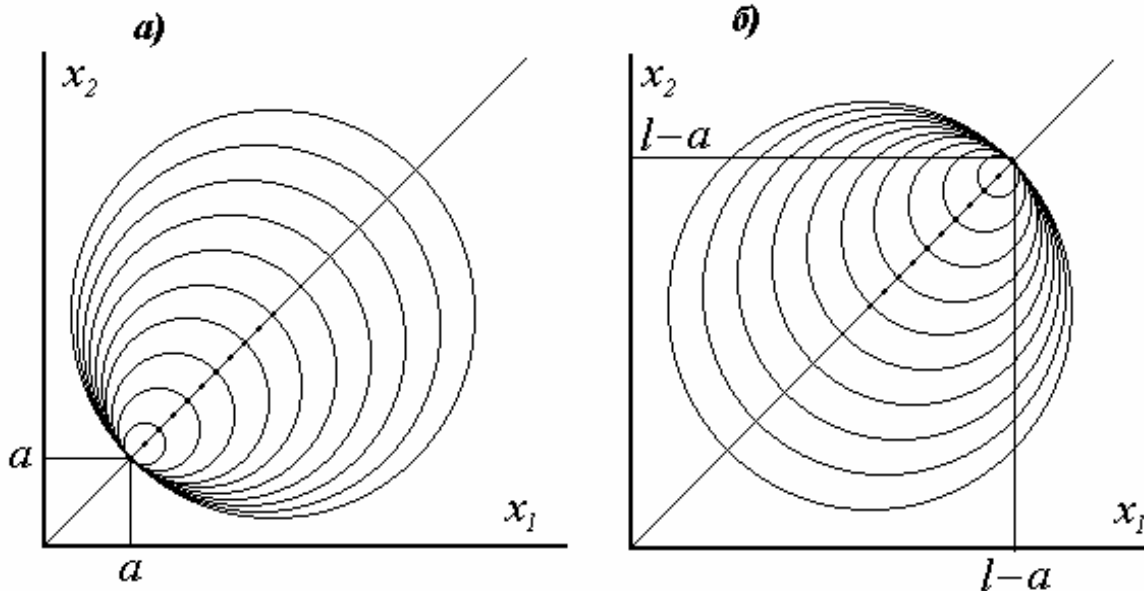
$$(x_1 - a - p)^2 + (x_2 - a - p)^2 = 2p^2, \quad (8)$$

которое является уравнением окружности радиуса $\sqrt{2}p$, центр которой имеет координаты $x_1 = x_2 = a + p$. Увеличение периода колебаний T_1 приводит к увеличению параметра p . Легко заметить, что все окружности семейства (8) проходят через точку $x_1 = x_2 = a$, как бы «вырастают из нее»- рисунок а).

Семейство точек, удовлетворяющих условию $T_2 = const$, можно получить из рассмотренного семейства тем же, что и ранее преобразованием $x_2 \rightarrow (l - x_2)$, $x_1 \rightarrow (l - x_1)$. В этом случае уравнение множества точек $T_2 = const$ будет иметь вид

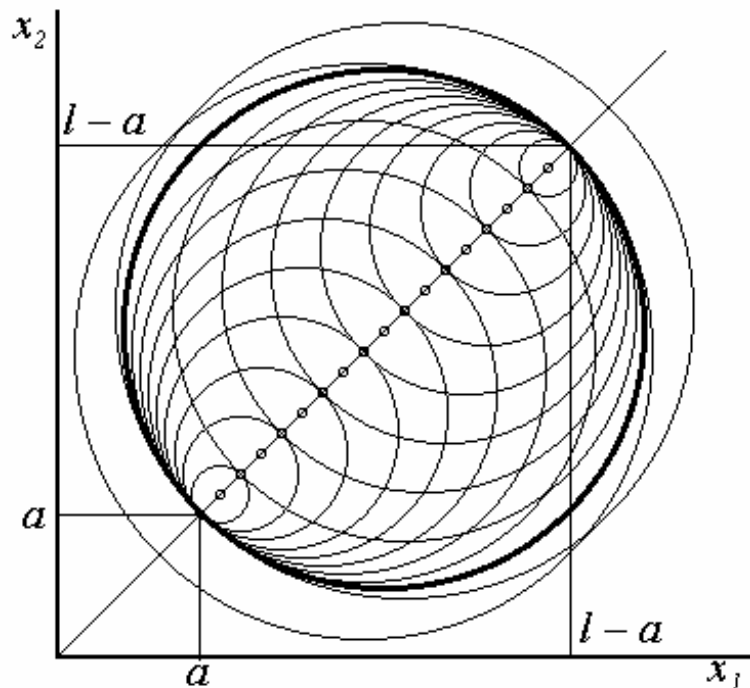
$$(l - x_1 - a - p)^2 + (l - x_2 - a - p)^2 = 2p^2, \quad (9)$$

и описывать окружности, «произрастающие из точки» $x_1 = x_2 = l - a$, см. рисунок б).



4. Для того, что бы определить множество точек для которых периоды колебаний в прямом и обратном положении были одинаковы, необходимо найти окружность, которая принадлежит обоим семействам. Такой линией является окружность, проходящая через точки $x_1 = x_2 = a$ и $x_1 = x_2 = l - a$.

На рисунке она выделена как более жирная.



Уравнение этой окружности имеет вид

$$(x_1 - l/2)^2 + (x_2 - l/2)^2 = (l/2 - a)^2 \quad (10)$$

Период колебаний в этом случае можно рассчитать по формуле (4) положив в ней $x_1 = x_2 = l - a$:

$$T_l = 2\pi \sqrt{\frac{(a - x_1)^2 + (x_2 - a)^2}{g((x_1 - a) + (x_2 - a))}} = 2\pi \sqrt{\frac{l - 2a}{g}} \quad (11)$$

К аналогичному результату приводит применение формулы (5), если положить в ней $x_1 = x_2 = a$. Формула (11) описывает также период колебаний математического маятника с длиной равной расстоянию между упорами.

Замечания.

Оборотный маятник, описанный в данной задаче также носит имя маятника Бесселя. Он достаточно широко применяется для точного измерения ускорения свободного падения. Суть таких измерений сводится к определению такого периода колебаний, который был бы одинаков как в прямом, так и в обратном положениях, и последующем применении формулы (11).

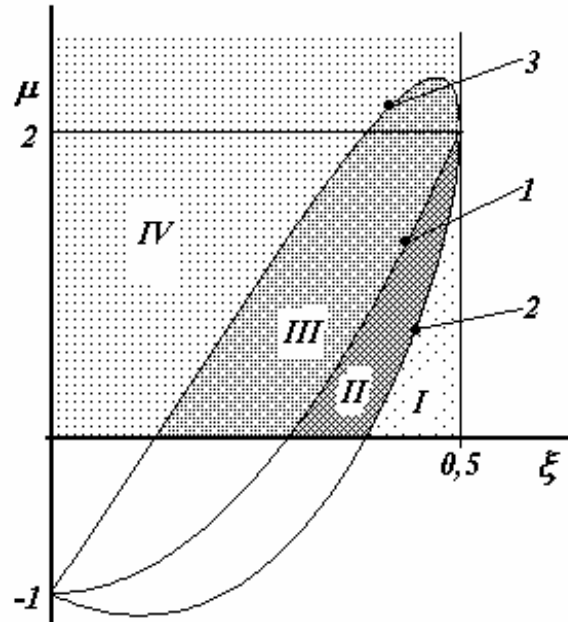
Сначала можно построить график параболы $12\xi^2 - 1$ на интервале изменения параметра $\xi \in [0, 1/2]$ (кривая 1). Немного ниже будет лежать график функции

$$12\xi^2 - 1 - \frac{12\xi\sqrt{1-4\xi^2}}{\pi - \arccos 2\xi}.$$

Можно

заметить, что дополнительное слагаемое неотрицательно и обращается в нуль на концах рассматриваемого интервала (кривая 2). Немного выше будет лежать график функции

$$12\xi^2 - 1 + \frac{12\xi\sqrt{1-4\xi^2}}{\pi - \arccos 2\xi},$$



в которой дополнительное слагаемое также неотрицательно и обращается в нуль на концах рассматриваемого интервала (кривая 3). На представленном рисунке эти функции построены с помощью компьютера точно. Конечно, физический смысл имеет область только положительных значений параметра μ . Таким образом, область допустимых значений рассматриваемых параметров разбивается на четыре части:

- в области I выполняется неравенство (6), то есть шайба успеет проскочить «вперед» до тех пор, пока ее догонит вращающийся стержень;
- в области II выполняется неравенство (5), следовательно, шайба будет двигаться «вперед», но не выполняется (6), поэтому стержень успеет ее догнать;
- в области III выполняется неравенство (7), следовательно, относительно центра стержня шайба будет двигаться «назад» и испытает столкновение со стержнем, так как не выполняется неравенство (8);
- наконец, в области IV выполняется неравенство (8), следовательно, шайба отразится «назад», не испытав второго столкновения со стержнем.

3. Если после первого удара скорости шайбы и центра стержня окажутся равными, то в системе отсчета, связанной с центром стержня, второй удар произойдет в той же точке (обозначенной буквой С на предыдущих рисунках), что и первый. Поэтому после него восстановятся характеристики движения, существовавшие до первого удара. Следовательно, для того чтобы после второго удара шайба двигалась с прежней скоростью необходимо выполнения условия $v_1 = u$, что достигается при

$$\boxed{\mu = 12\xi^2 - 1}. \quad (9)$$

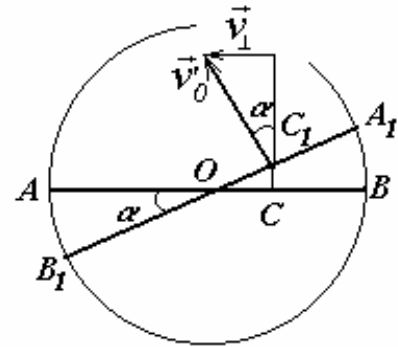
4. Необходимо заметить, что при заданных значениях параметров, после первого удара скорости шайбы и центра стержня оказываются весьма близки. Действительно, подсчет по формулам (4) показывает, что

$$v_1 - u = v_0 \frac{12\xi^2 - 1 - \mu}{12\xi^2 + 1 + \mu} \approx 2,51 \cdot 10^{-4} v_0 ;$$

$$\omega l = v_0 \frac{24\xi}{12\xi^2 + 1 + \mu} \approx 3,00 v_0.$$

Стержень сделает поворот за время $\tau = \frac{\pi}{\omega} \approx 1,05 \frac{l}{v_0}$, за это же время

шайба пройдет путь относительно центра стержня равный $\delta = (v_1 - u)\tau \approx 2,63 \cdot 10^{-4} l$. (На рис. отрезок CC_1 , который сильно приуменьшен). Так как угол α мал (и равен $\alpha \approx \frac{\delta}{l\xi} \approx 7,88 \cdot 10^{-3}$), то можно



считать, что после удара шайба восстановит свою первоначальную скорость $v'_0 = v_0 - u$ (не забывайте - мы работаем в системе отсчета, связанной с центром стержня!), но направлена она будет перпендикулярно стержню в момент удара. Следовательно, после второго удара шайба преобретет малую компоненту скорости, перпендикулярную первоначальному направлению и равную

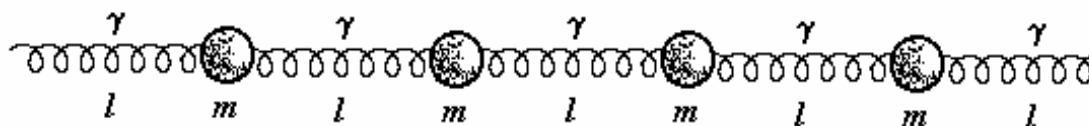
$$v_{\perp} = (v_0 - u)\alpha = v_0 \frac{12\xi^2 - 1 + \mu}{12\xi^2 + 1 + \mu} \alpha \approx 1,96 \cdot 10^{-4} v_0.$$

Изменение компоненты скорости, параллельной первоначальному направлению мало, поэтому направление скорости изменится на малый угол

$$\beta = \frac{v_{\perp}}{v_0} \approx 2,0 \cdot 10^{-4}.$$

Задача 6. «Упругая цепочка»

Бесконечная цепочка состоит из одинаковых шариков (масса каждого m), соединенных одинаковыми легкими пружинами (жесткость каждой γ). В положении равновесия расстояния между шариками равны l , пружины немного растянуты так, что сила натяжения каждой равна T_0 .



Часть 1. Продольные волны.

Допустим, что каждый шарик может двигаться только в направлении вдоль цепочки.

1.1 Найдите собственную частоту колебаний одного из шариков ω_0 , если два соседних закреплены.

1.2 По цепочке распространяется продольная волна. Найдите сдвиг фаз между колебаниями двух соседних шариков при частоте волн ω .

1.3 При каких частотах колебаний ω по цепочке могут распространяться бегущие волны?

1.4 Найдите скорость распространения продольной волны по цепочке. Постройте примерный график этой зависимости.

1.5 Найдите скорость распространения продольной волны при частотах $\omega \ll \omega_0$. Покажите, что полученное выражение можно считать аналогом формулы для скорости звука в упругой среде $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E - модуль Юнга, ρ - плотность среды.

1.6 В цепочке неподвижно закрепили неподвижно два шарика так, что между ними оказалось n шариков. Определите все частоты собственных колебаний этого участка цепочки, соответствующие различным модам стоячих волн.

Часть 2. Поперечные волны.

Пусть шарiki способны перемещаться только в направлении перпендикулярном цепочке, причем их смещения малы ($\Delta x \ll l$).

2.1 Определите частоту поперечных колебаний одного шарика, если два соседних закреплены.

2.2 Найдите скорость распространения поперечной волны по цепочке.

2.3 Найдите скорость распространения поперечной волны при частотах $\omega \ll \omega_0$. Покажите, что полученное выражение можно считать аналогом формулы для скорости поперечных волн в упругой среде $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, где G - модуль сдвига, ρ - плотность среды.

2.4 Найдите минимально возможную длину волны, которая может распространяться по цепочке.

2.5 На основании качественных рассуждений определите, как зависит скорость распространения поперечной волны от ее амплитуды, когда смещение шариков сравнимо с расстоянием между ними.

Решение.

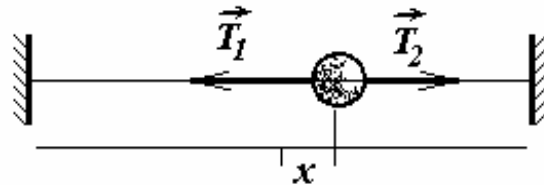
Часть 1.

1.1 Обозначим смещение шарика от положения равновесия через x .

На шарик будут действовать силы упругости пружин, причем, на основании закона Гука можно записать

$$T_1 = T_0 + \gamma \cdot x$$

$$T_2 = T_0 - \gamma \cdot x.$$



Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = T_2 - T_1,$$

где a - ускорение шарика, подставляя выражения для сил упругости, получим

$$ma = -2\gamma \cdot x. \quad (1)$$

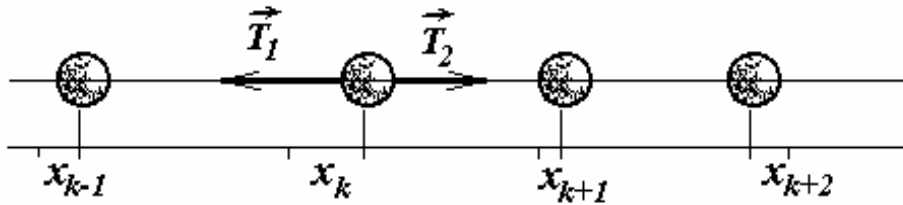
Это уравнение описывает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\gamma}{m}}. \quad (2)$$

Так как сила упругости пропорциональна деформации пружины, то в уравнениях движения можно не учитывать начальную деформацию пружин и наличие начальной силы их натяжения T_0 . Действительно, каждый шарик соединен с двумя пружинами с противоположных сторон, поэтому силы T_0 будут компенсировать друг друга, и в

уравнениях движения будут оставаться только линейные члены, возникающие из-за дополнительных деформаций пружин.

1.2 Рассмотрим бесконечную цепочку. Пронумеруем все шарики, обозначим смещение k -го шарика от его положения равновесия через x_k , а его ускорение a_k .



На основании второго закона Ньютона запишем уравнение

движения k -го шарика

$$ma_k = -T_1 + T_2,$$

или, принимая во внимание закон Гука,

$$ma_k = -\gamma(x_k - x_{k-1}) + \gamma(x_{k+1} - x_k).$$

Разделим обе части уравнения на m и приведем подобные члены.

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}. \quad (3)$$

Таким образом, мы получили бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений, определяющих ускорения каждого шарика. Без задания дополнительных условий эта система имеет бесконечно много решений. В данном случае нас интересует решения типа бегущей волны, для которой смещения шариков изменяются по гармоническому закону с одинаковыми частотами и амплитудами, но разными начальными фазами колебаний. Поэтому будем искать решение системы (3) в виде

$$x_k = A \cos(\omega t + \varphi_k). \quad (4)$$

Понятно, что сдвиги фаз колебаний между соседними шариками $\Delta\varphi$ должны быть одинаковы, кроме того, выбор начальной фазы колебаний одного из шариков произволен. Поэтому в уравнение (3) подставим следующие выражения для смещений

$$\begin{aligned} x_k &= A \cos(\omega t) \\ x_{k-1} &= A \cos(\omega t - \Delta\varphi). \\ x_{k+1} &= A \cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

Получим:

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -A\omega_0^2 \cos \omega t + A\frac{\omega_0^2}{2} \cos(\omega t - \Delta\varphi) + A\frac{\omega_0^2}{2} \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой для суммы косинусов, это уравнение можно преобразовать к виду

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -A\omega_0^2 \cos \omega t + A\omega_0^2 \cos \omega t \cos \Delta\varphi.$$

После сокращения на $A \cos \omega t$, из последнего уравнения выразим значение косинуса сдвига фаз

$$\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad (6)$$

а величина сдвига фаз определяется формулой

$$\Delta\varphi = \pm \arccos\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right). \quad (7)$$

Заметим, что два знака в полученном решении соответствуют бегущим волнам, распространяющимся в противоположных направлениях.

1.3 Так как величина косинуса действительного аргумента не может превышать по модулю единицу, то на возможные частоты бегущих волн накладывается ограничение (следующее из формулы (6))

$$\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right| \leq 1,$$

из которого находим

$$\omega \leq \sqrt{2}\omega_0 = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \quad (8)$$

Мы получили, что при частотах больших, чем определяется формулой (8) не существует решений уравнений (3), в виде бегущих волн, что и свидетельствует о том, что существует предельная частота волн, которые могут распространяться по цепочке. Физический смысл полученного ограничения мы выясним несколько позднее.

1.4 Как было отмечено ранее начальная фаза колебаний одного из шариков может быть выбрана произвольно, поэтому решение уравнений (3) можно записать в виде

$$x_k = A \cos(\omega t + k\Delta\varphi),$$

где величина $\Delta\varphi$ определяется формулой (7). Для того, что бы рассчитать скорость распространения волны, выразим номер шарика k через его координату z - $k = \frac{z}{l}$. (Напомним, что величины x_k обозначают смещения шариков от их собственных положений равновесия, мы обозначаем координатой z положение шарика).

Теперь мы имеем уравнение бегущей волны в явном виде:

$$x(z, t) = A \cos\left(\omega t + \frac{z}{l} \Delta\varphi\right). \quad (9)$$

Скорость распространения волны s можно получить из условия постоянства фазы одной из точек, «привязанной» к самой волне:

$$\omega t + \frac{z}{l} \Delta\varphi = \text{const}, \text{ откуда следует}$$

$$c = \left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| = \frac{\omega l}{\Delta \varphi} = \frac{\omega l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (10)$$

Для построения графика зависимости $c(\omega)$, найдем значение скорости волны при малых частотах, $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$. В этом пределе сдвиг фаз между колебаниями соседних точек является малой величиной, поэтому можно положить $\cos \Delta \varphi = 1 - \frac{(\Delta \varphi)^2}{2}$. Тогда из уравнения (6) следует: $\Delta \varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{2}$.

Подставляя это значение в формулу (10), получим скорость распространения низкочастотных волн

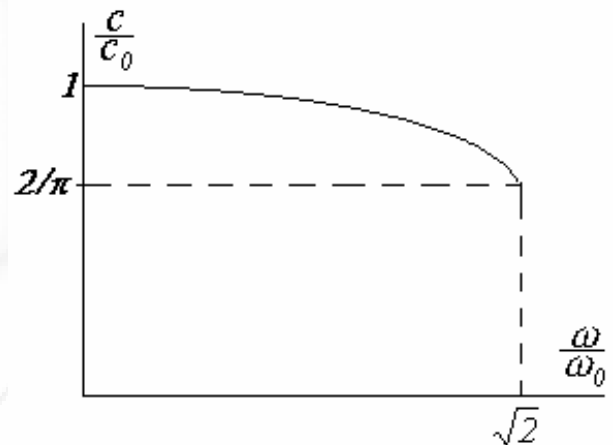
$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Используя это значение формулу (10) перепишем в виде

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{2}(\omega / \omega_0)}{\arccos(1 - (\omega / \omega_0)^2)}, \quad (12)$$

в котором скорость волны выражается через отношение частот ω / ω_0 .

Напомним, что частота ω не может превышать $\sqrt{2}\omega_0$. При $\omega / \omega_0 = \sqrt{2}$ функция (12) принимает значение, равное $2 / \pi$. Таким образом, эта функция является монотонно убывающей от 1 до $2 / \pi \approx 0,64$.



Как видно из проведенного анализа, скорость волны достаточно слабо зависит от ее частоты, а при малых частотах этой зависимость можно пренебречь и считать скорость волны, постоянной. Рассматриваемая система является достаточно хорошей моделью упругих волн в твердых телах. В твердых телах величина ω_0 настолько велика, что даже при ультразвуковых частотах хорошо выполняется низкочастотное приближение.

1.5 В низкочастотном пределе скорость волны определяется формулой (11), если подставить значение ω_0 , получим

$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}} = l \sqrt{\frac{\gamma}{m}}. \quad (13)$$

Покажем, что эта формула является аналогом формулы для скорости звука в твердых телах $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Запишем закон Гука в форме $\sigma = E\varepsilon$, где σ -

механическое напряжение, возникающее в теле при относительной деформации ε . Наша задача является одномерным аналогом сплошного твердого тела, поэтому аналогом механического напряжения будет сила

упругости пружинки $T = \gamma$, относительная деформация может быть записана в виде $\varepsilon = \frac{x}{l}$, тогда $T = \gamma \varepsilon$. Таким образом, видим, что аналогом модуля Юнга служит величина γ . Аналогом плотности является отношение $\frac{m}{l}$. Если подставить эти выражения в формулу для скорости звука, то получим

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = l \sqrt{\frac{\gamma}{m}},$$

в полном соответствии с рассчитанной скоростью продольных волн по цепочке.

1.6 Для изучения стоячих волн обратимся к системе уравнений (3)

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}.$$

Теперь решение этих уравнений необходимо искать в форме стоячей волны, для которой частоты и фазы колебаний для всех шариков одинаковы, а амплитуды изменяются по гармоническому закону. Кроме того, необходимо учесть, что в данном случае наша цепочка ограничена, причем амплитуды колебаний нулевого и $(n+1)$ -го шариков равны нулю. Положим

$$x_k = A \sin k\beta \cos \omega t. \quad (14)$$

При такой записи при $k=0$ колебания нулевого шарика отсутствуют, $x_0 = 0$. Также должно выполняться условие $x_{n+1} = 0$, которое налагает ограничения на возможные значения параметра β :

$\sin(n+1)\beta = 0$, откуда следует $(n+1)\beta = j\pi$, или

$$\beta_j = j \frac{\pi}{n+1}; \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \quad (15)$$

Подставим пробное решение (14) с определенным значением β_j в уравнения движения

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \sin k\beta_j \cos \omega t &= -A\omega_0^2 \sin k\beta_j \cos \omega t + \\ &+ A\frac{\omega_0^2}{2} \sin(k-1)\beta_j \cos \omega t + A\frac{\omega_0^2}{2} \sin(k+1)\beta_j \cos \omega t; \end{aligned}$$

после сокращения и применения формулы для суммы синусов получим

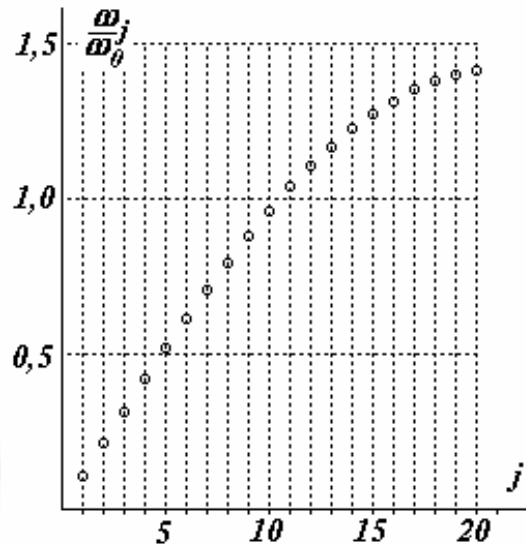
$$-\omega^2 \sin k\beta_j = -\omega_0^2 \sin k\beta_j + \omega_0^2 \sin k\beta_j \cos \beta_j.$$

С учетом условия (15) получаем спектр возможных частот собственных колебаний цепочки

$$\boxed{\omega_j = \omega_0 \sqrt{1 - \cos \frac{j\pi}{n+1}}; \quad j = 1, 2, 3, \dots} \quad (16)$$

На рисунке спектр частот представлен для $n = 20$.

Так как в данном случае система обладает двадцатью степенями свободы, то и число собственных частот равно двадцати. Обратите внимание, низшие частоты практически эквидистантны (отличаются на одну и ту же величину), с ростом частот ее зависимость от порядкового номера становится заметно нелинейной - начинает сказываться зависимость скорости волны от частоты.



Еще раз обратим внимание на неоднозначность решения системы уравнений (3): сначала мы искали (и нашли!) решение в виде бегущих волн; а затем в виде стоячих. Правда, во втором случае мы наложили дополнительные (граничные) условия. В общем случае, для того, чтобы решение системы было однозначным необходимо задать еще и начальные условия: значения начальных положений и скоростей всех шариков цепочки. Тогда решение может быть представлено в виде суперпозиции найденных волн (построение решения в виде суммы найденных решений допустимо, так как сама система является линейной).

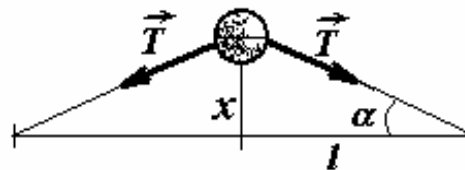
Заметим также, что бегущая волна, образованная сложением простых гармонических волн, не будет сохранять свою форму в процессе распространения, так как скорость волны зависит от ее частоты (имеет место дисперсия волн).

Часть 2. Поперечные волны.

2.1 Запишем уравнение движения шарика при его малом смещении x в направлении перпендикулярном цепочке. Так как смещение мы считаем малым, то и угол α мал, (можно

положить $\alpha \approx \frac{x}{l}$);

кроме того, следует пренебречь изменением силы натяжения



цепочки (изменение этой силы пропорционально x^2 , поэтому в линейном приближении малых колебаний должно быть опущено).

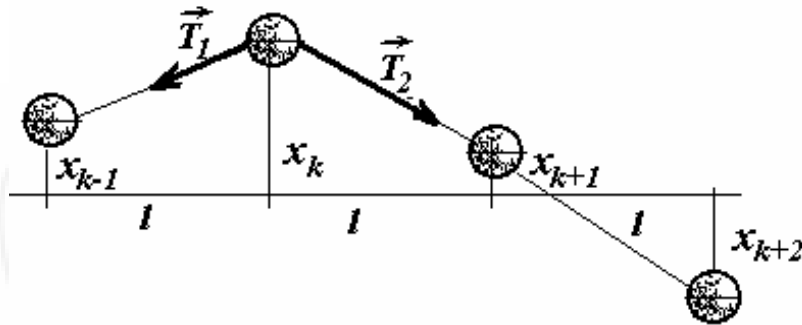
$$ma = -2T_0 \sin \alpha = -2T_0 \frac{x}{l}. \quad (17)$$

Из этого уравнения следует, что частота малых колебаний шарика определяется формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2T_0}{ml}}. \quad (18)$$

Если в положения равновесия пружинки не натянуты, то даже малые поперечные колебания будут нелинейны, так как возвращающая сила в этом случае будет пропорциональна x^3 .

2.2 Запишем уравнения движения одного из шариков бесконечной цепочки в том же приближении малых поперечных смещений.



$$ma_k = -T_0 \frac{x_k - x_{k-1}}{l} -$$

(19)

Приведем подобные члены, разделим на массу шарика m , используем

обозначение ω_0 , соответствующее формуле (18) и получим уравнение

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}, \quad (20)$$

полностью совпадающее с уравнением (3). Поэтому и решения будут такими же. Не повторяя хода решения, запишем скорость распространения поперечных волн

$$c = \frac{\omega l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (21)$$

При малых частотах, эта формула переходит в

$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{T_0 l}{m}}. \quad (22)$$

2.3 Для деформации сдвига закон Гука имеет вид $\sigma = G\alpha$ (где σ - тангенциальное механическое напряжение, α - угол сдвига). В рассматриваемом одномерном случае аналогом механического напряжения является возвращающая сила $F = T_0\alpha$. Следовательно, аналогом модуля сдвига G является величина T_0 , аналогом плотности является отношение m/l . Подставляя эти величины в формулу для скорости распространения упругих волн в твердых телах, получим формулу

$$c_0 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{T_0 l}{m}},$$

полностью совпадающую с формулой (22).

2.4 Длина волны рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

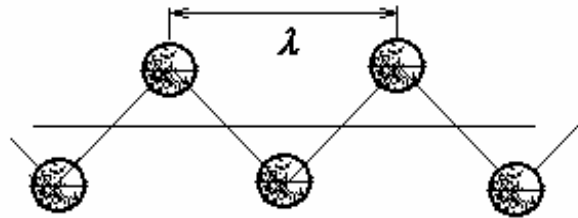
Используя выражение (21), получим

$$\lambda = \frac{2\pi l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (23)$$

Минимальной длине волны соответствует максимальная частота $\omega = \omega_0 \sqrt{2}$.

В этом пределе $\lambda_{\min} = 2l$.

Изобразим эту волну. Рисунок достаточно наглядно поясняет, почему существует минимально возможная длина волны, которая может распространяться по данной цепочке.



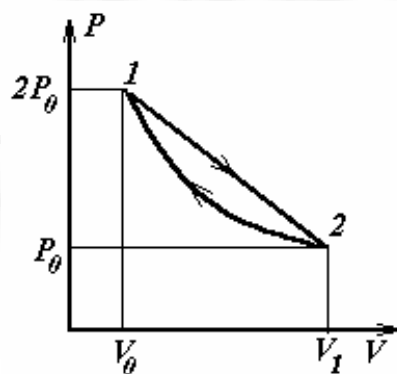
Полностью аналогичная ситуация встретила нам, при рассмотрении продольных волн, там также существует минимально возможная длина волны, соответствующая максимальной частоте колебаний.

2.5 При возрастании амплитуды колебаний возрастут силы упругости пружин, поэтому согласно формуле (21) скорость распространения волн увеличится.

Таким образом, в общем случае рассматриваемые волны являются нелинейными: скорость их распространения сложным образом зависит от амплитуды колебаний. Кроме того, для этих волн наблюдается явление дисперсии - зависимость скорости волн от их частоты. Исследование таких волн представляет собой весьма сложную математическую задачу, точное решение которой в настоящее время не известно.

Задача 7. «Прямая и адиабата»

Один моль идеального одноатомного газа совершает циклический процесс, изображенный на рисунке: $1 \rightarrow 2$ прямая, $2 \rightarrow 1$ - адиабата.



1. Найдите отношение V_1 / V_0 .
2. Какова максимальная температура газа в цикле?
3. Постройте примерный график зависимости теплоемкости газа на участке $1 \rightarrow 2$ от его объема.
4. Постройте график зависимости количества теплоты, полученной газом при расширении на участке $1 \rightarrow 2$, от его объема.
5. Найдите к.п.д. цикла.

Решение.

Предисловие.

Сразу видно (нужно использовать уравнение адиабаты, подсчитывать теплоту и работу и т.д.), что решение данной задачи будет насыщено многочисленными и громоздкими алгебраическими выкладками. Поэтому можно «упростить себе жизнь», избавившись от постоянных, фигурирующих в условии задачи. Это можно сделать, введя свою систему единиц измерения. Заметим, что во всех громоздких задачах такие замены переменных существенно упрощают математические преобразования, или, по меньшей мере, экономят бумагу.

В качестве единиц измерения давления и объема логично взять величины P_0 , V_0 . Тогда давление и объем P, V , измеренные в этих единицах (обозначим их малыми буквами p, v), будут соответственно определяться

$$p = \frac{P}{P_0}, \quad v = \frac{V}{V_0}. \quad (1)$$

Определим также единицу измерения температуры. Из уравнения состояния одного моля идеального газа и определений (1) выразим

$$T = \frac{PV}{R} = \frac{P_0 V_0}{R} pv. \quad (2)$$

Если теперь ввести единицу измерения температуры равную $\frac{P_0 V_0}{R}$, то температура в этих единицах примет вид

$$t = \frac{TR}{P_0 V_0}. \quad (3)$$

Тогда уравнение состояния принимает простой и изящный вид

$$pv = t. \quad (4)$$

Определим также единицы измерения работы, теплоты и энергии, используя известное соотношение для работы $A = P\Delta V = (P_0 V_0) p \Delta v$. Откуда видно, что в качестве единицы работы, теплоты и энергии следует взять произведение $P_0 V_0$. Тогда внутренняя энергия одноатомного идеального газа в этих единицах будет выражаться формулой

$$\Delta u = \frac{\Delta U}{P_0 V_0} = \frac{\frac{3}{2} R \Delta T}{P_0 V_0} = \frac{3}{2} \Delta t. \quad (5)$$

Наконец, найдем единицу измерения теплоемкости.

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{P_0 V_0 \Delta q}{\frac{P_0 V_0}{R} \Delta t} = R \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

откуда следует, что единицей теплоемкости является универсальная газовая постоянная, то есть

$$c = \frac{C}{R}. \quad (6)$$

Переход к обычным единицам измерения осуществляется по формулам, обратным к (1), (3), (5), (6).

Теперь можно притупить непосредственно к решению задачи.

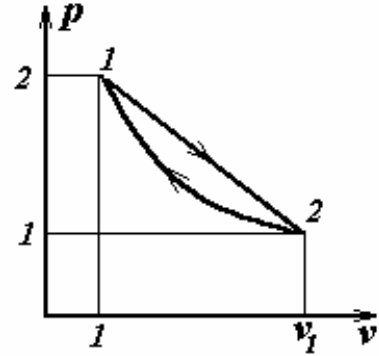
1. Перерисуем график рассматриваемого процесса в нашей системе единиц. Для этого необходимо только перенумеровать оси координат. Запишем уравнение адиабатического процесса $2 \rightarrow 1$

$$pv^\gamma = 2, \quad (7)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$ показатель адиабаты для

одноатомного газа. (это обычное уравнение адиабатического процесса в которое подставлены начальные условия $p = 2, v = 1$). Из уравнения (7), полагая $p = 1$ находим

$$v_1 = \frac{V_1}{V_0} = 2^{1/\gamma} = 2^{\frac{3}{5}} \approx 1,516. \quad (8)$$



2. Процесс расширения на участке $1 \rightarrow 2$ описывается линейной функцией вида

$$p = 2 - a(v - 1),$$

где параметр зависимости a можно определить по известному значению давления и объема в крайней точке 2 :

$$1 = 2 - a(v_1 - 1),$$

откуда следует, что $a = \frac{1}{v_1 - 1} \approx 1,94$, а уравнение процесса

$$p = 2 - \frac{v - 1}{v_1 - 1} = \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1}. \quad (9)$$

Температуру газа можно вычислить из уравнения состояния идеального газа $pv = t$ и уравнения процесса (9):

$$t = pv = \frac{(2v_1 - 1 - v)v}{v_1 - 1}. \quad (10)$$

Эта функция имеет максимум¹ при

$$v_{(1)} = \frac{2v_1 - 1}{2} \approx 1,016, \quad (11)$$

соответствующее максимальное значение температуры определяется по формуле

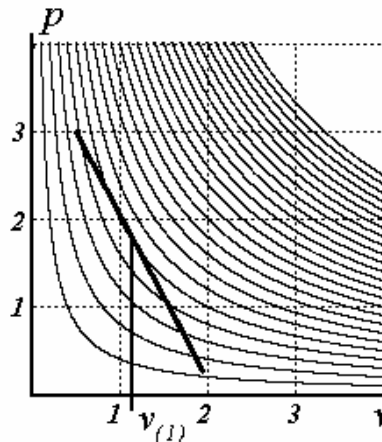
$$t_{max} = \frac{(2v_1 - 1 - v_{(1)})v_{(1)}}{v_1 - 1} = \frac{(v_1 - \frac{1}{2})^2}{v_1 - 1} \approx 2,00. \quad (12)$$

¹ Положение максимума можно искать традиционным универсальным способом, вычисляя производную и полагая ее равной нулю. Однако в данном случае функция квадратична, а ее экстремум лежит точно на середине между корнями, которые в выражении (10) очевидны.

Или в обычных единицах

$$T_{\max} = 2,00 \frac{P_0 V_0}{R}$$

Изобразим на нашей диаграмме семейство изотерм и проведем участю к процесса $1 \rightarrow 2$. Видно, что в точке $v_{(1)} \approx 1,016$ исследуемая прямая является касательной к одной из изотерм, очевидно также, что этой изотерме соответствует максимальная температура. Эта точка близка к началу нашего цикла, поэтому максимальная температура лишь незначительно превышает температуру в точке 1, равную точно двум.



3. Для вычисления теплоемкости газа $c = \frac{\delta q}{dt}$ воспользуемся уравнением первого начала термодинамики²

$$\delta q = du + \delta a,$$

где δq - количество теплоты, полученной газом, du - изменение его внутренней энергии, δa - работа совершенная газом. Учитывая, что

$$\delta a = p dv, \text{ а для одноатомного идеального газа } du = \frac{3}{2} dt, \text{ для теплоемкости}$$

получим

$$c = \frac{\delta q}{dt} = \frac{3}{2} + p \frac{dv}{dt}. \quad (13)$$

Из уравнения процесса (9) найдем изменение температуры dt при изменении объема на величину dv -

$$dt = \frac{2v_1 - 1 - 2v}{v_1 - 1} dv$$

и подставим в формулу (13)

$$\begin{aligned} c &= \frac{\delta q}{dt} = \frac{3}{2} + p \frac{dv}{dt} = \frac{3}{2} + \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1} \cdot \frac{dv}{\frac{2v_1 - 1 - 2v}{v_1 - 1} dv} = \\ &= \frac{10v_1 - 5 - 8v}{2v_1 - 1 - 2v} \approx \frac{2,54 - 2v}{1,017 - v}. \end{aligned} \quad (14)$$

² Обратите внимание на традиционно используемые обозначения: du - изменение внутренней энергии не зависит от вида процесса, так как внутренняя энергия является функцией состояния системы, $\delta q, \delta a$ - количество теплоты и совершенная работа являются характеристиками процесса и функциями состояния не являются.

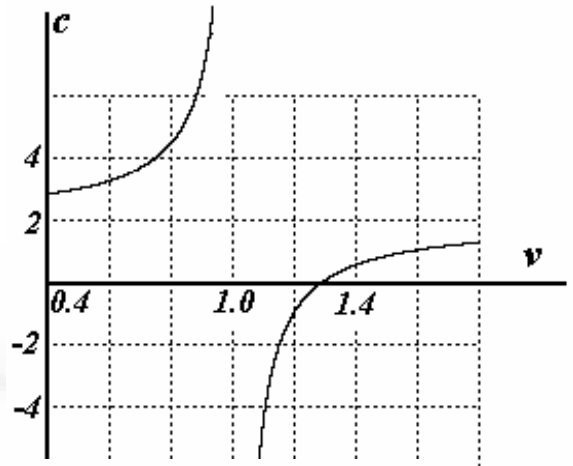
Эта функция терпит разрыв и устремляется к бесконечности в точке $v_{(1)} = \frac{2v_1 - 1}{2}$. Как мы определили

раньше, в этой точке температура газа максимальна, следовательно вблизи ее процесс близок к изотермическому, для которого теплоемкость бесконечна.

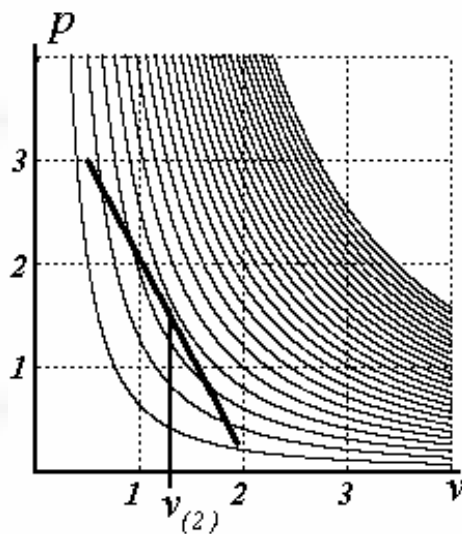
При $v_{(2)} = \frac{10v_1 - 5}{8} \approx 1,27$ теплоемкость

газа становится равной нулю, следовательно вблизи этой точки процесс близок к адиабатическому.

График этой функции представлен на рисунке.



Построим теперь семейство адиабат и нанесем на него участок изучаемого процесса. Хорошо заметно, что в точке $v_{(2)} \approx 1,27$ прямая касается адиабаты, поэтому в этой точке теплоемкость обращается в нуль.



4. Еще раз запишем уравнение второго начала термодинамики для участка процесса $1 \rightarrow 2$ при изменении объема от 1 до v :

$$q = \Delta u + a$$

Выражение для внутренней энергии представим в виде

$$\Delta u = \frac{3}{2} \Delta t = \frac{3}{2} \left(\frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1} - 2 \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(2v_1 - 1)v - v^2 - 2(v_1 - 1)}{v_1 - 1}. \quad (15)$$

Совершенная газом работа также легко может быть найдена из графика процесса (как площадь под участком прямой)

$$\begin{aligned} a &= \frac{2+p}{2} (v-1) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1} \right) (v-1) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(4v_1 - 2)v - v^2 - (4v_1 - 3)}{v_1 - 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом,

$$q = \Delta u + a = \frac{-4v^2 + v(10v_1 - 5) - (10v_1 - 9)}{2(v_1 - 1)}. \quad (17)$$

Зависимость полученной теплоты от объема является квадратичной функцией, которая достигает максимума при $v_{(2)} = \frac{10v_1 - 5}{8} \approx 1,27$, и максимальное значение функции

$$q_1 = q(v_{(2)}) = \frac{(10v_1 - 13)^2}{32(v_1 - 1)} \approx 0,281, \quad (16)$$

Как уже отмечалось, в этой точке теплоемкость равна нулю, то есть прямая процесса $1 \rightarrow 2$ близка к адиабате. Следовательно, при расширении до этого газ получает теплоту, а далее ее отдает. Таким образом количество полученной теплоты следует определять как максимальное значение функции (17), т.е. q_1 .

Совершенную за цикл работу определим как разность между полученной и отданной теплотой, то есть она равна значению функции (15) в крайней точке цикла $v = v_1$ -

$$a = q(v_1) = \frac{6v_1 - 9}{2} \approx 0,047. \quad (18)$$

При этом, мы учитываем, что участок цикла $2 \rightarrow 1$ является адиабатой, проходит без теплообмена. График функции (17) изображен на рисунке и представляет собой обычную параболу.

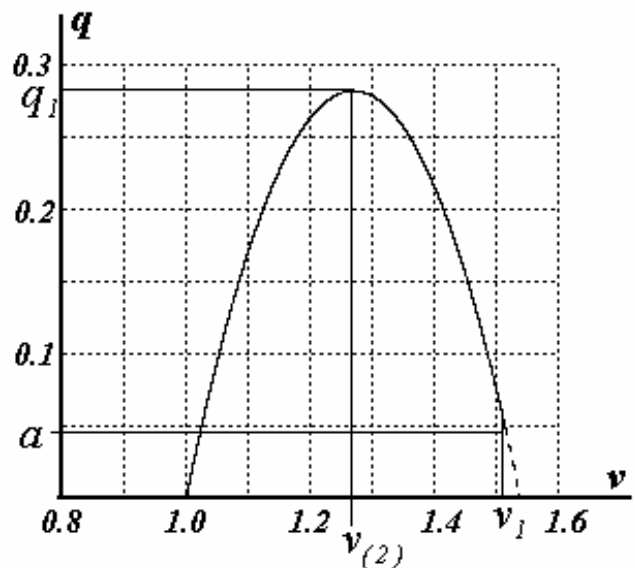
Заметим, что полную работу за цикл нельзя рассчитывать по формуле (16), так как она дает выражение для работы на участке $1 \rightarrow 2$, и не учитывает отрицательную работу по сжатию газа на обратном участке $2 \rightarrow 1$. Действительно, полагая в формуле (16) $v = v_1$, получим

$$a_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \frac{(4v_1 - 2)v_1 - v^2 - (4v_1 - 3)}{v_1 - 1} = \frac{3(v_1 - 1)}{2} \approx 0,77,$$

что значительно больше, чем ранее полученное правильное значение.

4. Теперь коэффициент полезного действия этого цикла вычисляется «по определению»

$$\eta = \frac{a}{q_1} \approx 0,17. \quad (18)$$



Замечания и комментарии.

1. Традиционный метод расчета коэффициента полезного действия заключается в определении участков, на которых рабочее тело получает и отдает теплоту, и последующему расчету этих теплот. В данном случае на одной прямой сначала происходит передача теплоты от нагревателя к рабочему телу, а затем от рабочего тела к холодильнику. Поэтому основная сложность данной задачи, определить то значение объема до которого газ получает и после которого отдает теплоту.

Заметим, что эта точка

- а) не является точкой максимальной температуры;
- б) точкой в которой теплоемкость становится отрицательной.

Эта точка есть точка касания с адиабатой.

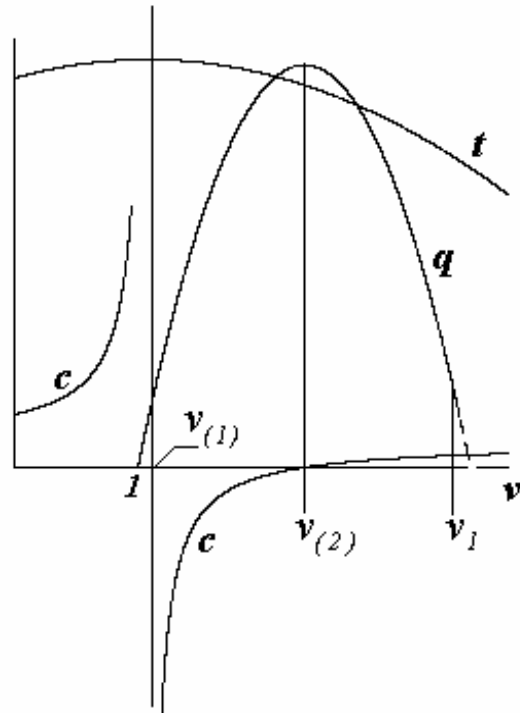
Рассмотрим различные участки этого интересного процесса подробнее, для чего на одном графике изобразим зависимости температуры, теплоемкости и количества полученной теплоты от объема (просто совместим все построенные ранее графики).

А) На участке $v < v_{(1)}$ теплоемкость положительна, температура возрастает ($c > 0, \Delta t > 0$) поэтому газ получает теплоту ($\delta q = c \Delta t > 0$).

Б) На участке $v_{(1)} < v < v_{(2)}$ теплоемкость отрицательна, но и температура уменьшается ($c < 0, \Delta t < 0$), поэтому здесь газ также получает теплоту ($\delta q = c \Delta t > 0$).

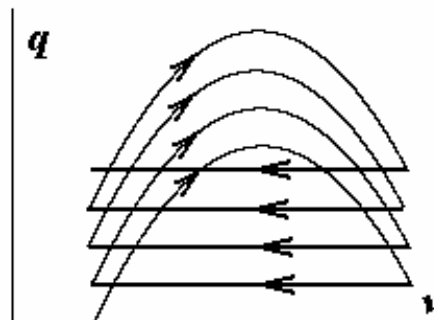
Этот участок характерен тем, что здесь газ совершает работу большую, чем полученное количество теплоты, восполняя недостаток за счет собственной внутренней энергии. Поэтому и происходит понижение его температуры.

В) На участке $v > v_{(2)}$ теплоемкость положительна, температура газа уменьшается ($c > 0, \Delta t < 0$), поэтому здесь газ отдает теплоту ($\delta q = c \Delta t < 0$).



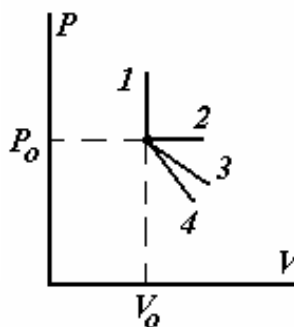
2. Особо подчеркнем, что теплота не является функцией состояния, поэтому график зависимости $q(v)$ необходимо понимать так, как оговорено в условии

q - есть количество теплоты, полученное при расширении газа, начиная от точки 1. Чтобы подчеркнуть, что теплота не является функцией состояния продолжим построение диаграммы в координатах (q, v) - адиабата изобразится прямой, параллельной оси v . Как и следовало ожидать, цикл в этих координатах не замыкается. Если нарисовать кривые, соответствующие второму, третьему прохождению цикла, то они пойдут выше.



3. Небольшой участок любого процесса можно приближенно заменить участком прямой (например, на диаграмме PV). Так на рисунке отрезки соответствуют следующим процессам (укажем также значения молярной теплоемкости для одноатомного газа):

1-изохора ($C = \frac{3}{2}R$); 2-изобара ($C = \frac{5}{2}R$); 3-изотерма ($C \rightarrow \infty$); 4-адиабата ($C = 0$). Как видите значение теплоемкости изменяется немонотонным образом.

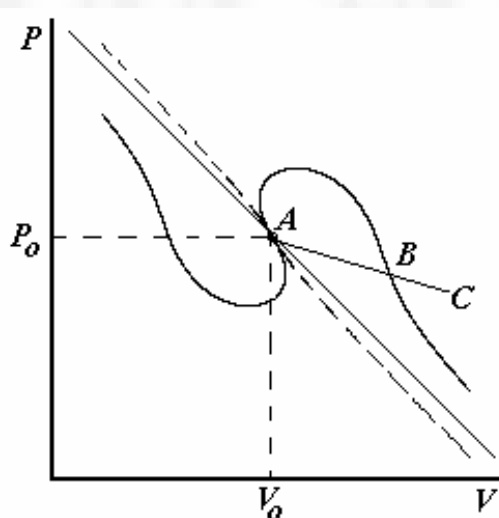


Посмотрим как изменяется теплоемкость процесса в зависимости от наклона его графика. Запишем уравнение процесса в виде $P = P_0 + k(V - V_0)$. Для него зависимость температуры от объема выражается уравнением $RT = (P_0 + k(V - V_0))V = (P_0 - kV_0)V + kV^2$.

Теплоемкость вычислим с помощью формулы (аналогичной (13), только в обычной системе единиц)

$$C = C_V + P \frac{dV}{dT} = C_V + R \frac{P_0 + k(V - V_0)}{P_0 - kV_0 + 2kV} = C_V + R \frac{P_0}{P_0 + kV_0}.$$

Предлагаю самостоятельно разобраться и проанализировать эту функцию. На рисунке приведен ее график «в полярных координатах». Так для процесса ABC теплоемкость пропорциональна длине отрезка AB . Сплошная прямая соответствует изотермическому процессу вблизи точки A , она же является асимптотой для графика теплоемкости. Пунктиром обозначены участки для которых теплоемкости отрицательны.



4. Рекомендую полностью решить исходную задачу в обычной системе единиц.

5. Решите также эту же задачу для аналогичного цикла (прямая и адиабата), если в пределах цикла объем увеличивается в два раза.

Задача 8. «Кристалл»

Рассмотрите свойства идеального кристалла с кубической решеткой, образованного одинаковыми атомами массой m . Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов в кристалле зависит от расстояния между их центрами r по закону

$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6},$$

где a, b - некоторые положительные константы. Сила взаимодействия двух атомов связана с потенциальной энергией соотношением $F = -U'_r$, где U'_r - производная энергии по r . При расчете всех характеристик можно учитывать взаимодействие атома **только** с его ближайшими соседями.

Выразите через параметры a, b, m следующие характеристики кристалла:

- 1) Плотность ρ .
- 2) Удельную теплоту сублимации (перехода из кристаллического в газообразное состояние) λ .
- 3) Модуль Юнга кристалла E .
- 4) Максимальное относительное удлинение кристалла до его разрушения ε_{np} .
- 5) Предел прочности на разрыв (максимальное механическое напряжение, который может выдержать кристалл без разрушения) - σ_{np} .
- 6) Линейный коэффициент термического расширения кристалла α .

Рекомендуем использовать приближенную формулу, справедливую при малых величинах x :

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2,$$

в которой вы можете использовать столько членов, сколько требуется в конкретной ситуации.

Решение.

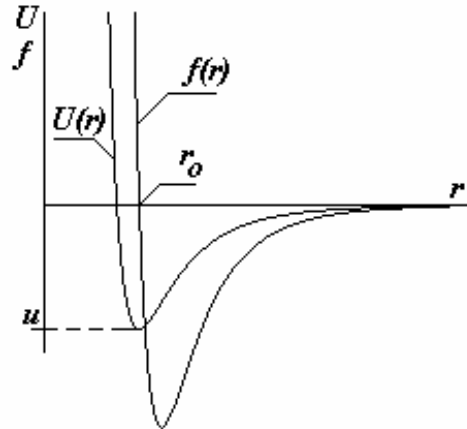
1. Вычислим силу взаимодействия между двумя атомами как функцию расстояния между ними

$$f = -U' = \frac{12a}{r^{13}} - \frac{6b}{r^7}. \quad (1)$$

Положению равновесия соответствует нулевая сила взаимодействия (или, что равносильно, минимум потенциальной энергии). Поэтому равновесное расстояние между атомами (период решетки) найдем из условия $f = 0$, из которого следует

$$r_0 = \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (2)$$

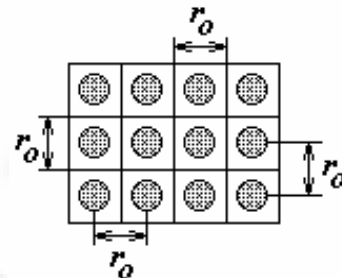
На рисунке представлены графики зависимостей потенциальной энергии $U(r)$ и силы взаимодействия $f(r)$ от расстояния между атомами. Положению равновесия соответствует точка $r = r_0$.



На один атом в кубической кристаллической решетке приходится объем r_0^3 , следовательно, плотность кристалла рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{m}{r_0^3} = m \sqrt{\frac{b}{2a}}. \quad (3)$$

Рассматриваемую кристаллическую решетку можно представить как набор плотно упакованных кубиков, в центре которых расположен атом. Если расстояния между центрами атомов равно r_0 , то и длина ребра кубика равна r_0 .



2. Вычислим энергию связи, приходящуюся на один атом. Так как атом взаимодействует с $n = 6$ ближайшими соседями, то его потенциальная энергия

$$u = \frac{n}{2} U(r_0) = -\frac{3b^2}{4a}, \quad (4)$$

где учтено, что функция $U(r)$ описывает энергию взаимодействия двух атомов. Для перехода из кристаллического в газообразное состояние нужно сообщить кристаллу энергию, необходимую для разрыва всех связей, иными словами, удельная теплота сублимации рассчитывается по формуле

$$\lambda = -\frac{u}{m} = \frac{3b^2}{4am}. \quad (5)$$

3. При отклонении атомов от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть атомы в исходное положение. При малых деформациях эта сила пропорциональна деформации. Для ее вычисления преобразуем формулу (1) при условии $r = r_0 + x$, где x - малое отклонение от положения равновесия. В ходе преобразований необходимо использовать приближенную формулу, приведенную в условии задачи с учетом членов первого порядка малости

$$f = \frac{12a}{(r_0 + x)^{13}} - \frac{6b}{(r_0 + x)^7} = \frac{12a}{r_0^{13}} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-13} - \frac{6b}{r_0^7} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-7} \approx$$

$$\approx -\frac{36b}{r_0^7} \cdot \frac{x}{r_0} \quad (6)$$

В поперечном сечении кристалла на один атом приходится площадь r_0^2 , следовательно, механическое напряжение в кристалле определяется формулой

$$\sigma = \frac{f}{r_0^2} = \frac{36b}{r_0^9} \cdot \frac{x}{r_0} = \frac{18}{\sqrt{2}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{r_0} \quad (7)$$

Сравнивая с законом Гука $\sigma = E\varepsilon$ (где $\varepsilon = x / r_0$ - относительная деформация), получим выражение для модуля Юнга

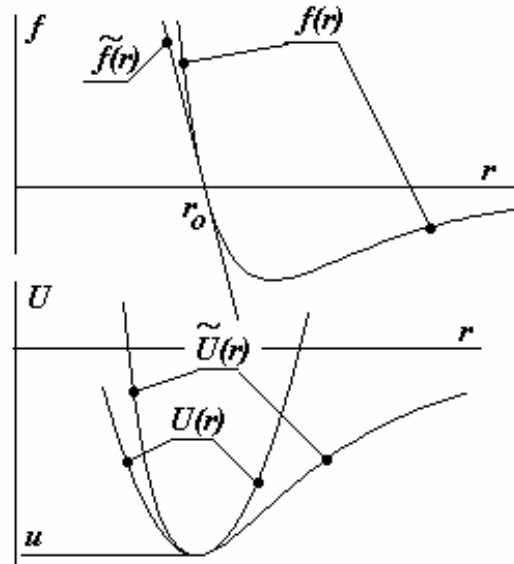
$$E = \frac{18}{\sqrt{2}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 12,7 b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

При расчете плотности и удельной теплоты сублимации анализ потенциальной кривой сводился к нахождению ее минимума. Для расчета упругих свойств кристалла при его деформации оказалось необходимым проанализировать поведение потенциальной энергии при небольших отклонениях от положения равновесия. Существенно, что мы ограничились линейным приближением при расчете возникающих сил упругости. Так точное выражение для силы взаимодействия $f(r)$, даваемое формулой (1), мы заменили его приближенным выражением $\tilde{f}(r_0 + x) \approx -kx$,

определяемым формулой (6). В этом приближении, точное выражение для потенциальной энергии $U(r)$ заменяется на квадратичное приближение

$$\tilde{U}(r_0 + x) \approx u + \frac{kx^2}{2} \quad (\text{см. рисунок}).$$

Обратите внимание, что вблизи положения равновесия отсутствуют постоянная составляющая в выражении для силы и линейный член в формуле для потенциальной энергии.



4. Сила взаимодействия между атомами принимает максимальное значение при некотором расстоянии r_l (посмотрите на график зависимости силы взаимодействия от расстояния). Если расстояние между атомами превысит r_l , то сила взаимодействия (притяжения) начнет уменьшаться и, следовательно, при постоянной внешней силе кристалл разрушится. Найдем значение r_l из условия $f' = 0$:

$$f' = -\frac{12 \cdot 13a}{r^{14}} + \frac{6 \cdot 7b}{r^8} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) находим расстояние r_l , при котором сила притяжения максимальна

$$r_l = \left(\frac{26a}{7b} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (10)$$

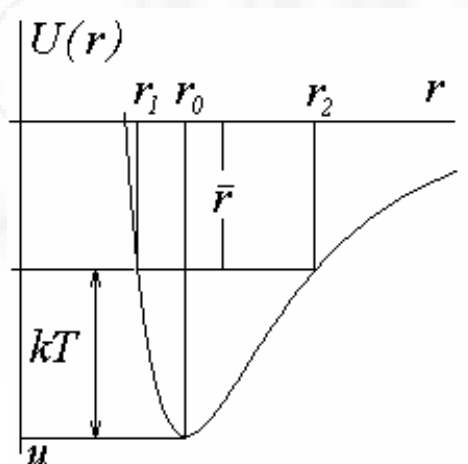
Таким образом, максимальное относительное удлинение кристалла до разрушения определяется соотношением

$$\varepsilon_{max} = \frac{r_l - r_0}{r_0} = \left(\frac{13}{7} \right)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,11. \quad (11)$$

При таком удлинении сила взаимодействия и соответствующее механическое напряжение (которое и является предельной прочностью) определяются формулой

$$\sigma_{max} = \frac{U'(r_l)}{r_0^2} = \frac{18}{13\sqrt{2}} \left(\frac{7}{13} \right)^{\frac{7}{6}} b \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 0,48b \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

5. Термическое расширение твердых тел связано с увеличением кинетической энергии колеблющихся атомов. С ростом температуры увеличивается диапазон изменения расстояний между атомами. Существенным фактором является несимметричность потенциальной кривой - максимальное отклонение от положения равновесия в большую сторону превышает отклонение в меньшую сторону. Обозначим



максимальное и минимальное расстояния между атомами в ходе колебаний r_1 и r_2 , соответственно. Тогда среднее расстояние между атомами может быть оценено как среднее арифметическое между этими величинами. Расстояния r_1 и r_2 являются корнями уравнения

$$U(r) = U(r_0) + kT, \quad (13)$$

где kT - средняя энергия одномерного колебательного движения атомов в кристаллической решетке (k - постоянная Больцмана, T - абсолютная

температура). Если обозначить $x = r^{-6}$ и принять во внимание формулу (20), то уравнение (13) примет вид

$$ax^2 - bx + \frac{b^2}{4a} - kT = 0, \quad (14)$$

корни которого находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{b}{2a} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4akT}{b^2}} \right). \quad (15)$$

Теперь можно найти значения r_1 и r_2 :

$$r_{1,2} = r_0 (1 \pm \delta)^{-\frac{1}{6}} \approx r_0 \left(1 \mp \frac{\delta}{6} + \frac{7}{72} \delta^2 \right), \quad (16)$$

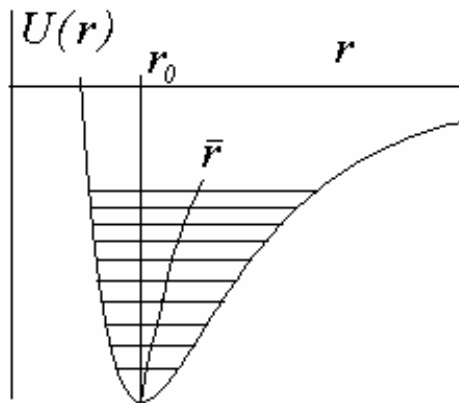
где обозначено $\delta = \sqrt{\frac{4akT}{b^2}}$ и использовано разложение степенной функции с учетом членом второго порядка малости. Среднее расстояние между атомами найдем, усредняя r_1 и r_2 :

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2} = r_0 \left(1 + \frac{7}{72} \delta^2 \right) = r_0 \left(1 + \frac{7akT}{18b^2} \right). \quad (17)$$

Сравнивая выражение (17) с формулой термического расширения $l = l_0 (1 + \alpha \Delta T)$, находим линейный коэффициент термического расширения

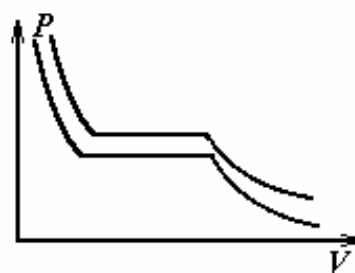
$$\alpha = \frac{7ak}{18b^2}. \quad (18)$$

Еще раз подчеркнем, что с микроскопической точки зрения, термическое расширение является следствием несимметричности потенциальной кривой. Если ограничиться квадратичным приближением, то эта несимметрия исчезает. Поэтому тепловое расширение является, по крайней мере, эффектом третьего порядка по смещению атома от положения равновесия. На рисунке показано смещение среднего расстояния между атомами с ростом температуры.



Задача 9. «Фазовые переходы»

На рисунке изображены две изотермы вещества, совершающего фазовый переход газ-жидкость, соответствующие двум очень близким температурам T и $T + \Delta T$. Рассмотрите цикл Карно между горизонтальными участками изотерм.



1. Покажите, что уравнение (которое называется уравнением Клапейрона-Клаузиуса), связывающее изменение давления насыщенных паров ΔP изменением температуры ΔT имеет вид

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{q}{T(V_1 - V_2)};$$

где обозначено: q - удельная теплота перехода, V_1 и V_2 - удельные объемы газовой и жидкой фаз, соответственно.

2. Считая изменения ΔP и ΔT бесконечно малыми, полагая q независимым от температуры, $V_2 \ll V_1$, считая пар идеальным газом, найдите зависимость давления насыщенных паров воды от температуры.

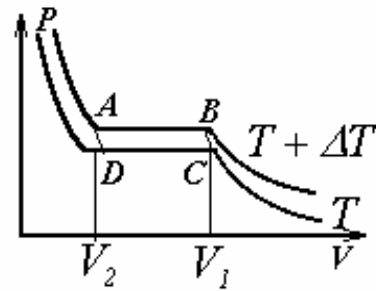
3. Представьте полученную зависимость в таких координатах, чтобы она была линейной. В таблице задана зависимость давления p насыщенных паров воды от температуры t . Используя все приведенные данные, найдите удельную теплоту парообразования воды.

$t, ^\circ\text{C}$	10	20	30	50	80	100
$p, \text{Па}$	1226	2333	4240	12330	47343	101325

4. Воспользуйтесь полученным в пункте 1 уравнением для описания фазового перехода жидкость - твердое тело. Найдите на сколько надо изменить давление, чтобы температура замерзания льда изменилась на один градус. Удельная теплота плавления льда равна $332 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$.

Решение.

1. «Замкнем» цикл двумя адиабатами AD и BC , проходящими через концы горизонтальных участков изотерм. Будем считать, что масса рабочего тела равна единице. Коэффициент полезного действия цикла Карно не зависит от рода рабочего тела и определяется формулой ³



$$\eta = \frac{\Delta T}{T}, \quad (1)$$

с другой стороны, по определению, КПД равен отношению работы A , совершенной за цикл, к количеству полученной теплоты Q . В рассматриваемом цикле количество полученной теплоты на участке AB равно удельное теплоте парообразования q , а работа совершенная в цикле равна ⁴ $A = \Delta P(V_1 - V_2)$, поэтому

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\Delta P(V_1 - V_2)}{q}. \quad (2)$$

Приравняв два выражения для КПД, получаем требуемое уравнение Клапейрона-Клаузиуса

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{q}{T(V_1 - V_2)}. \quad (3)$$

2. Переходя к бесконечно малым приращениям и пренебрегая объемом жидкости, получим уравнение

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{TV_1}. \quad (4)$$

Удельный объем газа выразим из уравнения состояния идеального газа

$PV_1 = \frac{RT}{M}$, (где M - молярная масса газа, напоминая, мы рассматриваем

единицу массы газа) $V_1 = \frac{RT}{PM}$ и подставим в уравнение (4) -

$$\frac{dP}{dT} = \frac{qPM}{RT^2}. \quad (5)$$

Чтобы решить это уравнение «разделим переменные»:

³ строго говоря, в знаменателе необходимо поставить температуру «нагревателя» $T + \Delta T$, но так как мы рассматриваем две очень близкие изотермы, то считаем, что $\Delta T \ll T$.

⁴ Мы опять пользуемся близостью изотерм.

$\frac{dP}{P} = \frac{qM}{R} \cdot \frac{dT}{T^2}$ и проинтегрируем $\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \frac{qM}{R} \cdot \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2}$. Здесь P_0 - значение давления насыщенных паров при некоторой температуре T_0 . В результате интегрирования получим

$$\ln \frac{P}{P_0} = \frac{qM}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \quad (6)$$

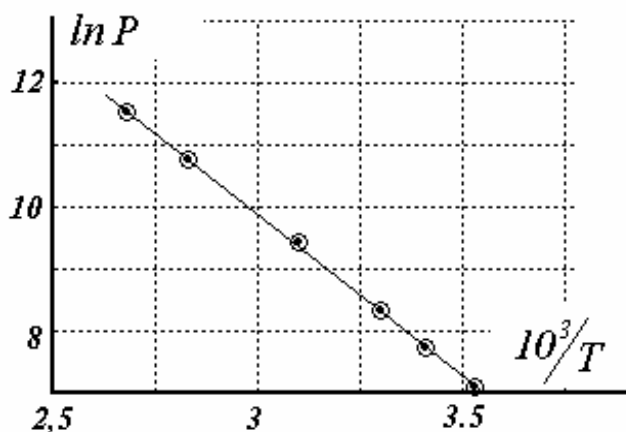
Теперь можно выразить явную зависимость давления насыщенных паров от температуры

$$P = P_0 \exp \left(\frac{qM}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right) = C \exp \left(- \frac{qM}{RT} \right) \quad (7)$$

3. Как видно из уравнений (6), (7), исследуемая зависимость будет линейной, если ее представить в виде функции⁵ $\ln P$ от $1/T$. Тогда $\ln P = b - a \cdot \frac{1}{T}$,

где $a = \frac{qM}{R}$, b - некоторая константа, зависящая от параметров задачи и их размерностей. Дополним заданную в условии таблицу необходимыми расчетными величинами

$t, ^\circ C$	10	20	30	50	80	100
$10^3 / T$	3,53	3,41	3,30	3,10	2,83	2,68
$p, \text{Па}$	1226	2333	4240	12330	47343	101325
$\ln P$	7,11	7,75	8,35	9,42	10,77	11,53



Нанесем полученные значения на график. Хорошо видно, что точки почти точно ложатся на прямую линию, следовательно, сделанные допущения вполне обоснованы.

Значение коэффициента a можно вычислить из графика, как отношение $\frac{\Delta(\ln P)}{\Delta(1/T)} \approx 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}$,

однако предпочтительнее, да и точнее

⁵ Использование логарифма от размерной величины может вызвать обоснованное удивление, конечно,

лучше использовать выражение $\ln \frac{P}{P_0}$, однако, используемое здесь выражение $\ln p$ отличается только

постоянным слагаемым. Так как нас интересует наклон графика, то эта аддитивная добавка не оказывает влияния на дальнейшие расчеты.

рассчитать его, используя метод наименьших квадратов⁶. Воспользуемся методикой расчета, описанной в Приложении 1.

№	$x = \frac{10^3}{T}$	$y = \ln P$
1	3,53	7,11
2	3,41	7,75
3	3,30	8,35
4	3,10	9,42
5	2,83	10,77
6	2,68	11,53

$$\langle x \rangle = \frac{\sum x_k}{N} \approx 3,142; \quad S_x^2 = \frac{\sum x_k^2}{N} - \langle x \rangle^2 \approx 9,331 \cdot 10^{-2};$$

$$\langle y \rangle = \frac{\sum y_k}{N} \approx 9,155; \quad S_y^2 = \frac{\sum y_k^2}{N} - \langle y \rangle^2 \approx 2,521;$$

$$R_{xy} = \frac{\sum x_k y_k}{N} - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle \approx -0,4849;$$

$$a = \frac{R_{xy}}{S_x^2} \approx -5,197; \quad \Delta a = 2 \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{S_y^2}{S_x^2} - a^2 \right)} \approx 0,086.$$

Окончательный результат расчета параметра имеет вид (с учетом множителя 10^3)

$$a = (-5,20 \pm 0,09) \cdot 10^3 \text{ K}.$$

Теперь из формулы $a = \frac{qM}{R}$ можно вычислить значение удельной теплоты парообразования воды

$$q = \frac{aR}{M} = (2,40 \pm 0,04) \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

Заметим, что удельная теплота парообразования слегка зависит от температуры, поэтому найденное значение следует рассматривать как среднее в заданном диапазоне температур.

4. Для описания фазового перехода твердое тело-жидкость (плавления) можно воспользоваться следующими приближениями:

- считать удельную теплоту перехода независимой от температуры;
- считать удельные объемы твердой и жидкой фаз постоянными, не зависящими от давления и температуры.

В рамках этих приближений уравнение перехода имеет вид

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(1/\rho_1 - 1/\rho_2)}, \quad (8)$$

⁶ Подробнее о методе наименьших квадратов и его реализации на калькуляторе описано в Приложении 1.

где ρ_1, ρ_2 - плотности воды и льда, соответственно. Так как изменение температуры мало, то можно записать

$$\Delta P = \frac{q}{(1/\rho_1 - 1/\rho_2)} \cdot \frac{\Delta T}{T} \approx 11 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

При расчетах мы воспользовались табличными данными для плотностей воды и льда, а также положили $\Delta T = -1 \text{ К}$, $T = 273 \text{ К}$. Обратите внимание на величину давления - более ста атмосфер!

Заметим, что для большинства веществ с увеличением давления температура плавления повышается. Однако, для некоторых веществ, которые при плавлении уменьшают свой объем (лед, висмут, галлий), увеличение давления приводит к понижению температуры плавления.

Точное решение уравнения (8) можно получить методом разделения переменных

$$dP = \frac{q}{(1/\rho_1 - 1/\rho_2)} \cdot \frac{dT}{T};$$

$$\int dP = \frac{q}{(1/\rho_1 - 1/\rho_2)} \int \frac{dT}{T};$$

$$P = P_0 + \frac{q}{(1/\rho_1 - 1/\rho_2)} \cdot \ln \frac{T}{T_0}$$

Обратите внимание, как слабо изменяется температура плавления при изменении давления, особенно если сравнить с изменением температуры кипения при изменении давления.

Слободянюк А.И.
«Очень длинные физические задачи»

Часть 2.
Задачи 10 – 18.

Содержание:

Задача 10. «Барометрическая формула и прыгающий шарик»	3
Задача 11. «Проводники и диэлектрики».....	8
Задача 12 «Почти бесконечная цепочка».....	23
Задача 13. «Как гроб Магомета»	32
Задача 14. «Перемишка на рельсах»	37
Задача 15. «Фокусировка»	41
Задача 16.	48
Задача 17.....	56
Задача 18.....	63



Задача 10. «Барометрическая формула и прыгающий шарик»

При постоянной температуре T зависимость давления газа P от высоты h , определяется барометрической формулой

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}},$$

где μ - молярная масса газа, g - ускорение свободного падения, R - газовая постоянная.

Молярную массу воздуха принять равной $\mu = 0,029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

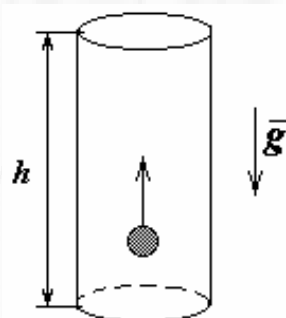
1. Оцените высоту, на которой давление воздуха уменьшается на 1%, если температура воздуха постоянна и равна $t = 0^\circ \text{C}$.

2. В очень высоком вертикальном цилиндрическом закрытом сверху сосуде с площадью основания S находится воздух, масса которого равна m . Найдите зависимость давления газа на дно сосуда от высоты сосуда и от температуры газа.

Рассмотрите два предельных случая а) $\mu g h \gg RT$; б) $\mu g h \ll RT$. Дайте физическое объяснение полученным результатам.

Постройте семейства графиков зависимостей давления газа на дно сосуда от температуры (для нескольких значений высоты сосуда h) и от высоты сосуда (при различных значениях температуры T).

В качестве наглядной модели газа часто рассматривают множество маленьких жестких шариков, хаотически движущихся в некотором сосуде. В дальнейшем рассмотрим поведение упругого шарика движущегося вертикально в закрытом сосуде, находящемся в поле тяжести Земли. Столкновения шарика с дном и верхней крышкой сосуда будем считать абсолютно упругими. Будем изучать среднюю силу давления шарика на дно сосуда, причем будем полагать, что усреднение проводится по промежутку времени, значительно превышающему время между двумя последовательными ударами шарика.



3. Найдите зависимость силы давления шарика на дно сосуда от его высоты h и его скорости v_0 у дна сосуда.

Рассмотрите предельные случаи а) $mgh > \frac{mv_0^2}{2}$; б) $mgh < \frac{mv_0^2}{2}$. Постройте семейства

зависимостей силы давления от высоты сосуда (при постоянной v_0) и от квадрата скорости v_0^2 (при постоянной высоте сосуда h).

4. Рассмотрите «адиабатный» процесс уменьшения высоты сосуда с прыгающим шариком. Пусть крышка сосуда медленно опускается, найдите зависимость силы давления шарика на дно от высоты сосуда. Определите «показатель» адиабаты для этой системы. Дайте объяснение полученному результату.

Решение.

1. Так как изменение давления является малой величиной, то отношение $\frac{\mu gh}{RT} \ll 1$, поэтому барометрическую формулу можно заменить упрощенным выражением

$$P = P_o e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \approx P_o \left(1 - \frac{\mu g}{RT} h\right), \quad (1)$$

из которого следует

$$\frac{\Delta P}{P_o} = \frac{P_o - P_o}{P_o} = -\frac{\mu g}{RT} h,$$

или

$$h = \frac{\Delta P}{P_o} \cdot \frac{RT}{\mu g} \approx 80 \text{ м}. \quad (2)$$

2. Мы знаем зависимость давления от высоты, но в формуле осталось неопределенным давление на дно сосуда P_o . Для того, что бы получить выражение для давления P_o , воспользуемся условием равновесия центра тяжести - разность сил давления на нижнюю P_o и верхнюю P_1 стенки сосуда равна весу всего газа:

$$P_o - P_1 = \frac{mg}{S}. \quad (3)$$

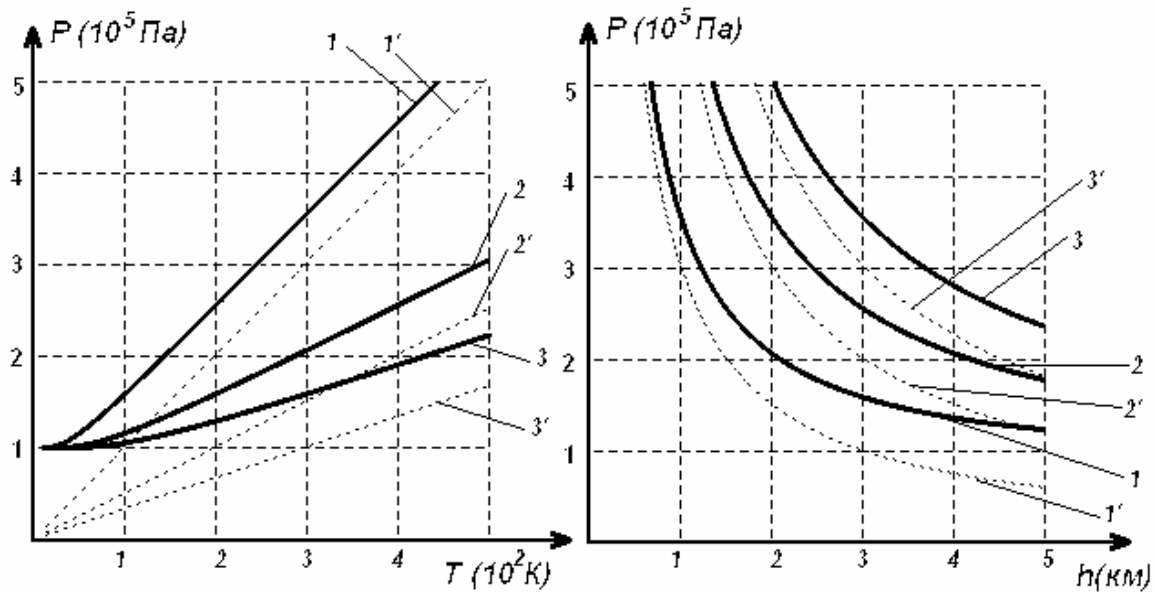
Давление P_1 связано с P_o барометрической формулой, комбинируя которое с последним выражением, найдем

$$P_o = \frac{mg}{S(1 - e^{-\frac{\mu gh}{RT}})}. \quad (4)$$

При очень больших высотах $\mu gh \gg RT$ можно пренебречь экспонентой и тогда $P_o = \frac{mg}{S}$. В этом случае давление газа на верхнюю грань сосуда становится пренебрежимо малым, поэтому сила давления на дно сосуда равна весу газа.

В другом крайнем случае $\mu gh \ll RT$ экспоненту можно заменить ее приближенным значением $e^{-x} \approx 1 - x$ и тогда $P_o = \frac{mRT}{\mu Sh}$, или $P_o V = \frac{m}{\mu} RT$. В этом приближении можно не учитывать силу тяжести, поэтому параметры газа подчиняются уравнению состояния Менделеева - Клапейрона.

Графики зависимости давления на дно сосуда от его высоты (при постоянной температуре) и от температуры (при постоянной высоте) показаны на рисунке.



Зависимости давления на дно сосуда от температуры (1 - $h=3$ км, 2- $h=6$ км, 3- $h=9$ км); и от высоты сосуда (1- $T=100\text{К}$, 2- $T=200\text{К}$, 3- $T=300\text{К}$), рассчитанные по формуле (4). Пунктирные кривые - те же зависимости, рассчитанные по уравнению Менделеева-Клапейрона.

Наиболее существенная особенность этих зависимостей наблюдается при больших значениях отношения $\frac{\mu gh}{RT}$, потому что в этом случае влияние силы тяжести становится существенным.

3/ Обозначим скорости шарика у дна сосуда v_0 , а у верхней стенки - v_1 . Будем искать среднюю силу давления шарика, усредняя по промежуткам времени значительно большими, чем время между двумя ударами.

Найдем время τ между двумя ударами шарика о дно сосуда. На основании закона сохранения энергии можем записать

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gh. \quad (5)$$

Если $v_0^2 < 2gh$, то шарик не долетит до верхней стенки сосуда, тогда время его полета

$$\tau = 2 \frac{v_0}{g}, \quad (6)$$

при $v_0^2 > 2gh$ шарик ударится о верхнюю стенку и время его полета можно рассчитать по формуле

$$\tau = 2 \frac{v_0 - v_1}{g} = 2 \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \quad (7)$$

Если $v_0^2 \gg 2gh$, то последнее выражение можно упростить, используя приближенную формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$:

$$v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh} = v_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}\right) \approx \frac{gh}{v_0}$$

тогда $\tau = 2 \frac{h}{v_0}$, что совпадает с

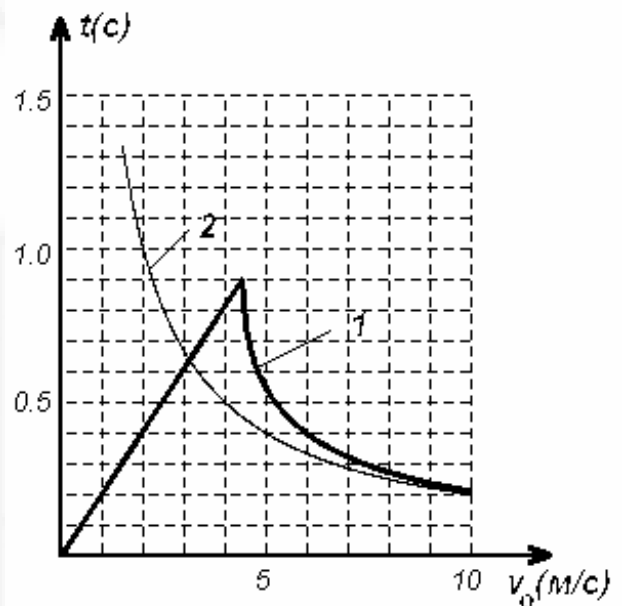
формулой (6). Подумайте почему?

На рисунке 2 изображен график зависимости времени полета шарика от его скорости у дна сосуда. Как видно, действительно зависимость меняется от прямо пропорциональной до обратно пропорциональной.

Теперь запишем силу давления на дно сосуда по стандартной методике $F = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{2mv_0}{\tau}$.

При $v_0^2 < 2gh$, $F = mg$; (8)

при $v_0^2 > 2gh$, $F = \frac{mg}{1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}}$. (9)

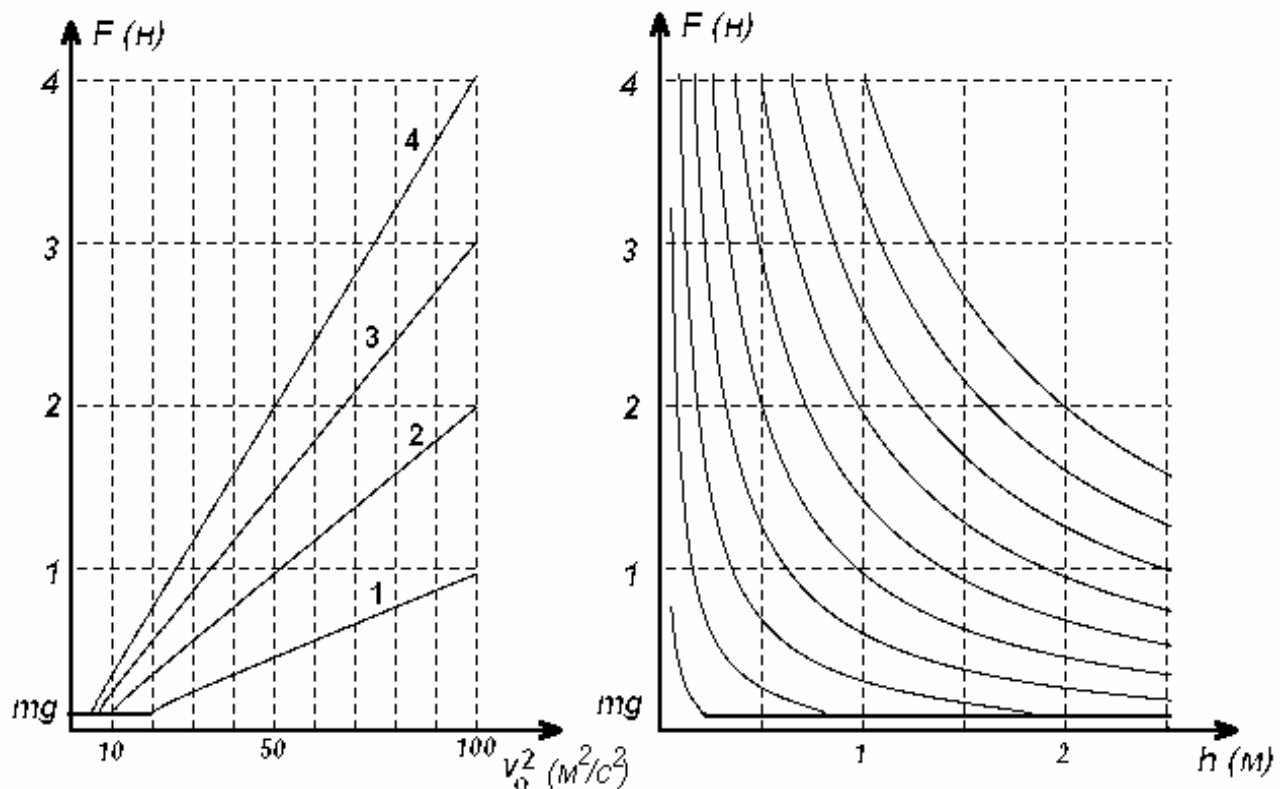


Зависимость времени полета от начальной скорости. 1 - по формуле (10); 2- по приближенной формуле (5). ($h=1.0$ м)

Вот такое «уравнение состояния» получается для «газа» из одного шарика. При $v_0^2 \gg 2gh$ из (9) следует

$$F = \frac{mv_0^2}{h} \quad (10)$$

полный аналог уравнения состояния идеального газа.



Зависимости средней силы давления шарика на дно сосуда от квадрата скорости (1- $h=1.0m$, 2- $h=0.5m$, 3- $h=0.33m$, 4 - $h=0.2m$); от высоты сосуда (при скоростях, 2, 4, 6...20 м/с). $m=10g$

На рисунке 3 представлены зависимости силы давления F от h (аналог зависимости давления от объема) и от v_0^2 (аналог температуры).

Итак, мы получили выражение для средней силы давления прыгающего шарика на дно сосуда. Она отличается от веса шарика. Ну а как же объяснить в этом случае утверждение - если центр тяжести системы не изменяет своего положения, то сумма внешних сил, действующих на систему равно нулю? Это положение справедливо и здесь! Не забудьте, шарик ударяется и о верхнюю крышку сосуда, действует на нее с некоторой силой, следовательно, и крышка действует с той же силой на шарик. Эту силу F_1 можно вычислить аналогично:

$$F_1 = \frac{2mv_1}{g}.$$

Найдем разность сил, действующих на шарик со стороны дна и со стороны крышки,

$$F_0 - F_1 = \frac{2m(v_0 - v_1)}{\tau},$$

но $\frac{2(v_0 - v_1)}{\tau} = g$ (из простых кинематических рассуждений), поэтому, как и следовало ожидать, $F_0 - F_1 = mg$.

4. Пусть крышка сосуда, медленно двигаясь со скоростью u ($u \ll v$), опустилась на малую высоту Δh за время $\Delta t = \Delta h / u$. При абсолютно упругом встречном ударе шарика о движущуюся крышку его скорость возрастает на

величину $\Delta v = 2u$. Полагая изменение скорости малым, можно приближенно считать, что время между ударами остается постоянным и равным $\tau = 2h / v$, тогда число ударов $n = \Delta t / \tau = v\Delta h / 2hu$. Таким образом, изменение скорости шарика связано с изменением высоты сосуда соотношением

$$\Delta v = n \cdot 2u = -\frac{v\Delta h}{h},$$

или

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta h}{h}. \quad (11)$$

Знак минус указывает, что при уменьшении высоты скорость шарика возрастает. Из уравнения (21) непосредственно следует, что

$$vh = v_0 h_0 = \text{const} \quad (12)$$

Воспользуемся теперь формулой (10), которая здесь полностью применима, так как мы пренебрегаем действием силы тяжести, получим

$$F = \frac{mv^2}{h} = \frac{m(v_0 h_0)^2}{h^3}.$$

Последнее уравнение записывается в виде

$$Fh^3 = \text{const},$$

которое и является уравнением адиабаты, правда, с несколько необычным показателем $\gamma = 3$. Однако, и газ у нас необычный! Идеальный газ, молекулы которого имеют одну степень свободы, согласно общей теории имеет молярную теплоемкость $C_V = R / 2$, тогда по уравнению Майера теплоемкость $C_P = C_V + R = 3 / 2 \cdot R$. Поэтому показатель адиабаты такого газа $\gamma = C_P / C_V = 3$, что полностью соответствует полученному результату.

Задача 11. «Проводники и диэлектрики»

1. Электростатическое поле создается двумя точечными зарядами, находящимися на расстоянии l друг от друга. Величины и знаки зарядов различны и равны q_1 и $-q_2$. Покажите, что поверхность нулевого потенциала этого поля представляет собой сферу, найдите ее радиус.

2. Точечный заряд q расположен на расстоянии l от центра металлической заземленной сферы радиуса R . Найдите:

- суммарный индуцированный заряд сферы;
- силу взаимодействия заряда и сферы.

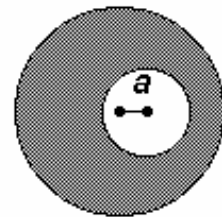
3. Точечный заряд q расположен на расстоянии l от центра металлической изолированной сферы радиуса R . Найдите:

- индуцированный дипольный момент сферы;
- силу взаимодействия заряда и сферы.

4. Точечный заряд q находится на расстоянии h от бесконечной плоской проводящей пластины. Найдите

- распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на пластине;
- силу взаимодействия заряда и пластины;
- энергию взаимодействия заряда и пластины;

5. Внутри равномерно заряженного шара с объемной плотностью заряда ρ вырезана сферическая полость, центр которой находится на расстоянии a от центра шара. Найдите напряженность электрического поля в полости.



6. Металлический шарик радиуса r помещен в однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}$. Найдите:

- распределение поверхностной плотности зарядов на шарике;
- индуцированный дипольный момент шарика.

7. «Газ» состоит из одинаковых металлических шариков радиуса r , концентрация которых равна n . Среднее расстояние между шариками значительно больше их радиусов. Найдите диэлектрическую проницаемость такого «газа».

Указание. Воспользуйтесь соотношением $\epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, где $\vec{P}$ - поляризация среды (дипольный момент единицы объема).

Диэлектрическая проницаемость воздуха при нормальных условиях равна $\epsilon = 1,00058$. Оцените средний размер молекул воздуха.

8. Точечный заряд q находится на расстоянии h от бесконечной плоской границы с бесконечным диэлектриком с проницаемостью ϵ . Найдите

- распределение поверхностной плотности поляризационных зарядов на пластине;
- силу взаимодействия заряда и пластины.

9. Шар радиуса r , изготовленный из диэлектрика с проницаемостью ϵ , помещен в однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}$. Найдите:

- распределение поверхностной плотности зарядов на шарике;
- индуцированный дипольный момент шарика.

10. Небольшой шарик радиуса r , изготовленный из диэлектрика с проницаемостью ε , находится на большом расстоянии l ($l \gg r$) от точечного заряда q . Найдите силу, действующую на шарик со стороны заряда.

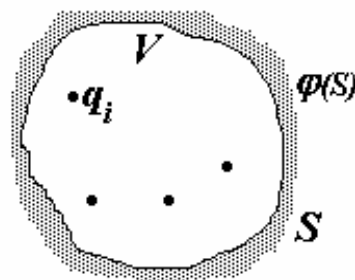
Решение.

Предисловие.

Решение этого комплекта задач сводится к использованию метода изображений. Изложим кратко суть и дадим обоснование этого метода.

Пусть в некоторой области пространства V , ограниченной поверхностью S (в частном случае граница области может простирается до бесконечности), задано распределение зарядов q_i . Электрическое поле в выделенной области определяется однозначно, если

- задано распределение зарядов внутри этой области;
- задано распределение потенциала на границе области.

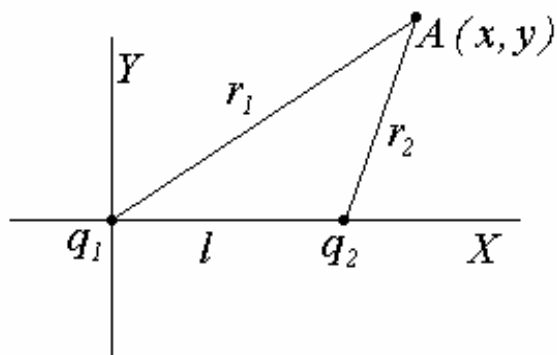


Заметим, что на границе области могут существовать заряды, однако даже при неизвестном их распределении, задание потенциала на границе однозначно определяет поле внутри области. Поэтому две различные задачи, но с одинаковыми распределениями зарядов внутри области и одинаковыми потенциалами на границе имеют внутри области одинаковые решения. Иногда при неизвестном распределении индуцированных зарядов на границе удастся подобрать такое распределение зарядов вне рассматриваемой области, что для нового распределения оказываются выполненными граничные условия исходной задачи. В этом случае дополнительные заряды называются зарядами-изображениями. Поиск изображений имеет смысл вести тогда, когда новая задача оказывается проще исходной и имеет простое решение.

Помимо задания распределения потенциала, в качестве граничных условий могут использоваться и некоторые другие, например, значение напряженности поля. Формулировке граничных условий, по этой причине уделяется серьезное внимание в курсе электродинамики.

1. Выберем систему координат, так чтобы заряд q_1 находился в начале координат, а заряд q_2 на оси X .

Так задача обладает осевой симметрией, то достаточно показать, что в плоскости XY линия нулевого потенциала является окружностью. Запишем выражение для потенциала электростатического поля в произвольной точке A с координатами (x, y)



$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right). \quad (1)$$

Полагая $\varphi = 0$, получим уравнение, определяющее линию нулевого потенциала:

$$\frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} = 0. \quad (2)$$

Обозначим $\frac{q_2}{q_1} = k$ и преобразуем уравнение (2):

$$\begin{aligned} \frac{l}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= -\frac{k}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}}; \\ (x-l)^2 + y^2 &= k^2(x^2 + y^2); \\ \left(x + \frac{l}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= \frac{k^2 l^2}{(k^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее уравнение и есть уравнение окружности радиуса

$$R = \frac{kl}{k^2 - 1} \quad (4)$$

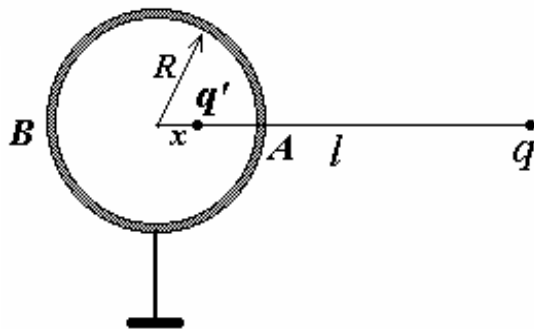
с центром в точке, лежащей на оси X с координатой $x_c = -\frac{l}{k^2 - 1}$.

Заметим, что существенно, что заряды должны иметь разные знаки, иначе уравнение (2) не будет являться уравнением окружности, кроме того, необходимо, чтобы величины зарядов различались ($k \neq 1$).

При $k = 1$ из уравнений (3) следует уравнение нулевого потенциала $x = \frac{l}{2}$, которое описывает плоскость, проходящую посередине между одинаковыми точечными зарядами.

2. На поверхности металлической заземленной сферы возникнут индуцированные заряды, распределение которых заранее не известно, однако потенциал сферы равен нулю. В предыдущем разделе мы показали, что поле двух точечных зарядов имеет в качестве поверхности нулевого потенциала сферу. Теперь мы можем использовать этот результат.

Для этого необходимо внутри сферы построить заряд изображение q' , такой, чтобы поле двух точечных зарядов имело нулевой потенциал на поверхности сферы. В этом случае вне сферы поле двух точечных зарядов q, q' и поле, создаваемое зарядом q и



зарядами, индуцированными на поверхности металлической сферы, будут

одинаковыми. (Вне сферы распределения зарядов одинаковы, на границе - одинаковые граничные условия).

Для определения величины заряда-изображения q' и его положения можно, конечно, воспользоваться полученным ранее уравнением, однако проще потребовать выполнения условия $\varphi = 0$ в двух точках сферы A и B :

$$\begin{aligned} \frac{q}{l-R} &= -\frac{q'}{R-x}, \\ \frac{q}{l+R} &= -\frac{q'}{R+x} \end{aligned} \quad (5)$$

Решив эту систему относительно неизвестных q' и x , получим

$$q' = -q \frac{R}{l}; \quad x = \frac{R^2}{l}. \quad (6)$$

Таким образом, поле вне сферы эквивалентно полю двух точечных зарядов. Внутри сферы эти поля, конечно же, различаются.

Для определения суммарного индуцированного заряда воспользуемся теоремой Гаусса. Окружим сферу замкнутой поверхностью. По теореме Гаусса, поток вектора напряженности электрического поля через эту поверхность равен суммарному заряду внутри поверхности, деленному на ϵ_0 . Так поле индуцированных зарядов эквивалентно полю заряда изображения, то и суммарный индуцированный заряд равен величине заряда-изображения.

Еще раз подчеркнем - вне сферы поля эквивалентны, но это не значит, что индуцированные заряды концентрируются в одной точке - они распределены по поверхности сферы.

Силу взаимодействия между сферой и точечным зарядом можно найти как силу взаимодействия между двумя точечными зарядами q, q' :

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(l-x)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Rl}{(l^2 - R^2)^2}. \quad (7)$$

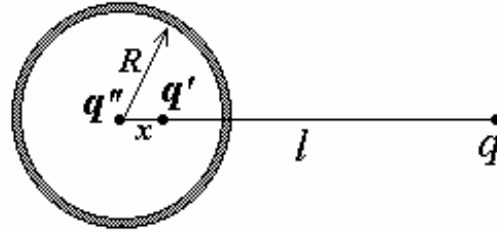
Заметим, что при $l \gg R$ формула (7) дает

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{l^3}, \quad (8)$$

то есть сила убывает обратно пропорционально кубу расстояния.

3. Если сфера не заземлена, то потенциал ее отличен от нуля, но по-прежнему постоянен. Однако, для изолированной сферы суммарный индуцированный заряд равен нулю - в поле точечного заряда произойдет перераспределение зарядов по поверхности сферы. Мы можем легко добиться выполнения граничных условий, поместив в центр шара еще один заряд-изображение $q'' = -q'$. В этом случае эквипотенциальность сферы не нарушится, а ее суммарный заряд останется равным нулю.

Итак, вне сферы поле, создаваемое точечным зарядом q и индуцированными зарядами на поверхности, эквивалентно полю трех точечных зарядов q, q', q'' .



Индуцированный дипольный момент сферы равен дипольному моменту двух зарядов-изображений

$$d = q'x = q \frac{R^3}{l^2}. \quad (9)$$

Сила, действующая на заряд q , также легко вычисляется

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(l-x)^2} + \frac{qq''}{4\pi l^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^3(2l^2 - R^2)}{l^3(l^2 - R^2)^2}. \quad (10)$$

При $l \gg R$ сила взаимодействия

$$F = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{l^5}, \quad (11)$$

убывает обратно пропорционально пятой степени расстояния.

Замечания.

1. Можно вычислить потенциал сферы, не рассчитывая распределения зарядов на поверхности. По принципу суперпозиции, потенциал центра сферы равен сумме потенциалов заряда q и индуцированных зарядов на поверхности сферы. Все индуцированные заряды находятся на одном и том же расстоянии от центра и их сумма равна нулю, следовательно, равен нулю и потенциал, создаваемый ими в центре сферы. Поэтому потенциал в центре сферы, а, следовательно, и в любой ее точке, равен потенциалу поля точечного заряда $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l}$.

2. Перепишем формулу для индуцированного дипольного момента сферы (9) в виде

$$d = q \frac{R^3}{l^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \epsilon_0 (4\pi R^3) \quad (12)$$

и сравним ее с общим выражением для индуцированного дипольного момента

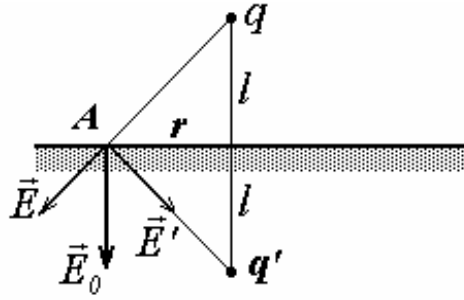
$d = \alpha \epsilon_0 E$ (α - называется поляризуемостью и имеет размерность объема, E - напряженность внешнего электрического поля). Видим, что поляризуемость проводящей сферы и шара равна утроенному объему.

4. Построение заряда изображения в плоской проводящей пластине широко известно. Достаточно расположить заряд-изображение равный по величине и противоположный по знаку исходному и симметрично ему и граничные условия ($\varphi = 0$ на поверхности пластины будут выполнены).

Напряженность поля у границы $\vec{E}_0$ можно рассчитать по принципу суперпозиции как сумму полей, создаваемых исходным зарядом $\vec{E}$ и его изображением $\vec{E}'$:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}' + \vec{E}.$$

Суммарный вектор направлен перпендикулярно границе и равен



$$E = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)} \cos \alpha = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (13)$$

здесь r расстояние от основания перпендикуляра из заряда на плоскость пластины до рассматриваемой точки. Поверхностная плотность заряда у поверхности проводника связана с напряженностью поля соотношением $\sigma = \epsilon_0 E$, поэтому распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на пластине осесимметрично и имеет вид

$$\sigma = \frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (14)$$

Заметим, что такое распределение поверхностных зарядов создает в верхнем полупространстве такое же поле, как и поле точечного заряда q' . Ввиду явной симметрии такое же поле возникает и в нижней половине (то есть поле заряда q' , расположенного в той же точке, что и исходный заряд q). Это поле индуцированных зарядов складывается с полем исходного заряда, поэтому и оказывается, что в нижнем полупространстве поле равно нулю, как и должно быть внутри проводника.

Сила взаимодействия заряда и пластины равна силе взаимодействия зарядов q и q' :

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}. \quad (15)$$

Энергия взаимодействия равна половине (!) энергии взаимодействия зарядов q и q' . Заметьте, что две задачи (заряд и пластина - два заряда) эквивалентны только в верхнем полупространстве. Реально поле существует только в верхней половине пространства. Так энергия взаимодействия есть энергия поля, то и энергия взаимодействия будет в два раза меньше. Поэтому

$$W = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}. \quad (16)$$

Замечания.

1. Этот же результат для энергии взаимодействия получается, если вычислить энергию взаимодействия, как работу, которую необходимо совершить, чтобы унести заряд на бесконечность

$$W = \int_l^{\infty} \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2} dl.$$

Еще одно интересное, на мой взгляд, пояснение, почему энергия взаимодействия уменьшается в два раза. При двух реальных точечных зарядах при перемещении одного из них второй остается неподвижным. Если же уносить заряд от проводящей границы, то его изображение также удаляется.

2. Интересно отметить, что переход к плоской границе можно осуществить, используя полученное ранее решения для заземленной сферы. Для этого заменим расстояние до центра сферы l расстоянием до ее поверхности $h = l - R$, то есть, положим $l = h + R$ и в формулах (6),(7) устремим радиус сферы к бесконечности (сфера бесконечного радиуса есть плоскость).

Тогда получим все формулы, соответствующие взаимодействию точечного заряда и плоскости:

$$q' = -q \frac{R}{l} = -q \frac{R}{R+h} \rightarrow -q;$$

$$R - x = R - \frac{R^2}{l} = R - \frac{R^2}{R+h} = \frac{Rh}{R+h} \rightarrow h;$$

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Rl}{(l^2 - R^2)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R(R+h)}{((R+h)^2 - R^2)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R(R+h)}{(2Rh + h^2)^2} \rightarrow \\ \rightarrow -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}$$

Обратный переход от плоскости к сфере невозможен. Иными словами, «уйти на бесконечность легко, вернуться трудно!»

5. Найдем напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара. На расстоянии r от центра шара напряженность поля определяется только зарядами, находящимися от центра на расстоянии не больше r (внешние слои не создают поле внутри). Поле сферически симметричного распределения зарядов совпадает с полем точечного заряда, поэтому напряженность электрического поля внутри сферы рассчитывается по формуле

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0},$$

учитывая направление поля, данное соотношение можно записать в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}, \quad (17)$$

где $\vec{r}$ - вектор, соединяющий центр сферы и точку наблюдения.

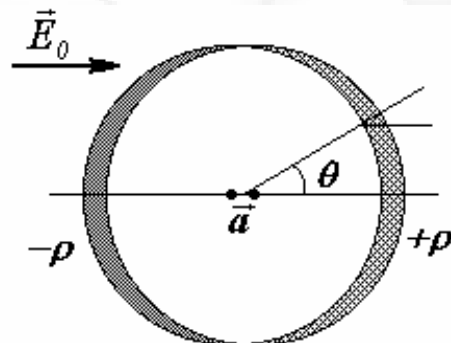
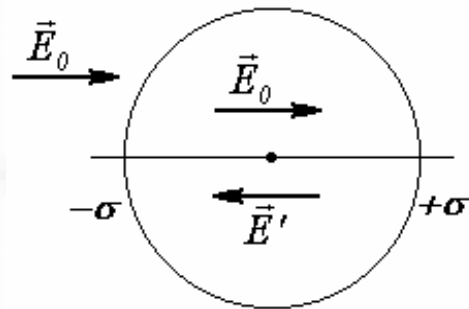
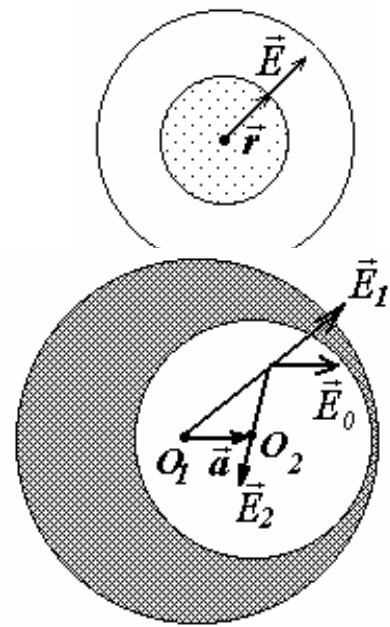
Будем рассматривать полость внутри шара как наложение сплошного шара с объемной плотностью заряда ρ и шара, совпадающего по с полостью с равномерно распределенным зарядом плотностью $-\rho$. Тогда по принципу суперпозиции поле внутри полости можно представить в виде суммы $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ - поле, создаваемое сплошным шаром, $\vec{E}_2$ - поле, создаваемое зарядами полости. Используя формулу (17), получим

$$\vec{E}_0 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{3\epsilon_0} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}. \quad (18)$$

При выводе учтено, что $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{a}$ вектор, соединяющий центры шара и полости. Существенно, что поле внутри полости оказывается однородным.

6. На поверхности шара, помещенного в электрическое поле, индуцируются заряды. Причем распределение этих зарядов должно быть таким, чтобы суммарное поле внутри шара было равно нулю. Иными словами, необходимо придумать такое распределение зарядов σ на поверхности шара, чтобы создаваемое ими поле $\vec{E}'$ было однородным, равным по модулю внешнему полю $\vec{E}_0$ и направленным в противоположную сторону. В предыдущем разделе мы показали, что поле в сферической полости равномерно заряженного шара является однородным - используем здесь этот результат.

Представим шар как наложение двух равномерно заряженных шара с зарядами противоположного знака, смещенных друг относительно друга на малый вектор $\vec{a}$. Тогда заряды «останутся» только в тонком поверхностном слое переменной толщины. При малом смещении объемный заряд тонкого слоя можно заменить поверхностным, причем поверхностная



плотность заряда будет пропорциональна толщине слоя. Поле, создаваемое индуцированными зарядами можно вычислить по формуле (18)

$$E' = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}.$$

Полагая напряженность этого поля равной напряженности внешнего поля, получаем

$$\rho a = 3\varepsilon_0 E_0. \quad (19)$$

Удобно рассматривать поверхностную плотность заряда как функцию угла θ между направлением внешнего поля и направлением на точку наблюдения. Толщина заряженного слоя в точке, определяемой углом θ , равна $h = a \cos \theta$. Поэтому поверхностная плотность заряда подчиняется уравнению

$$\sigma = \rho h = \rho a \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (20)$$

Таким образом, мы представили распределение индуцированных зарядов как наложение двух равномерно заряженных шаров. Поле равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, поэтому дипольный момент шара равен дипольному моменту двух точечных зарядов, помещенных в центры смещенных шаров:

$$d = Qa = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho a = 4\pi R^3 \varepsilon_0 E_0. \quad (21)$$

Замечания.

1. Заметьте, что во всех выражениях, описывающих поляризацию шара, фигурирует только произведение фиктивно введенных величин ρa , что обосновывает применение перехода $a \rightarrow 0$. Действительно, формально можно полагать смещение очень малым, а объемную плотность заряда большой, но такими, чтобы их произведение оставалось неизменным.

2. Поляризуемость шара в однородном поле оказалась равной его утроенному объему.

3. Решение этой задачи можно получить также с помощью перехода от решений пункта 3.

Будем считать, что изолированный проводящий шар находится в поле точечного заряда Q , расположенного на расстоянии l от центра шара. Устремим $l \rightarrow \infty$, при этом, увеличивая заряд шара так, чтобы напряженность поля, создаваемого точечным зарядом оставалась в месте шара постоянной и равной E_0 , то есть $E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$,

откуда $Q = 4\pi\varepsilon_0 l^2 E_0$. Тогда по формуле (9) индуцированный дипольный момент шара равен $d = q \frac{R^3}{l^2} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0$, что совпадает с полученным выше значением. Далее

можно найти напряженность поля у поверхности шара как суперпозицию внешнего однородного поля и поля диполя, помещенного в центре шара, а затем и поверхностную плотность зарядов.

Рекомендую проделать этот путь самостоятельно.

7. Пусть «газ» находится во внешнем электрическом поле, напряженностью E_0 . Тогда каждый шарик приобретает индуцированный дипольный момент, рассчитываемый по формуле (21): $d = 4\pi r^3 \varepsilon_0 E_0$, следовательно,

индуцированный дипольный момент единицы объема (поляризация среды) будет определяться по формуле

$$P = nd = 4\pi r^3 n \varepsilon_0 E_0. \quad (22)$$

Используя формулу, приведенную в условии $\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, запишем

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E_0 + P = \varepsilon_0 E_0 + 4\pi r^3 n \varepsilon_0 E_0,$$

откуда следует, что диэлектрическая проницаемость описанного «газа» рассчитывается по формуле

$$\varepsilon = 1 + 4\pi r^3 n. \quad (23)$$

Конечно, молекулы воздуха не являются металлическими шариками, однако формула (23) дает оценку диэлектрической проницаемости газа, и мы используем ее для оценки среднего радиуса молекул

$r = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon - 1}{4\pi n}}$. Концентрация молекул при нормальных условиях найдем из уравнения $p = nkT$, где p, T - давление и температура газа. Таким образом, окончательное выражение для оценки размеров молекул приобретает вид

$$r = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{kT}{p}} \approx 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (24)$$

Мы получили несколько заниженное значение, однако порядок величины соответствует действительности.

Замечания.

1. При расчетах мы полагали, что концентрация молекул мала, поэтому полностью пренебрегли взаимным влиянием шариков друг на друга.

Расчет электрических полей в присутствии диэлектриков намного сложнее, чем решение аналогичных задач для проводников. Математически это усложнение заключается в других граничных условиях. Так для проводников, находящихся в электростатическом поле выполняются условия: потенциал проводника постоянен; вектор напряженности поля у поверхности проводника перпендикулярен поверхности.

На границе диэлектриков при отсутствии на ней свободных зарядов выполняются условия:

- тангенциальные составляющие векторов напряженности полей одинаковы

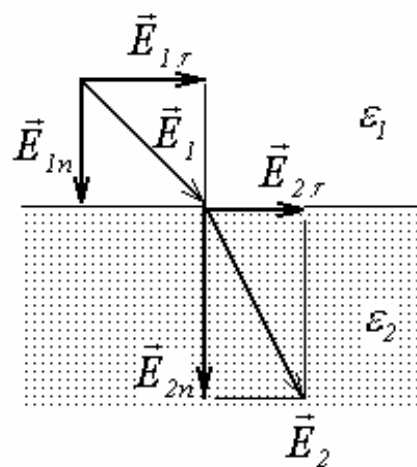
$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad (25)$$

- нормальные составляющие векторов напряженности претерпевают разрыв, такой, что выполняется соотношение

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad (26)$$

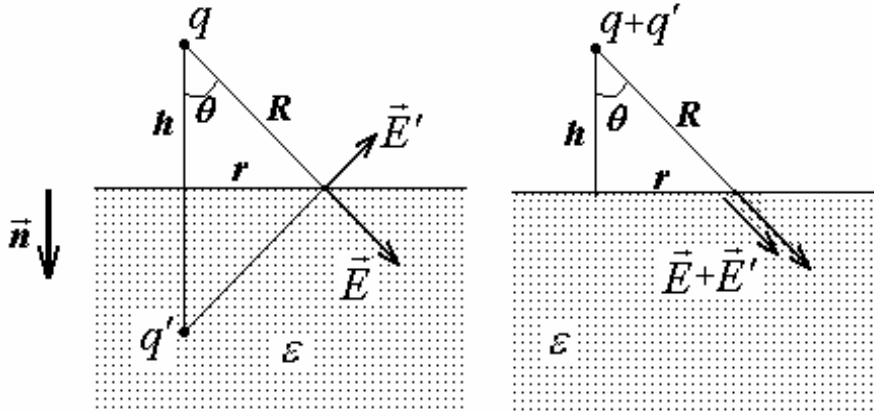
где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - диэлектрические проницаемости граничащих сред. Поверхностная плотность поляризационных зарядов на границе диэлектриков может быть найдена с помощью теоремы Гаусса и определяется по формуле

$$\sigma' = \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}). \quad (27)$$



8. Предположим, что на плоской границе диэлектрика, взаимодействующего с точечным зарядом q , возникают поляризационные заряды, распределение σ' которых совпадает с распределением зарядов на поверхности проводника, находящегося в аналогичных условиях (см. п.4 данной задачи). Такое распределение поверхностных зарядов, создает в полупространстве поле, эквивалентное полю точечного заряда.

Таким образом, будем рассматривать поле в верхнем полупространстве



над диэлектриком как суперпозицию зарядов q и q' , расположенных по разные стороны от границы, а поле внутри диэлектрика как поле двух точечных зарядов q и q' , расположенных в одной точке. Для того, чтобы доказать справедливость нашего предположения необходимо добиться выполнения граничных условий (25)-(26). Легко видеть, что условие постоянства тангенциальной составляющей выполняется при любом значении заряда-изображения q' . Попытаемся подобрать такую величину этого заряда, что бы выполнялось граничное условие и для нормальных составляющих поля. Согласно нашему предположению, в пространстве над диэлектриком возле границы нормальная составляющая поля определяется формулой

$$E_{1n} = \frac{q - q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta, \quad (28)$$

а внутри диэлектрика, непосредственно у границы

$$E_{2n} = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta. \quad (29)$$

Граничное условие (26) будет выполняться в любой точке границы, если положить

$$q - q' = \epsilon(q + q'),$$

или

$$q' = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}. \quad (30)$$

Итак, мы показали, что предположение о характере распределения поляризационных зарядов на границе диэлектрика справедливо, так выполняются граничные условия.

Величина поверхностной плотности зарядов вычисляется по формуле (27), применение которой в данном случае приводит к результату

$$\sigma' = \frac{2q'}{4\pi R^2} \cos \theta = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{h}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (31)$$

Силу, действующую на точечный заряд, можно вычислить как силу взаимодействия двух точечных зарядов q и q' :

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2} = -\frac{q^2}{16\pi h^2} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}. \quad (32)$$

Замечания.

1. Прежде всего, честно признаемся, что решение этой задачи фактически угадано, правда, затем эта догадка строго доказана.

2. Переход от диэлектрика к проводнику в задачах электростатики может быть осуществлен, полагая $\varepsilon \rightarrow \infty$, действительно, в этом пределе формулы (31), (32) переходят в соответствующие формулы, полученные ранее для проводника в п.4. Если же положить $\varepsilon = 1$, то все индуцированные заряды исчезают, как и должно быть в отсутствие диэлектрика.

3. Отметим, что поле внутри диэлектрика в данном случае совпадает с полем точечного заряда, величина которого равна $q + q' = \frac{2}{\varepsilon + 1}$. То есть диэлектрик уменьшает поле, но не в ε раз, как это бывает в случае бесконечного диэлектрика.

9. Предположим, что и данном случае распределение поляризационных зарядов на поверхности диэлектрического шарика σ' совпадает с распределением индуцированных зарядов на поверхности металлической сферы (формула (20)), но отличается, конечно, по величине:

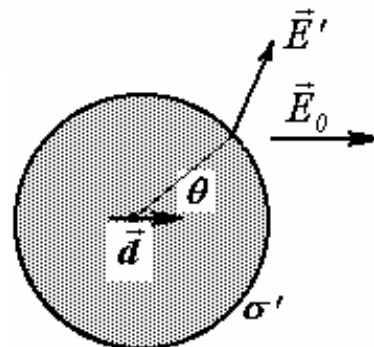
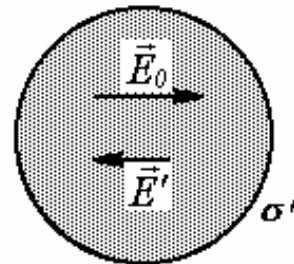
$$\sigma' = \sigma_0 \cos \theta. \quad (33)$$

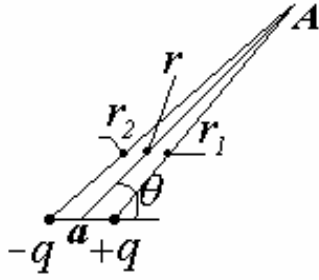
Такое распределение зарядов создает внутри шара однородное поле напряженности

$$E' = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \quad (34)$$

Этот результат сразу следует из формулы (20) - поле напряженностью E_0 индуцирует на поверхности шарика заряды $\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$, поле которых полностью компенсирует внешнее поле. Аналогично из формулы (21) следует вывод о поле вне шара.

Вне шарика поле поляризационных зарядов совпадает с полем точечного диполя с моментом равным $d = \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma_0$ и размещенным в центре шара.





Рассчитаем напряженность электрического поля, создаваемого диполем - системой двух точечных зарядов $+q, -q$, расположенных на небольшом расстоянии a друг от друга. Найдем первоначально потенциал поля в точке A , находящейся на расстоянии r от центра диполя на отрезке, образующем угол θ с осью диполя. По принципу суперпозиции

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \text{ Расстояния до зарядов найдем по}$$

теореме косинусов (используя также малость величины a)

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 \mp 2r \frac{a}{2} \cos \theta + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \approx r \mp \frac{a}{2} \cos \theta. \text{ В линейном приближении разность}$$

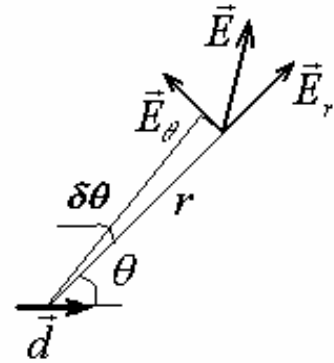
расстояний $r_2 - r_1 \approx a \cos \theta$, а их произведение $r_1 r_2 \approx r^2$. Тогда потенциал поля подчиняется выражению

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (35)$$

Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ разложим на две составляющие: $\vec{E}_r$ - вдоль отрезка, соединяющего диполь и точку наблюдения и $\vec{E}_\theta$ - перпендикулярную ему. Используя известное соотношение между потенциалом и напряженностью, найдем

$$E_r = -\frac{\delta\varphi}{\delta r} = \frac{qa \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (36)$$

$$E_\theta = -\frac{\delta\varphi}{r\delta\theta} = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (37)$$



Вернемся к решению нашей задачи. Запишем выражения для нормальных и тангенциальных компонент поля с двух сторон от поверхности шарика.

Внутри диэлектрика

$$E_{1\tau} = (E_0 - E') \sin \theta = \left(E_0 - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\right) \sin \theta \quad (38)$$

$$E_{1n} = (E_0 - E') \cos \theta = \left(E_0 - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\right) \cos \theta$$

У поверхности шарика снаружи

$$E_{2n} = E_0 \cos \theta + E'_r = E_0 \cos \theta + \frac{d \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} = E_0 \cos \theta + \frac{2\sigma_0 \cos \theta}{3\epsilon_0} \quad (39)$$

$$E_{2\tau} = E_0 \sin \theta - E'_\theta = E_0 \sin \theta - \frac{d \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = E_0 \sin \theta - \frac{\sigma_0 \sin \theta}{3\epsilon_0}$$

Граничное условие для тангенциальных компонент поля выполняется при любом значении величины σ_0 , для выполнения условия для нормальных компонент необходимо положить

$$\varepsilon(E_0 - \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}) = (E_0 + \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}),$$

откуда следует:

$$\sigma_0 = 3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \varepsilon_0 E_0. \quad (40)$$

Окончательно получим, что поверхностная плотность поляризационных зарядов описывается формулой

$$\sigma' = 3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \varepsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (41)$$

Это распределение отличается от распределения зарядов на проводнике только множителем $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$, поэтому и индуцированный дипольный момент диэлектрического шарика будет меньше во столько же раз

$$d = 4\pi r^3 \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad (42)$$

Замечание.

Суммарное поле внутри шарика будет однородным и направленным, так же как и внешнее поле, однако, его величина будет меньше

$$E_1 = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0.$$

Поле вне шара перестанет быть однородным.

Обратите внимание, что множитель, показывающий во сколько раз изменилось поле, отличается от аналогичного множителя для случая плоской границы - тем самым мы продемонстрировали, что форма границы оказывает существенное влияние на поле внутри и снаружи от диэлектрика.

10. Для вычисления силы взаимодействия точечного заряда и диэлектрического шара воспользуемся результатами, полученными в предыдущем разделе. Так как размеры шарика значительно меньше расстояния до заряда, то можно считать, что шарик находится в однородном поле, в котором он приобретает дипольный момент

$$d = 4\pi r^3 \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = 4\pi r^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 l^2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{qr^3}{l^2}.$$

Величину напряженности поля, создаваемого поляризационными зарядами можно рассчитать по формуле (36), полагая в ней $\theta = 0$:

$$E = \frac{d}{2\pi \varepsilon_0 l^3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{qr^3}{2\pi \varepsilon_0 l^5}, \text{ следовательно, сила взаимодействия заряда и}$$

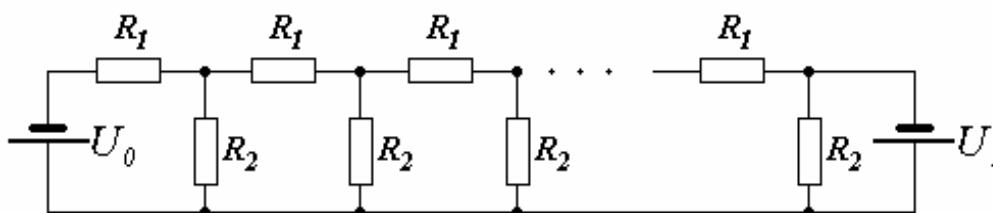
шарика определяется по формуле

$$F = qE = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{q^2 r^3}{2\pi \varepsilon_0 l^5}. \quad (43)$$

Замечания.

1. Рекомендую самостоятельно проанализировать переход от диэлектрика к проводнику в двух последних пунктах, полагая $\varepsilon \rightarrow \infty$.
2. Рассмотренные примеры взаимодействия диэлектриков с электростатическими полями являются, по-видимому, самыми простыми, так распределение зарядов на их поверхности оказывается таким же, как на поверхности проводника. Однако эти примеры являются скорее исключением, чем правилом - попробуйте, например, найти распределение зарядов на поверхности диэлектрического шара, расположенного вблизи точечного заряда.

Задача 12 «Почти бесконечная цепочка»



Цепочка резисторов состоит из N одинаковых звеньев и подключена с одной стороны к источнику постоянного напряжения U_0 , а с другой к источнику постоянного напряжения U_1 .

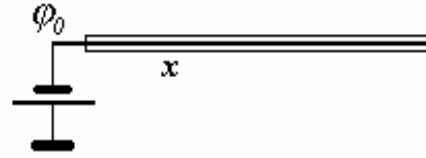
Для построения требуемых графиков используйте следующие значения параметров $R_2 = 20R_1$, $U_0 = 2U_1$

1. Найдите значения напряжений на всех резисторах R_2 . Постройте схематический график зависимости напряжения от номера резистора.
2. Найдите значения напряжений на резисторах R_2 , если источник U_1 отключить. Постройте схематический график зависимости напряжения от номера резистора.
3. Найдите значения напряжений на резисторах R_2 , если источник U_1 заменить на резистор сопротивлением r .
4. Найдите значения напряжений на всех резисторах R_2 при $N \rightarrow \infty$.
5. Найдите сопротивление цепи, состоящей из N звеньев. Рассмотрите случай $N \rightarrow \infty$.
6. Допустимая погрешность расчета сопротивления цепи, состоящей из N звеньев равна ε ($\varepsilon \ll 1$). При каком числе звеньев цепочку можно считать бесконечной? Получите результат в общем виде, а затем проведите численный расчет для а) $R_2 = 20R_1$; б) $R_2 = 2R_1$ при предельной погрешности $\varepsilon = 1\%$.

7. Данная задача является прекрасной моделью для описания кабеля с небольшой утечкой. При этом сопротивления R_1 описывают собственное сопротивление кабеля, а R_2 - сопротивление окружающей среды, по которой возможна некоторая утечка электрического тока.

Очень длинный медный провод диаметром $a = 1 \text{ мм}$, покрытый слоем лака толщиной $h = 20 \text{ мкм}$, находится в хорошо проводящей среде. Потенциал одного конца провода поддерживают равным $\varphi_0 = 100 \text{ В}$.

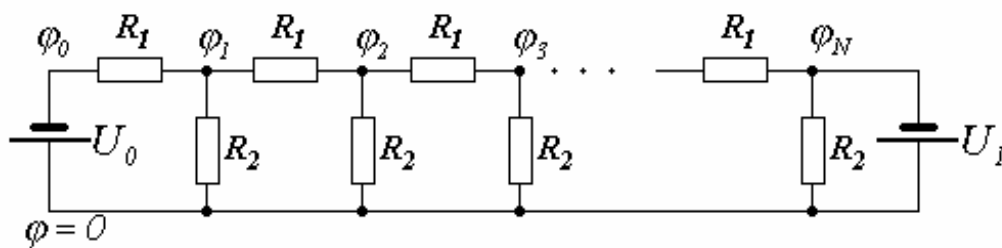
Найдите зависимость силы тока в проводе от расстояния до источника x .



Чему равна сила тока, потребляемая от источника? На каком расстоянии сила тока уменьшится в два раза?

Удельное электрическое сопротивление меди принять равным $\rho_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, удельное электрическое сопротивление покрывающего лака $\rho_2 = 2 \cdot 10^8 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Решение.

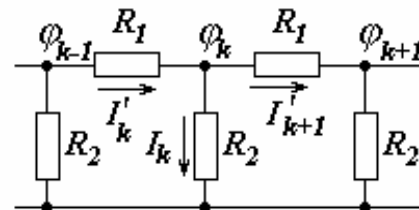


Положим потенциал общего провода равным $\varphi = 0$. Обозначим потенциалы узловых точек $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$. Очевидно, что $\varphi_0 = U_0$, а $\varphi_N = U_1$. Рассмотрим один из внутренних узлов.

По закону сохранения электрического заряда можно записать (обозначения см. на рисунке)

$$I'_k = I_k + I'_{k+1}. \quad (1)$$

Значения сил токов можно выразить через разности потенциалов по закону Ома. Тогда соотношение (1) будет иметь вид



$$\frac{\varphi_{k-1} - \varphi_k}{R_1} = \frac{\varphi_k}{R_2} + \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1}}{R_1}. \quad (2)$$

Из уравнения (2) выразим значение потенциала φ_{k+1}

$$\varphi_{k+1} = \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) \varphi_k - \varphi_{k-1}. \quad (3)$$

Соотношения (3) являются системой линейных уравнений для неизвестных значений потенциалов. Попробуем найти решение этой системы в общем

виде, при произвольном N . Заметим, что система уравнений (3) является линейной и однородной, поэтому для ее решений справедлив принцип суперпозиции: любая линейная комбинация решений также является решением этой системы. Поэтому будем искать частные решения в виде

$$\varphi_k = \lambda^k. \quad (4)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3), получим

$$\lambda^{k+1} = \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) \lambda^k - \lambda^{k-1},$$

или после сокращения

$$\lambda^2 = \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) \lambda - 1. \quad (5)$$

решением этого квадратного уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2} = \left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right)^2 - 1} \quad (6)$$

Обратим внимание, что оба корня являются положительными, а их произведение равно единице, поэтому больший корень обозначим $\lambda_1 = \lambda$, тогда меньший $\lambda_2 = 1/\lambda = \lambda^{-1}$.

С учетом оговоренного ранее принципа суперпозиции, общее решение системы (3) будет иметь вид

$$\varphi_k = A\lambda^k + B\lambda^{-k}, \quad (7)$$

где A, B - произвольные постоянные, которые определяются из дополнительных (граничных) условий.

Для приведенного значения отношения сопротивлений численное значение параметра $\lambda = 1,25$, $\lambda^{-1} = 0,8$. Заметим, что $\lambda^{-N} = \lambda^{-20} \approx 0,01$, что является достаточно малой величиной.

1. Если цепь подключена к двум источникам напряжения, то для определения двух неизвестных A, B следует воспользоваться соотношениями $\varphi_0 = U_0$, $\varphi_N = U_1$, или в явном виде

$$\begin{cases} U_0 = A + B \\ U_1 = A\lambda^N + B\lambda^{-N} \end{cases} \quad (8)$$

Решение системы (8) имеет вид

$$\begin{cases} A = \frac{U_1 - U_0\lambda^{-N}}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \\ B = \frac{U_0\lambda^N - U_1}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \end{cases}. \quad (9)$$

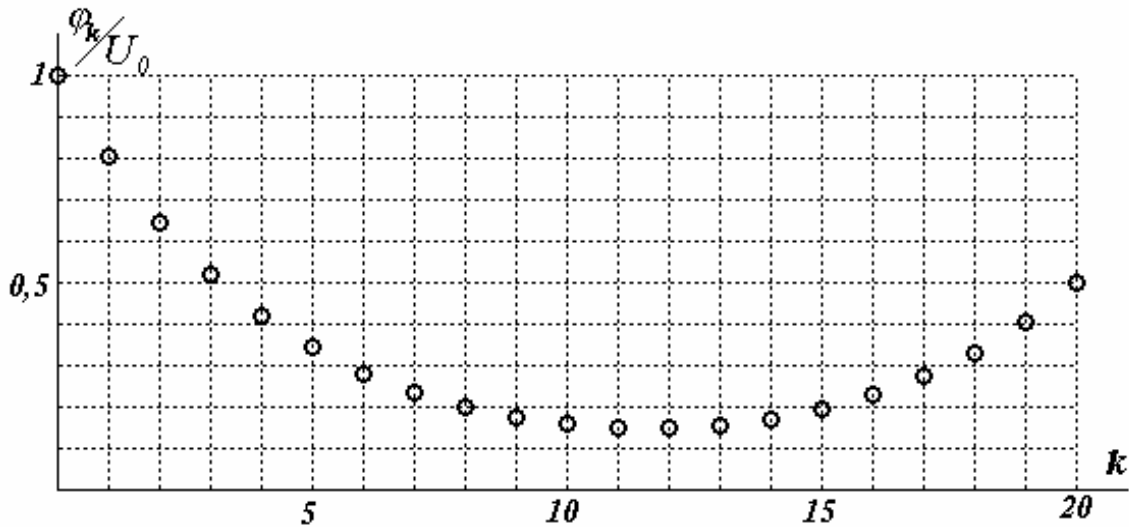
Следовательно, распределение потенциалов узловых точек будет иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \frac{U_I - U_0 \lambda^{-N}}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \lambda^k + \frac{U_0 \lambda^N - U_I}{\lambda^N - \lambda^{-N}} \lambda^{-k} = \\ &= \frac{U_0 (\lambda^{N-k} - \lambda^{-(N-k)}) + U_I (\lambda^k - \lambda^{-k})}{\lambda^N - \lambda^{-N}}\end{aligned}\quad (10)$$

Для построения требуемого графика преобразуем полученную формулу к виду, более удобного для анализа

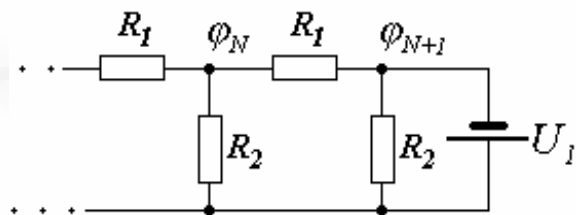
$$\begin{aligned}\varphi_k &= U_0 \frac{\lambda^{N-k} - \lambda^{-(N-k)}}{\lambda^N - \lambda^{-N}} + U_I \frac{\lambda^k - \lambda^{-k}}{\lambda^N - \lambda^{-N}} = U_0 \frac{\lambda^{-k} - \lambda^{-(2N-k)}}{1 - \lambda^{-2N}} + U_I \frac{\lambda^{-(N-k)} - \lambda^{-k-N}}{1 - \lambda^{-2N}} \approx T \\ &\approx U_0 \lambda^{-k} + U_I \lambda^{-(N-k)}\end{aligned}$$

аким образом, данная функция является суммой двух убывающих геометрических прогрессий, одна из которых начинается с точки $k=0$, а вторая с $k=N$. График этой функции представлен на рисунке.



2. Заметим, что для ответа на этот вопрос, в формулах (10) нельзя положить $U_I = 0$, так как это условие выполняется не при отключенном источнике, а при закороченном.

Мысленно добавим к цепочке еще одно звено. Теперь отключение источника соответствует отсутствию тока в этом дополнительном звене. Формально это условие можно записать в виде равенства потенциалов



$$\varphi_N = \varphi_{N+1}. \quad (11)$$

Добавив к этому равенству значение начального потенциала $\varphi_0 = U_0$, получим систему уравнений для определения неизвестных параметров общего решения (7):

$$\begin{cases} U_0 = A + B \\ A\lambda^N + B\lambda^{-N} = A\lambda^{N+1} + B\lambda^{-N-1} \end{cases} \quad (12)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} A = \frac{U_0}{\lambda^{2N+1} + 1} \\ B = \frac{U_0 \lambda^{2N+1}}{\lambda^{2N+1} + 1} \end{cases} \quad (13)$$

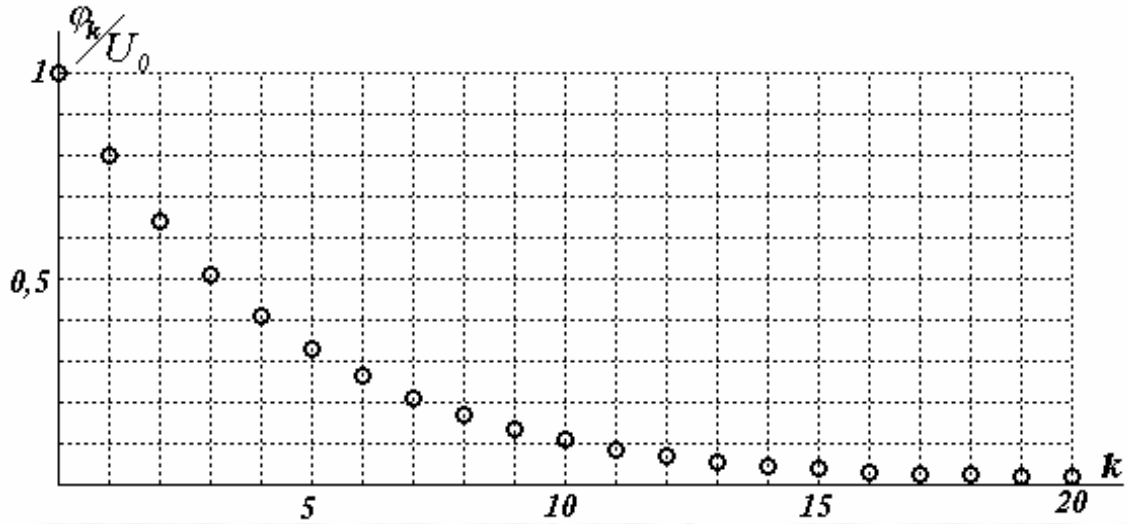
а соответствующее распределение потенциала

$$\varphi_k = \frac{U_0}{\lambda^{2N+1} + 1} (\lambda^k + \lambda^{2N+1-k}). \quad (14)$$

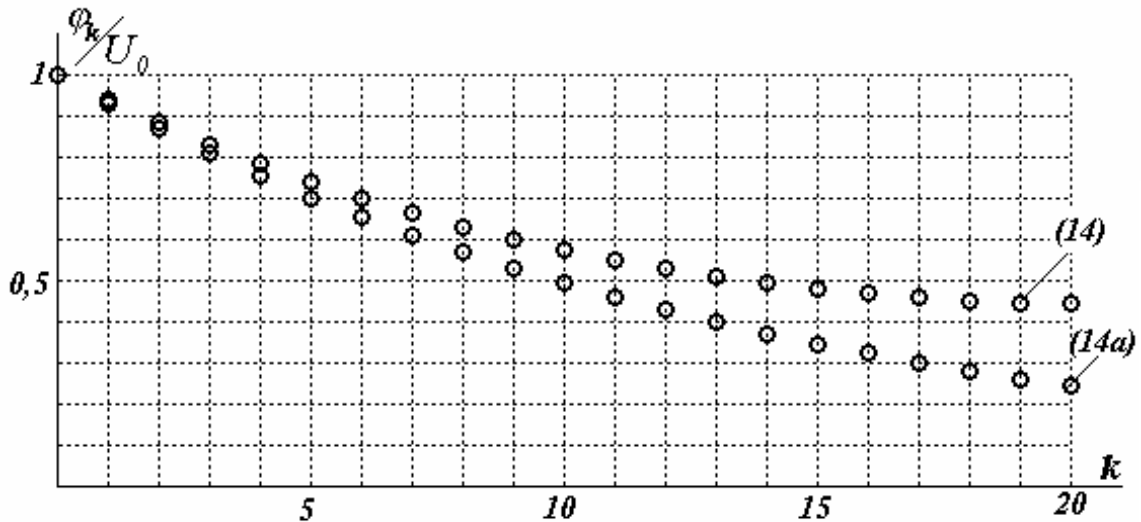
Преобразуем это выражение к более удобному виду

$$\varphi_k = \frac{U_0}{\lambda^{2N+1} + 1} (\lambda^k + \lambda^{2N+1-k}) = U_0 \frac{\lambda^{k-2N-1} + \lambda^{-k}}{1 + \lambda^{-2N-1}} \approx U_0 \lambda^{-k}. \quad (14a)$$

График этой функции изображен ниже.



При большем значении сопротивления R_2 различия между графиком точной функции (14) и ее приближенным значением достаточно заметны. Так на следующем рисунке построены эти зависимости для $R_2 = 200R_1$.



3. При замене источника U_1 на резистор изменится граничное условие на втором конце цепи.

В этом случае сила тока I'_N будет равна сумме токов через резисторы R_2 и r . Это условие приводит к

следующему соотношению между потенциалами

$$\frac{\varphi_{N-1} - \varphi_N}{R_1} = \frac{\varphi_N}{R_2} + \frac{\varphi_N}{r}, \quad (15)$$

которое преобразуется к виду $\varphi_N = g\varphi_{N-1}$, где обозначено

$$g = \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Таким образом, система граничных условий для определения коэффициентов функции (7) будет иметь вид

$$\begin{cases} U_0 = A + B \\ A\lambda^N + B\lambda^{-N} = g(A\lambda^{N-1} + B\lambda^{-(N-1)}) \end{cases} \quad (17)$$

Из этой системы можно найти значение коэффициентов, которые затем следует подставить в выражение (7). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат.

$$\varphi_k = U_0 \frac{(1 - g\lambda^{-1})\lambda^{-k} + (g\lambda - 1)\lambda^{-2N+k}}{(1 - g\lambda^{-1}) + (g\lambda - 1)\lambda^{-2N}}. \quad (18)$$

4. Результаты для бесконечной цепочки можно получить, если устремить $N \rightarrow \infty$ в любой из формул (10) или (14). Однако этот же результат можно сразу определить из граничных условий, если заметить, что в этом случае при $k \rightarrow \infty$, потенциал должен стремиться к нулю $\varphi_k \rightarrow 0$. Поэтому следует задать $A = 0$, откуда сразу следует $B = U_0$, а распределение потенциала имеет вид

$$\varphi_k = U_0 \lambda^{-k}. \quad (19)$$

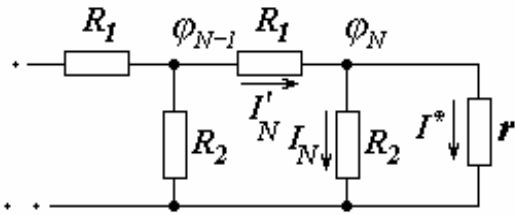
5. Получим значение сопротивления цепочки, содержащей N звеньев, используя закон Ома:

$$R_\Sigma = \frac{U_0}{I}, \quad (20)$$

где I сила тока в цепи, которая равна силе тока через первый резистор

$$I = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_1}. \quad (21)$$

Используя формулу (14) получим значение напряжения на первом резисторе



$$\varphi_0 - \varphi_l = U_0 \left(1 - \frac{\lambda^{2N} + \lambda}{\lambda^{2N+1} + 1} \right),$$

а затем и сопротивление всей цепи

$$R_\Sigma = \frac{R_l}{1 - \frac{\lambda^{2N} + \lambda}{\lambda^{2N+1} + 1}}. \quad (22)$$

При $N \rightarrow \infty$ это выражение существенно упрощается

$$R_\Sigma \approx \frac{R_l}{1 - \lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} R_l, \quad (23)$$

причем полученное выражение можно получить непосредственно из распределения потенциала (19).

Убедитесь самостоятельно, что полученное выражение в точности совпадает с ответом весьма популярной задачи о бесконечной цепочке

$$R_\Sigma = \frac{R_l}{2} + \sqrt{\frac{R_l^2}{4} + R_l R_2}.$$

Отметим также, что при $N = 1$, формула (22) приводит к очевидному результату $R_\Sigma = R_l + R_2$.

6. Преобразуем формулу (22), полагая $\lambda^{-2N} \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{R_\Sigma}{R_l} &= \frac{\lambda^{2N+1} + 1}{\lambda^{2N+1} + 1 - \lambda^{2N} - \lambda} = \frac{\lambda^{2N+1} + 1}{(\lambda - 1)(\lambda^{2N} - 1)} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{1 + \lambda^{-2N-1}}{1 - \lambda^{-2N}} \approx \\ &\approx \frac{\lambda}{\lambda - 1} (1 + \lambda^{-2N-1} + \lambda^{-2N}) \end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что при замене длинной, но конечной цепочки, на бесконечную, относительная ошибка расчета сопротивления цепи определяется формулой

$$\varepsilon \approx \lambda^{-2N-1} + \lambda^{-2N} = \lambda^{-2N-1} (1 + \lambda), \quad (24)$$

из которой можно найти значение числа звеньев N , при котором цепочку можно считать бесконечной

$$N \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{1 + \lambda}}{\ln \lambda} + 1 \right). \quad (25)$$

Численные расчеты показывают, что для случая а) $R_2 = 20 R_l$ минимальное значение $N = 13$. Для случая б) $R_2 = 2 R_l$ требуемая точность достигается уже при $N = 4$.

7. Будем рассматривать провод с малой утечкой тока через боковую поверхность как цепь, изучаемую в данной задаче. Мысленно разобьем провод на малые участки длиной δ . Тогда сопротивления R_l, R_2 соответствующие этому участку могут быть записаны в виде

$$R_1 = \rho_1 \frac{4\delta}{\pi a^2}, \quad R_2 = \rho_2 \frac{h}{\pi a \delta}. \quad (26)$$

Их отношение $\frac{R_1}{R_2} = \frac{4\rho_1}{\rho_2 h a} \delta^2$ является бесконечно малой величиной второго порядка по δ (не говоря уж о малости отношения удельных сопротивлений). Учитывая малость этого отношения, найдем значения параметра λ :

$$\lambda = \left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right)^2 - 1} \approx 1 + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = 1 + \delta \sqrt{\frac{4\rho_1}{\rho_2 h a}} =, \quad (27)$$

$$= 1 + \beta\delta$$

где мы пренебрегли всеми членами, порядок малости которых превышает первый, и обозначили $\beta = \sqrt{\frac{4\rho_1}{\rho_2 h a}} \approx 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$.

Воспользуемся теперь формулой (19) для распределения потенциала в бесконечной цепи, в которой в качестве номера звена k следует взять отношение $\frac{x}{\delta}$. Напомним, δ - длина участка проволоки который мы

рассматриваем как одно звено, поэтому на длине x укладывается $k = \frac{x}{\delta}$

звеньев. Итак, распределение потенциала на проволоке будет иметь вид

$$\varphi = \varphi_0 \lambda^{-k} = \varphi_0 (1 + \beta\delta)^{-\frac{x}{\delta}} \approx \varphi_0 \exp(-\beta x). \quad (28)$$

Данное неравенство становится точным при переходе к пределу $\delta \rightarrow 0$. Для вычисления силу тока опять рассмотрим участок провода длиной δ . По закону Ома сила тока на этом участке определяется по формуле

$$I = \frac{\varphi(x) - \varphi(x + \delta)}{R_1} = \frac{\pi a^2}{\rho_1} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(x + \delta)}{4\delta} = -\frac{\pi a^2}{4\rho_1} \frac{d\varphi}{dx},$$

где очередной раз учтена малость δ . Используя выражение (28) получим окончательную формулу:

$$I = -\frac{\pi a^2}{4\rho_1} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\pi a^2}{4\rho_1} \beta \varphi_0 \exp(-\beta x) = \varphi_0 \frac{\pi a^2}{2\sqrt{\rho_1 \rho_2 a h}} \exp(-\beta x). \quad (29)$$

Ток I_0 , потребляемый от источника, следует рассчитывать, полагая в этой формуле $x = 0$. Поэтому

$$I_0 = \varphi_0 \frac{\pi a^2}{2\sqrt{\rho_1 \rho_2 a h}} \approx 0,6 \text{ А}$$

Заметим, что эффективное сопротивление этой системы $R^* = \frac{\varphi_0}{I_0} \approx 180 \text{ Ом}$. Сила тока убывает по экспоненциальному закону, ток

уменьшится в два раза, когда $\exp(-\beta x) = 1/2$. Откуда следует,

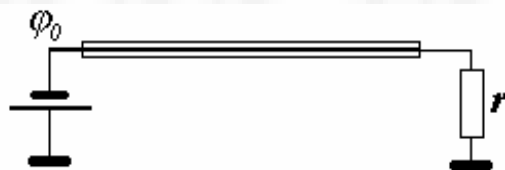
$$x = \frac{\ln 2}{\beta} \approx 5 \text{ км}.$$

Комментарии к задаче.

1. Решение данной задачи демонстрирует метод получения явных выражений членов последовательностей, которые заданы рекуррентными соотношениями типа (3). Отметим, что наиболее важными моментами этого поиска являются
 - вид решения в виде геометрической последовательности (с определением возможных значений ее знаменателя);
 - использование принципа суперпозиции для линейных соотношений;
 - использование граничных условий для определения неизвестных коэффициентов.
2. Подобными уравнениями может описываться и процесс распространения тепла в стержне, если существует тепловой поток через боковую поверхность стержня. В этом случае в качестве потенциалов могут выступать температуры точек, величины подобные R_1 описывают теплопроводность стержня, а величины подобные R_2 - теплопроводность окружающей среды.
3. Обратите внимание на значимость граничных условий - они определяют окончательный вид решения! Необходимо уметь грамотно формулировать - эти условия. Например, соотношение (11) фактически означает отсутствие потока.

Задача для самостоятельного решения.

Медный провод длиной $l = 10$ км диаметром $a = 1$ мм, покрытый слоем лака толщиной $h = 20$ мкм, находится в хорошо проводящей среде. Потенциал одного конца



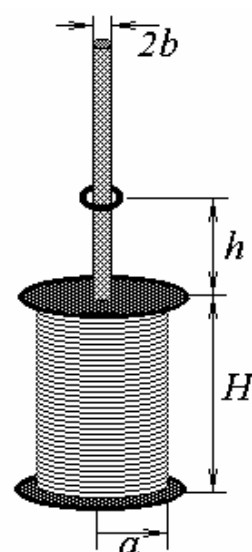
провода поддерживают равным $\varphi_0 = 100 \text{ В}$. Ко второму концу провода подключена полезная нагрузка сопротивлением $r = 100 \text{ Ом}$.

1. Найдите значение силы тока в нагрузке.
2. При каком значении сопротивления нагрузки мощность, выделяемая на ней, будет максимальна?
3. Найдите зависимость коэффициента передачи мощности (отношение мощности тока в нагрузке к мощности тока в источнике) от сопротивления нагрузки.

Удельное электрическое сопротивление меди принять равным $\rho_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, удельное электрическое сопротивление покрывающего лака $\rho_2 = 2 \cdot 10^8 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Задача 13. «Как гроб Магомета»

Вертикальная катушка содержит N витков, высота катушки H , ее радиус a . На оси катушки находится тонкий деревянный стержень толщиной b ($b \ll a$), по которому может скользить без трения проводящее кольцо, радиус которого чуть превышает радиус стержня. Электрическое сопротивление кольца R , индуктивность L , масса m . Если по катушке протекает переменный электрический ток круговой частоты ω с амплитудным значением силы тока I_0 , то кольцо приподнимается над катушкой.



В пунктах (1)-(4) считать, что по катушке протекает постоянный электрический ток силой I .

1. Найдите величину индукции магнитного поля, создаваемого одним витком катушки, на оси витка в зависимости от расстояния до центра витка.

2. Найдите зависимость индукции магнитного поля B на оси катушки от расстояния до нее h . При вычислениях воспользуйтесь формулой

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

3. Считая, что $h \ll a \ll H$, представьте полученное выражение для индукции поля в приближенном виде $B = B_0(1 + \beta h)$.

Найдите значения постоянных B_0 и β .

В дальнейших пунктах используйте это приближенное выражение.

4. Найдите горизонтальную составляющую индукции магнитного поля на малом расстоянии b от оси катушки на высоте h .

Далее будем считать, что по катушке протекает переменный электрический ток круговой частоты ω с амплитудным значением силы тока I_0 .

5. Пусть кольцо находится на высоте h . Найдите значение силы тока в кольце и сдвиг фаз между током в кольце и током в катушке.

6. Найдите среднюю силу, действующую на кольцо, со стороны магнитного поля.

7. Считая высоту подъема кольца малой по сравнению с высотой катушки, покажите, что зависимость высоты подъема кольца от силы тока в катушке имеет вид $h = A - \frac{B}{I_0^2}$. Запишите выражения для параметров A, B .

Решение.

1. Выделим на кольце небольшой элемент длиной Δl . В точке A , находящейся на оси кольца на расстоянии h от его центра, он создает магнитное поле индукции

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{a^2 + h^2}, \quad (1)$$

направленный перпендикулярно отрезку, соединяющему элемент тока с точкой A .

Из очевидной осевой симметрии следует, что вектор суммарной индукции будет направлен по оси кольца. Проекцию вектора ΔB , определенного по формуле (1), на ось кольца можно найти по формуле

$$\Delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{a^2 + h^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{a^2 + h^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{a I \Delta l}{(a^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Так как все части кольца вносят одинаковый вклад в индукцию поля, то суммирование по всем элементам кольца сводится к замене Δl на длину витка $2\pi a$. Поэтому величина вектора индукции на оси кольца определяется формулой

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

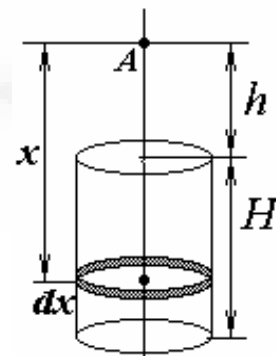
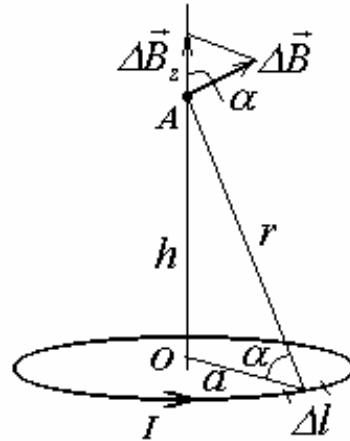
2. Выделим тонкий слой обмотки катушки толщиной dx , расположенный на расстоянии x от рассматриваемой точки A . Можно считать, что по этому слою протекает ток силой

$dI = IN \frac{dx}{H}$. Это ток создает магнитное поле в

точке A , определяемое формулой (2)

$$dB_z = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \frac{dx}{H}.$$

Чтобы найти индукцию поля, создаваемого всей катушкой, необходимо проинтегрировать это выражения по x в пределах от h до $h + H$.



$$B_z = \int_h^{h+H} \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \frac{dx}{H} = \frac{\mu_0 NI}{2H} \left(\frac{h+H}{\sqrt{(h+H)^2 + a^2}} - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right). \quad (3)$$

3. В указанном приближении выражение (3) принимает вид

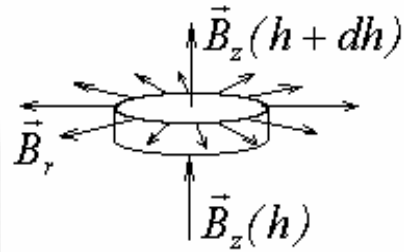
$$B_z = \frac{\mu_0 nI}{2} \left(1 - \frac{h}{a} \right), \quad (4)$$

где $n = \frac{N}{H}$ плотность намотки витков. Таким образом, искомые константы

определяются формулами $B_0 = \frac{\mu_0 nI}{2}$ - индукция поля на торце катушки;

$$\beta = -\frac{I}{a}.$$

4. Выделим мысленно цилиндр малой толщины dh радиуса b , соосный с катушкой. Будем считать, что в пределах оснований цилиндра вертикальная составляющая вектора индукции ($B_z(h+dh)$ - на верхнем основании и $B_z(h)$ на нижнем) изменяется



пренебрежимо мало. Так как магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю, можно записать

$$B_z(h+dh)\pi b^2 - B_z(h)\pi b^2 + B_r 2\pi b dh = 0.$$

Откуда радиальная составляющая вектора индукции может быть найдена по

формуле $B_r = -\frac{b}{2} \frac{B_z(h+dh) - B_z(h)}{dh} = -\frac{b}{2} \frac{dB_z}{dh}$. Используя выражение (4),

легко получить

$$B_r = \frac{\mu_0 nb}{4a} I. \quad (5)$$

5. Пусть ток в катушке изменяется с течением времени по закону

$$I = I_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Тогда на высоте h индукция магнитного поля определяется формулой (4)

$$B_z = \frac{\mu_0 nI}{2} \left(1 - \frac{h}{a} \right) = \frac{\mu_0 n}{2} \left(1 - \frac{h}{a} \right) I_0 \cos \omega t = B_1 \cos \omega t, \quad (7)$$

где $B_1 = \frac{\mu_0 n}{2} \left(1 - \frac{h}{a} \right) I_0$ амплитудное значение индукции поля. Так как радиус

кольца значительно меньше радиуса катушки, то можно приближенно считать, что в пределах площади кольца вертикальная составляющая вектора индукции остается приблизительно постоянной и определяется формулой (7). Поэтому магнитный поток через кольцо равен

$$\Phi = \pi b^2 B_1 \cos \omega t,$$

а ЭДС электромагнитной индукции по закону Фарадея вычисляется по формуле

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi b^2 B_1 \omega \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad (8)$$

где $\varepsilon_0 = \pi b^2 B_1 \omega$ амплитудное значение ЭДС индукции в кольце.

Для нахождения сила тока в кольце $i = i_0 \cos(\omega t - \varphi)$ воспользуемся законом Ома для полной цепи - падение напряжения активном сопротивлении равно полной ЭДС $iR = \varepsilon_i + \varepsilon_{si}$, где $\varepsilon_{si} = -L \frac{di}{dt}$ ЭДС самоиндукции в кольце.

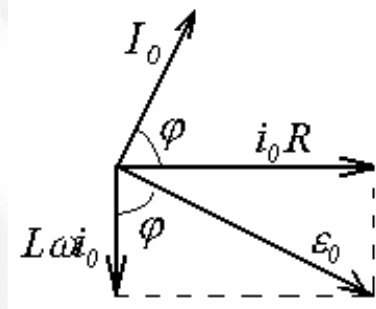
Подставляя значения для силы тока и ЭДС индукции, получим

$$i_0 R \cos(\omega t - \varphi) + L \omega i_0 \sin(\omega t - \varphi) = \varepsilon_0 \sin \omega t. \quad (9)$$

Представим это уравнение в форме векторной диаграммы. Здесь же изображен вектор силы тока в катушке $I = I_0 \cos \omega t$. Из диаграммы находим

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}; \quad (10)$$

$$\cos \varphi = \frac{L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$



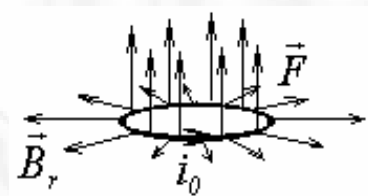
Подставив значения ε_0 и B_1 , получи окончательное выражение для силы тока в кольце

$$i = \frac{\mu_0 n}{2} \left(1 - \frac{h}{a}\right) \frac{\pi b^2 \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (11)$$

где сдвиг фаз определяется формулой (10).

6. Со стороны магнитного поля, создаваемого катушкой, на кольцо с током действует сила Ампера. Причем величина вертикальной составляющей этой силы определяется радиальной компонентой вектора индукции. Мгновенное значение этой силы определяется выражением

$$F = 2\pi b i B_r. \quad (12)$$



Чтобы получить среднее значение этой силы необходимо подставить в формулу (12) явные зависимости силы тока в кольце и индукции поля от времени и усреднить полученной выражение.

$$\langle F \rangle = 2\pi b i_0 B_{r0} \langle \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t \rangle = \pi b i_0 B_{r0} \cos \varphi.$$

Здесь проведено усреднение произведение косинусов путем простых преобразований

$$\begin{aligned} \langle \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t \rangle &= \langle \cos \omega t \cos \varphi \cos \omega t + \sin \omega t \sin \varphi \cos \omega t \rangle = \\ \langle \cos^2 \omega t \rangle \cos \varphi + \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle \sin \varphi &= \frac{\cos \varphi}{2} \end{aligned}$$

Теперь осталось подставить выражения для всех параметров

$$\langle F \rangle = \frac{\pi^2 b^4}{2a} \left(\frac{\mu_0 n I_0}{2} \right)^2 \frac{L \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(1 - \frac{h}{a} \right). \quad (13)$$

7. Для того чтобы найти высоту подъема кольца необходимо выражение для средней силы Ампера приравнять к силе тяжести

$$\frac{\pi^2 b^4}{2a} \left(\frac{\mu_0 n I_0}{2} \right)^2 \frac{L \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(1 - \frac{h}{a} \right) = mg.$$

Из этого уравнения следует, что $h = A - \frac{B}{I_0^2}$, где

$$\begin{aligned} A &= a; \\ B &= \frac{8 m g a^2 (R^2 + L^2 \omega^2)}{\pi^2 b^4 L \omega^2 \mu_0^2 n^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Замечания.

Описанное явление достаточно легко получить и исследовать экспериментально.

Теоретическое описание этого явления разбивается на две практически независимые части: пространственное описание магнитного поля и временные зависимости силы тока в кольце и индукции поля. Сделанные по ходу решения задачи приближения касаются только ее «пространственной части», принципиально возможно описание магнитного поля при более точном подходе.

«Временная часть» решения проведена без каких-либо существенных допущений. Единственное приближение - мы неявно пренебрегли влиянием тока в кольце на ток в катушке (взаимной индукцией). Однако это приближение вносит весьма малую погрешность из-за малой величины индукции поля тока в кольце по сравнению с полем, создаваемым током в катушке.

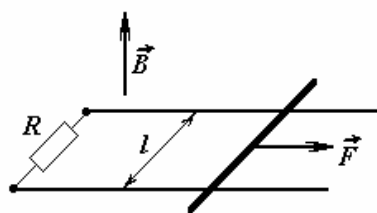
Заметим, что ни в коем случае нельзя пренебречь индуктивностью кольца - как бы не была она мала, именно она определяет дополнительный сдвиг фаз между током в кольце и индукцией поля. При сдвиге фаз равном π среднее значение силы Ампера равно нулю.

Задача для самостоятельного решения.

Пусть первоначально ток в катушке отсутствует, а затем катушку подключают к источнику постоянного напряжения, и через очень малый промежуток времени сила тока в катушке достигает постоянного значения I_0 . Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха, определите, на какую высоту поднимется кольцо. (Все параметры задачи остались прежними).

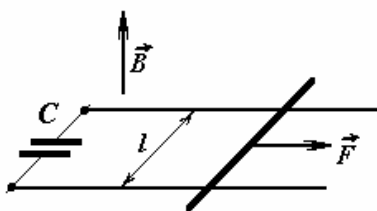
Задача 14. «Перемычка на рельсах»

1. На двух проводящих горизонтальных параллельных рельсах, находящихся на расстоянии l друг от друга, перпендикулярно рельсам расположена проводящая перемычка массы m , которая может скользить по рельсам без трения.

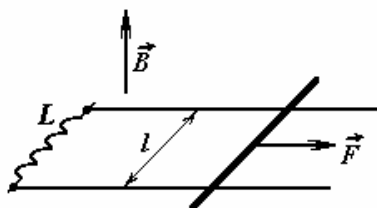


Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле индукции B . Рельсы соединили с помощью резистора сопротивлением R , а к перемычке приложили постоянную горизонтально направленную силу F . Пренебрегая сопротивлением перемычки и рельсов и индуктивностью контура, найдите скорость установившегося движения перемычки.

2. В системе, описанной в п. 1, резистор заменили на конденсатор емкости C . Как будет двигаться перемычка в этом случае?



3. Замените в рассматриваемой системе конденсатор на катушку индуктивностью L и определите характер движения перемычки в этом случае.



4. В установке, описанной в п.1, перемычка покоится на некотором расстоянии x_0 от резистора. Внешняя сила не действует, первоначально магнитного поля нет, а затем достаточно быстро включают вертикальное однородное магнитное поле индукции B . Как изменится расстояние между перемычкой и резистором по прошествии большого промежутка времени.

Решение.

1. При движении перемычки площадь контура, образованного самой перемычкой, рельсами и резистором изменяется, следовательно, изменяется магнитный поток через этот контур, поэтому в контуре возникает эдс индукции, которая приводит к появлению электрического тока и на перемычку начинает действовать сила Ампера. Можно подробно не разбираться с направлениями эдс, тока и силы Ампера, так всегда действие магнитного поля таково, что оно препятствует каким либо изменениям в системе (в данном случае изменению магнитного потока и площади контура). Следовательно, сила Ампера направлена в сторону, противоположную скорости перемычки. Запишем эти рассуждения на языке формул физических

законов. Так как мы оговорили направление возникающей силы, все формулы будем записывать «по модулю».

ЭДС индукции (закон Фарадея):

$$\varepsilon = \frac{\Delta(Blx)}{\Delta t} = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv. \quad (1)$$

Сила тока (закон Ома):

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bl}{R} v. \quad (2)$$

Сила Ампера

$$F_A = IBl = \frac{B^2 l^2}{R} v. \quad (3)$$

Уравнение движения (закон Ньютона):

$$ma = F - F_A = F - \frac{B^2 l^2}{R} v. \quad (4)$$

По прошествии некоторого времени сила Ампера станет равной приложенной силе F , и в дальнейшем перемычка будет двигаться с постоянной скоростью $\bar{v}$, которую найдем из условия $a = 0$.

$$\bar{v} = \frac{FR}{B^2 l^2}. \quad (5)$$

Отметим, что в данном случае выполняется соотношение (что не трудно показать)

$$F\bar{v} = I^2 R, \quad (6)$$

которое соответствует закону сохранения энергии: мощность внешней силы равна мощности теплоты, выделяющейся на резисторе.

Таким образом, магнитное поле работает, его энергия не изменяется, оно способствует превращению энергии источника силы F в тепловую энергию. Такая ситуация типична, в случае проявления закона электромагнитной индукции. Магнитное поле и резистор действуют на перемычку как вязкая среда с силой пропорциональной скорости движения (это явление иногда называют «магнитной вязкостью»).

2. В данном случае движение с постоянной скоростью невозможно. Действительно, при постоянной скорости ЭДС индукции также постоянна, поэтому, когда конденсатор зарядится до напряжения, равного ЭДС индукции, ток прекратится, исчезнет тормозящая сила Ампера и перемычка начнет двигаться ускоренно.

Если пренебречь сопротивлением перемычки и рельсов, то напряжение на конденсаторе в любой момент времени равно ЭДС индукции

$$\varepsilon = \frac{q}{C}, \quad \text{или} \quad Blv = \frac{q}{C}. \quad (7)$$

Из этого соотношения выразим силу тока в контуре

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = CBl \frac{\Delta v}{\Delta t} = CBl a, \quad (8)$$

которая оказывается пропорциональной ускорению (!) перемычки.

Уравнение движения по закону Ньютона имеет вид

$$ma = F - F_A = F - IBl = F - CB^2 l^2 a, \quad (9)$$

из которого следует, что перемычка будет двигаться с постоянным ускорением

$$a = \frac{F}{m + CB^2l^2}. \quad (10)$$

Обратите внимание, магнитное поле и конденсатор, как бы, увеличивают массу перемычки.

Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид (его можно получить из записанных ранее уравнений, или, наоборот, использовать его в качестве исходного для решения задачи)

$$Fv\Delta t = \Delta\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right), \quad (11)$$

работа внешней силы равна изменению суммы кинетической энергии перемычки и энергии электрического поля конденсатора. Заметим, что и в данном случае электромагнитная индукция «работает» в качестве преобразователя энергии внешней силы в энергию конденсатора.

3. Если пренебречь сопротивлением активным контура, то эдс индукции, возникающая под действием внешнего магнитного поля, должна быть равна эдс самоиндукции катушки (и, естественно, направлена в противоположную сторону)

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = Blv = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (12)$$

Из этого соотношения находим силу тока

$$I = \frac{Bl}{L} x, \quad (13)$$

координата x отсчитывается от той точки, в которой сила тока в перемычке равна нулю. Как видите, в этом случае сила тока пропорциональна смещению перемычки. Закон движения перемычки имеет вид

$$ma = F - IBl = F - \frac{B^2l^2}{L} x, \quad (14)$$

который совпадает с уравнением гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}. \quad (15)$$

В данной ситуации магнитное поле и катушка индуктивности приводят к возникновению квазиупругой силы (действуют как пружина^{*}).

Для решения этой задачи также можно воспользоваться законом сохранения энергии в форме

^{*} Эту аналогию можно продолжить. Если катушка индуктивности действует как пружина жесткостью

$k^* = \frac{B^2l^2}{L}$, а конденсатор как дополнительная масса $m^* = CB^2l^2$, то соединенные вместе они

образуют пружинный маятник с периодом колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m^*}{k^*}} = 2\pi\sqrt{LC}$, что совпадает с известной формулой Томпсона.

$$Fv\Delta t = \Delta\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{LI^2}{2}\right). \quad (16)$$

4. Во всех предыдущих задачах изменение магнитного потока происходило вследствие изменения площади контура. В этой ситуации, возникновение сторонней силы можно связать с действием силы Лоренца на электроны в движущихся проводниках. Однако, магнитный поток может изменяться также из-за изменения индукции магнитного поля. В этом случае сторонней силой, приводящей к появлению эдс, является вихревое электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля.*

Так как поле включается быстро, то пренебрежем малым смещением переключки за время включения поля. Тогда сила тока в контуре во время включения поля определяется выражением

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{I}{R} \cdot \frac{\Delta(x_0 l B)}{\Delta t} = \frac{x_0 l}{R} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}, \quad (20)$$

а сила, действующая на переключку

$$F = IBl = \frac{x_0 l^2}{R} B \frac{\Delta B}{\Delta t}. \quad (21)$$

Воспользуемся вторым законом Ньютона в импульсной форме

$$m\Delta v = F\Delta t = \frac{x_0 l^2}{R} B \Delta B, \quad (22)$$

для определения скорости, которую приобретет переключка

$$v_0 = \frac{x_0 l^2 B^2}{2mR}. \quad (23)$$

При выводе последнего соотношения мы воспользовались начальными условиями (при $B = 0$ $v = 0$) и известным соотношением, справедливым при малых изменениях величин $B\Delta B = \Delta\left(\frac{B^2}{2}\right)$. Понятно, что скорость переключки будет направлена «внутрь» - магнитная индукция препятствует увеличению магнитного потока. Далее переключка будет двигаться в однородном магнитном поле, и на нее будет действовать сила «магнитной вязкости» (см. формулу (3))

$$ma = -\frac{B^2 l^2}{R} v. \quad (24)$$

Чтобы найти смещение переключки, преобразуем это уравнение следующим

образом $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta x} v$. После подстановки в (24) легко найдем

* Эти два проявления электромагнитной индукции неразрывно связаны между собой. В различных системах отсчета движение проводника может быть различным - поэтому объяснять электромагнитную индукцию можно как действием силы Лоренца, так и возникновением вихревого электрического поля. Если быть строгим, то всегда имеет смысл говорить только об едином электромагнитном поле, а не о полях магнитном и электрическом - в различных системах отсчета эти составляющие изменяются, однако эдс индукции от системы отсчета не зависит, как не зависит и суммарная сила, действующая на движущийся заряд в электромагнитном поле.

$$\Delta x = \frac{mR}{B^2 l^2} v_0 = \frac{x_0}{2}. \quad (25)$$

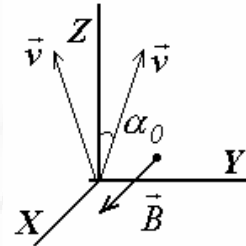
Поразительный результат - расстояние уменьшится в два раза, причем независимо от параметров задачи!

Задача 15. «Фокусировка»

В различных приборах для фокусировки заряженных частиц используется магнитное поле. В данной задаче изучаются условия фокусировки частиц.

1. Частица массы m влетает в магнитное поле индукции B со скоростью v , направленной под углом γ к вектору индукции поля. Покажите, что траектория частицы является цилиндрической спиралью, определите ее радиус R и шаг h .

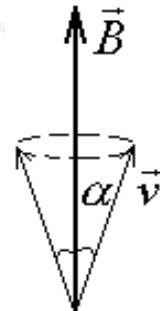
2. Пучок частиц массы m вылетает из узкой щели, расположенной в плоскости XY . Скорости всех частиц равны v и направлены в пределах плоского малого угла $2\alpha_0$, биссектриса которого перпендикулярна плоскости XY . Над плоскостью создано однородное магнитное поле индукции $\vec{B}$, направленное параллельно пластине. Считая, что



вектора скоростей всех частиц направлены перпендикулярно вектору индукции поля, покажите, что частицы будут фокусироваться на пластине. Определите положение и ширину полосы, в пределах которой частицы будут попадать на пластину.

3. Определите форму и размеры области попадания частиц на пластину в условиях, описанных в п.2, если вектора скоростей частиц направлены внутри конуса с углом полураствора α_0 .

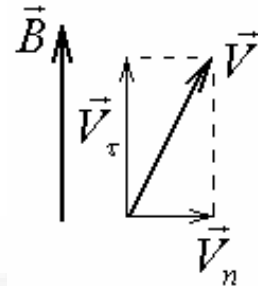
4. Пучок частиц массы m , влетает из одной точки в однородное магнитное поле индукции B , направленное вдоль оси Z . Скорости частиц равны v , а вектора скоростей частиц направлены внутри конуса с углом полураствора α_0 , ось которого совпадает с направлением вектора индукции поля. Найдите ширину пучка как функцию координаты z . Считая угол α_0 малым, найдите на каком расстоянии от источника частицы сфокусируются. Оцените ширину пучка в области фокуса.



Решение.

Первая часть задачи является очень известной и рассматривается во многих учебных пособиях, поэтому рассмотрим ее очень бегло, выделяя только наиболее существенные детали.

При движении заряженной частицы в магнитном поле на нее действует сила Лоренца, направленная перпендикулярно как вектору скорости $\vec{v}$, так и вектору магнитной индукции поля $\vec{B}$. Поэтому при описании движения заряженной частицы уместно разложить ее вектор скорости $\vec{v}$ на две компоненты: тангенциальную $v_\tau = v \cos \gamma$, параллельную вектору индукции и нормальную $v_n = v \sin \gamma$, перпендикулярную ему. При таком



разложении модуль силы Лоренца определяется нормальной компонентой и равен $F_m = qBv_n$. Так как вектор этой силы перпендикулярен вектору индукции, то в процессе движения тангенциальная компонента скорости будет сохраняться. Будет также сохраняться и модуль нормальной компоненты, нормальная сила не изменяет модуля скорости. Иными словами движение частицы в однородном магнитном поле можно представить в виде суперпозиции двух простых движений - равномерного и прямолинейного вдоль линий вектора индукции и движения по окружности в плоскости перпендикулярной вектору индукции. Рассмотрим движение в этой плоскости.

Радиус окружности найдем из элементарных рассуждений: постоянная по модулю нормальная к вектору скорости сила создает центростремительное ускорение, поэтому

$$\frac{mv_n^2}{R} = qv_n B. \quad (1)$$

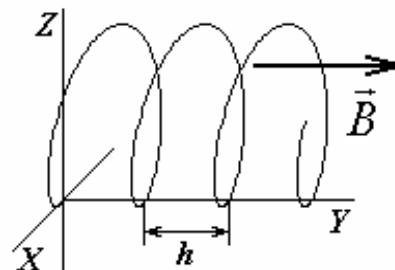
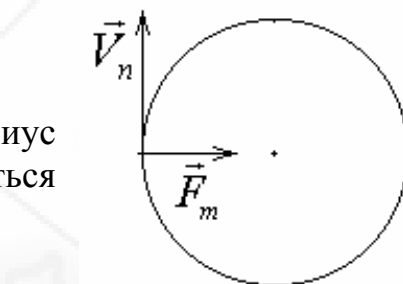
Из этого уравнения находим радиус окружности, по которой будет двигаться частица

$$R = \frac{mv_n}{qB}, \quad (2)$$

а затем период обращения

$$T = \frac{2\pi R}{v_n} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3)$$

Отметим, что время одного оборота и угловая скорость не зависят от скорости частицы. За время одного оборота частица сместится вдоль вектора индукции поля на величину



$$h = v_\tau T = \frac{2\pi m}{qB} v_\tau, \quad (4)$$

которое и будет равняться шагу спирали (если «объединить» два вида движения).

2. В данном случае все частицы будут двигаться в плоскости ZY по дугам окружностей одинакового радиуса, определяемого по формуле (2)

$$R = \frac{mv}{qB},$$

не зависящим от угла вылета частицы. Однако положение центра этой окружности зависит от угла вылета. (Для его определения необходимо провести отрезок перпендикулярный вектору начальной скорости и равный радиусу окружности. Как видно из рисунка, частица достигнет плоскости в точке с координатой

$$y = 2R \cos \alpha. \quad (5)$$

Обратите внимание - координата точки падения не зависит от знака угла, поэтому максимальное смещение вдоль оси Y будут иметь те частицы, которые вылетают из источника перпендикулярно плоскости¹. Рассчитаем также время движения частицы, которое нам понадобится в дальнейшем. До попадания на плоскость частица повернется на угол $(\pi - 2\alpha)$. Поэтому время движения рассчитывается по формуле

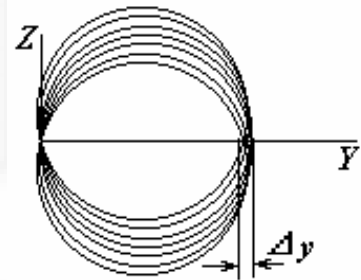
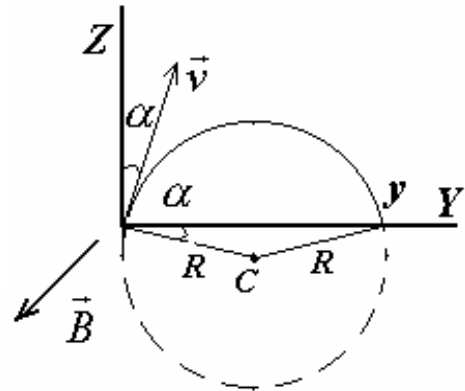
$$\tau = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} T = \frac{m}{qB} (\pi - 2\alpha). \quad (6)$$

Если угол α изменяется в небольших пределах, то координата точки падения будет изменяться мало. При малых α справедлива приближенная формула $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Поэтому ширина полосы, в пределах которой частицы попадают на плоскость, определяется формулой

$$\Delta y = R\alpha^2 = \frac{mv}{qB} \alpha_0^2, \quad (7)$$

а ее край расположен на расстоянии $2R$ от источника.

На рисунке показаны несколько траекторий частиц, вылетающих под разными углами к плоскости. Эффект фокусировки в данном случае математически проявляется в том, что изменение координаты квадратично зависит от малого угла вылета, поэтому является малой величиной второго порядка. Однако, как следует из формулы (6), различие во временах движения является малой величиной, того же порядка малости, что и угол α_0 .



¹ Этот вывод напоминает движение в поле тяжести: одной и той же дальности полета могут соответствовать два угла вылета: больший и меньший 45° , а максимальная дальность достигается при единственном значении угла вылета.

3. Рассмотрим движение частицы, направление вектора начальной скорости которой $\vec{v}$ определяется двумя углами:

α - угол между вектором скорости и осью Z (этот угол изменяется от 0 до предельного значения α_0 и является малым);

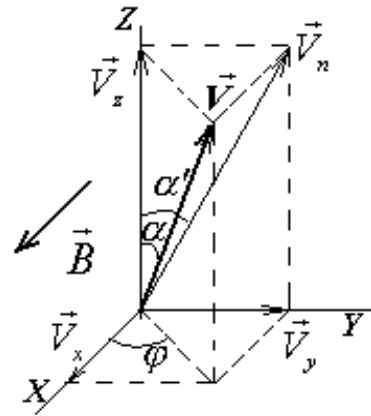
φ - угол между осью X и проекцией вектора скорости на плоскость XY .

Разложим вектор скорости на составляющие вдоль осей координат.

$$v_x = v \sin \alpha \cos \varphi$$

$$v_y = v \sin \alpha \sin \varphi . \quad (8)$$

$$v_z = v \cos \alpha$$



Проекция вектора скорости на плоскость YZ является нормальной компонентой вектора $\vec{v}_n$ по отношению к вектору индукции поля (кроме того, она является суммой компонент $\vec{v}_y$ и $\vec{v}_z$). Обозначим угол между нормальной компонентой вектора скорости $\vec{v}_n$ и осью Z через α' . Наличие компоненты скорости вдоль направления вектора индукции $\vec{v}_x$ приведет к равномерному смещению вдоль оси X , которое наложится на уже рассмотренное движение в плоскости YZ .

Так смещение частицы вдоль оси Y за время полета определяется формулой (5), в которой угол α следует заменить на α' . То есть в момент падения на плоскость XY

$$y = 2 \frac{mv_n}{qB} \cos \alpha' = 2 \frac{mv_z}{qB} = 2 \frac{mv}{qB} \cos \alpha \approx 2 \frac{mv}{qB} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right). \quad (9)$$

При выводе этой формулы учтено, что $v_n \cos \alpha' = v_z$. Интересно отметить, что координата y не зависит от угла φ - то есть все частицы, вылетевшие под одним углом α к оси Z в момент падения «выстроятся» на плоскости XY на одну прямую.

Смещение вдоль оси X рассчитаем по формуле $x = v_x \tau$, где время движения τ можно найти по формуле (6) с очевидной заменой α на α' .

Последний определяется соотношением $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v_y}{v_z} = \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha$. Или

$\alpha' = \operatorname{arctg}(\sin \varphi \operatorname{tg} \alpha)$, при малых углах эту формулу можно заменить приближенной

$$\alpha' \approx \alpha \sin \varphi . \quad (10)$$

В момент попадания на плоскость координата x вычисляется по формуле

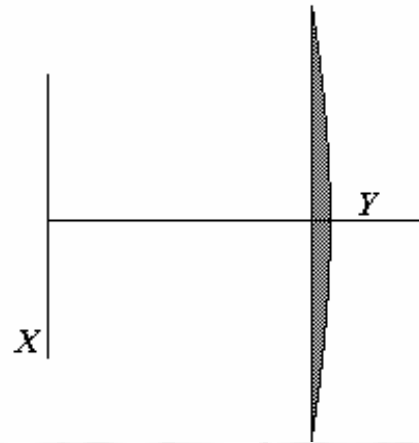
$$x = v \sin \alpha \cos \varphi \frac{m}{qB} (\pi - 2\alpha \sin \varphi) \approx \alpha \frac{\pi m v}{qB} \cos \varphi. \quad (11)$$

На последнем шаге преобразований мы пренебрегли вторым слагаемым, имеющим второй порядок малости по углу α . Таким образом, при фиксированном значении угла α координата x будет изменяться в пределах от $+\alpha \frac{\pi m v}{qB}$ до $-\alpha \frac{\pi m v}{qB}$ при изменении φ в пределах полного угла. Формулы

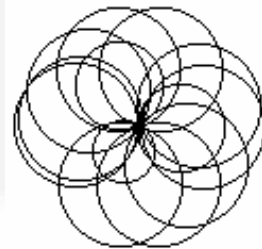
(9), (11) и определяют границы области попадания частиц на плоскости XU . Выразим из формулы (11) величину α как функцию предельного значения x и подставим в формулу (9):

$$\alpha = \frac{qB}{\pi m v} x; \quad y = 2 \frac{m v}{qB} - x^2 \frac{qB}{\pi^2 m v}. \quad (12)$$

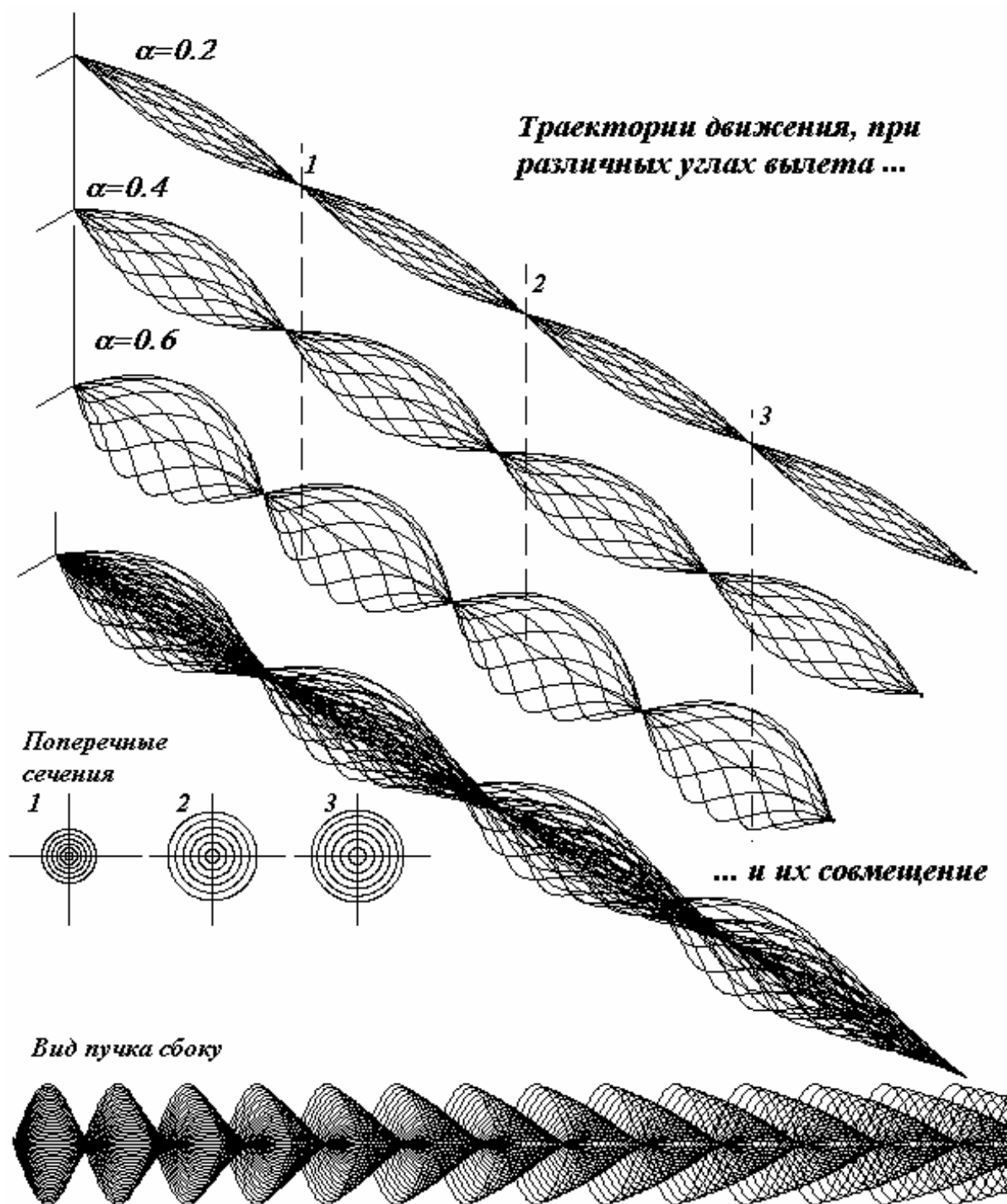
Функция (12) явно определяет границу области попадания частиц. Отметим, что изменение координаты y имеет второй порядок малости по углу α_0 (фокусировка), а отклонение в перпендикулярном направлении пропорционально этому предельному углу.



4. Воспользуемся результатами п.1. Движение каждой частицы будет происходить по спирали, радиус которой зависит от угла вылета частицы. Причем все спирали не будут соосны, а будут касаться одной прямой - оси пучка. Если спроецировать движение всех частиц на плоскость перпендикулярную оси пучка (и вектору индукции поля), то все частицы будут двигаться по окружностям различного радиуса, проходящим через одну точку - источник частиц. Так как период обращения частицы в магнитном поле не зависит от ее скорости, движение частиц по этим окружностям будет «согласованным», они будут возвращаться к оси пучка одновременно. В трехмерном пространстве семейство траекторий частиц будет представлять собой набор цилиндрических спиралей, касающихся оси пучка своими боковыми сторонами. Если угол вылета частиц к вектору магнитной индукции мал, то проекции скорости v_{τ} будут изменяться крайне мало, поэтому все траектории-спирали будут иметь приблизительно одинаковый шаг, следовательно на расстоянии шага спирали будет наблюдаться эффект фокусировки частиц.



На рисунке продемонстрирован графически данный эффект. Для наглядности предельный угол вылета сильно преувеличен.



Рассмотрим группу частиц вылетевших под одинаковыми углами α к оси пучка. За некоторый промежуток времени t они пройдут дугу окружности

$\varphi = \frac{2\pi}{T}t$, радиуса $R = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv}{qB} \sin \alpha$. Тем самым удалятся на расстояние

$r = 2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|$ (что и будет являться радиусом пучка этих частиц) от оси пучка

и сместятся на расстояние $x = v_t t = vt \cos \alpha$ вдоль этой оси. Выражая t как функцию x и подставляя в формулу для r , получим зависимость радиуса пучка от координаты x :

$$t = \frac{x}{v \cos \alpha}; \quad r = 2 \frac{mv}{qB} \sin \alpha \cdot \left| \sin \left(\frac{\pi}{T} \cdot \frac{x}{v \cos \alpha} \right) \right| = 2 \frac{mv}{qB} \sin \alpha \cdot \left| \sin \left(\frac{qB}{2mv \cos \alpha} x \right) \right|. \quad (13)$$

Теперь необходимо учесть, что частицы вылетают под различными углами, изменяющимися в пределах от 0 до α_0 . Поэтому, строго говоря, для определения радиуса всего пучка необходимо для каждого значения x найти максимальное значение функции (13) при изменении угла вылета в указанных пределах. Однако, учитывая малость этих углов, мы можем положить $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, тогда ширина пучка будет определяться частицами, вылетевшими под максимальным углом, то есть искомая функция зависимости радиуса пучка от координаты x имеет вид

$$r = 2 \frac{mv}{qB} \alpha_0 \cdot \left| \sin \left(\frac{qB}{2mv} x \right) \right|. \quad (14)$$

Следовательно, частицы будут фокусироваться на расстояниях x_k , удовлетворяющих условию

$$\frac{qB}{2mv} x_k = \pi k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \text{ или } x_k = \frac{\pi qB}{2mv} k. \quad (15)$$

Заметим, что наилучшая фокусировка будет наблюдаться для малых значений k .

Для определения ширины пучка в области фокуса необходимо учесть зависимость продольной компоненты скорости от угла вылета (вспомнить, что косинус малого угла все-таки меньше 1). Найдем ширину пучка в области фокуса. Для этого преобразуем выражение (13)

$$\begin{aligned} r &= 2 \frac{mv}{qB} \sin \alpha \cdot \left| \sin \left(\frac{qB}{2mv \cos \alpha} x_k \right) \right| \approx 2 \frac{mv}{qB} \alpha \left| \sin \frac{k\pi}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \right| \approx \\ &\approx 2 \frac{mv}{qB} \alpha \left| \sin k\pi \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \right| \approx \frac{\pi mv}{qB} k \alpha^3. \end{aligned} \quad (15)$$

Максимальное значение этой функции соответствует максимальному углу вылета, поэтому ширина пучка в области k -того фокуса определяется формулой

$$r \approx \frac{\pi mv}{qB} k \alpha_0^3. \quad (16)$$

Как следует из этого выражения, ширина пучка имеет третий (!) порядок малости, но линейно возрастает с номером фокуса.

Задача 16.

Опишите прохождение световых лучей через центрированную оптическую систему состоящую из сферических преломляющих поверхностей, центры которых лежат на одной прямой, которая называется оптической осью системы. Заметим, что таким системам относятся телескопы, микроскопы, фотоаппараты, диапроекторы, глаза человека и т.д. Такие системы обладают осевой симметрией, поэтому достаточно рассмотреть ход лучей в одной плоскости, содержащей оптическую ось.

Пусть (см. рис.1) OO_1 - оптическая ось системы, проведем произвольную плоскость P , перпендикулярную оси. Произвольный луч AB , пересекающий плоскость P однозначно определяется двумя параметрами: x - расстоянием от оптической оси до точки пересечения луча и плоскости, α - углом между направлением луча и оптической осью (договоримся отсчитывать этот угол в направлении «против хода часовой стрелки»). Очевидно, что параметры луча (x, α) могут быть как положительными так и отрицательными. Кроме того, будем полагать их малыми настолько, что везде, где это необходимо, будем считать синус и тангенс угла α равным величине самого угла, естественно, измеренному в радианах. Такое приближение называется параксиальным (близким к оси). В данном приближении в любой центрированной системе связь между параметрами одного и того же луча в разных плоскостях линейна, сколько бы преломляющих поверхностей не находилось между ними. Рассмотрите изменение этих параметров, когда луч проходит через следующие простые элементы оптической системы.

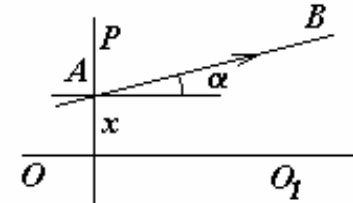


Рис.1

1. **Участок пустого пространства.** Пусть между двумя плоскостями P_0 (входной) и P_1 (выходной), находящихся на расстоянии d друг от друга, преломляющих поверхностей нет (рис.2). Установите связь между выходными (x_1, α_1) и входными (x_0, α_0) параметрами луча.

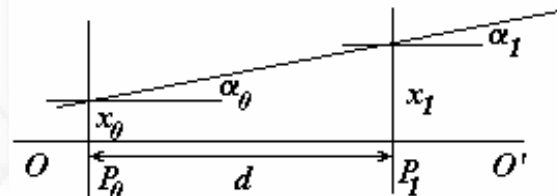


Рис.2

2 **Сферическая преломляющая поверхность.** Луч преломляется на сферической поверхности радиуса R , за которой находится среда с относительным (второй среды относительно первой) показателем преломления n . Установите связь между выходными (x_1, α_1) и входными (x_0, α_0) параметрами луча.

3. **Тонкая линза.** Линза представляет собой две сферические поверхности, она считается «тонкой», если можно пренебречь горизонтальным смещением луча в самой линзе, иными словами, если ее толщина значительно меньше радиусов кривизны ее поверхностей. Покажите, что связь между выходными

(x_1, α_1) и входными (x_0, α_0) параметрами луча, прошедшего через тонкую линзу, с радиусами кривизны поверхностей R_1, R_2 и показателем преломления n , выражается формулами

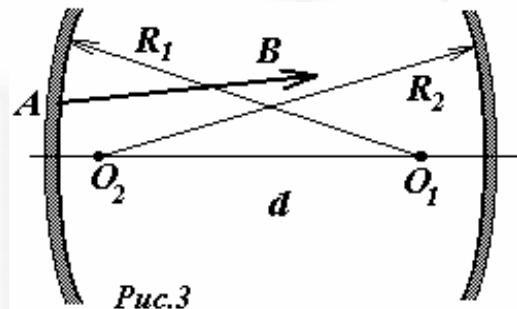
$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \alpha_1 = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot x_0 + \alpha_0 \end{cases}$$

4. Используя результаты п. 3, получите формулу для фокусного расстояния F тонкой линзы.

5. Получите «формулу тонкой линзы», связывающую расстояние от предмета до линзы a с расстоянием от линзы до изображения b :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

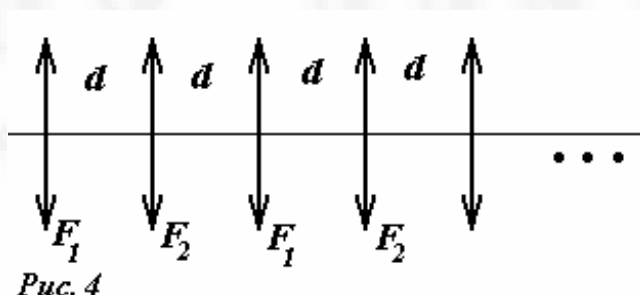
6. Рассмотрите оптическую систему состоящую из двух сферических зеркал, повернутых навстречу друг другу (рис. 3). Обозначим радиусы кривизны одного зеркала R_1 (его центр точка O_1); другого - R_2 (центр - O_2); расстояния между зеркалами - d . Цель исследования - выяснить при каких параметрах системы произвольный световой луч AB не будет покидать данную оптическую систему.



Рассматриваемая нами система является оптическим резонатором, повсеместно используемым в оптических квантовых генераторах (лазерах). Если для него выполняется условие задачи, то такой резонатор называется устойчивым, в противном случае неустойчивым.

Заменим систему зеркал на бесконечную цепочку линз (рис. 4), фокусные расстояния которых равны фокусным расстояниям зеркал, которые, в свою очередь, известны

$$F_1 = \frac{R_1}{2}; \quad F_2 = \frac{R_2}{2}.$$



Понятно, что такая система полностью эквивалентна резонатору.

6.1 Используя линейные преобразования, полученные ранее, запишите формулы преобразований для произвольного луча за полный проход резонатора. Выразите формулы этих преобразований через безразмерные

параметры, определяющие геометрию оптической системы $\xi_1 = 1 - \frac{d}{R_1}$,

$$\xi_2 = 1 - \frac{d}{R_2}.$$

6.2 В некоторых случаях явные выражения для параметров луча могут быть представлены в виде $x_n = A\gamma^n$; $y_n = B\gamma^n$, где γ - некоторая постоянная. Выразите возможные значения этого параметра параметры системы ξ_1, ξ_2 .

При каком соотношении между параметрами ξ_1, ξ_2 , резонатор будет устойчивым? Изобразите область устойчивости на диаграмме (ξ_1, ξ_2) .

Решение.

1. Связь между выходными (x_1, α_1) и входными (x_0, α_0) параметрами луча выражается очевидными формулами (см. рис.1)

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha_0 d \\ \alpha_1 = \alpha_0 \end{cases}, \quad (1)$$

где учтена малость угла α , поэтому, как было сказано ранее $\tan \alpha \approx \alpha$.

2. Сферическая преломляющая поверхность.

Пусть луч AB (рис.5) преломляется на сферической поверхности Ω радиуса R (а центр кривизны точка C), за которой находится среда с относительным (второй среды относительно

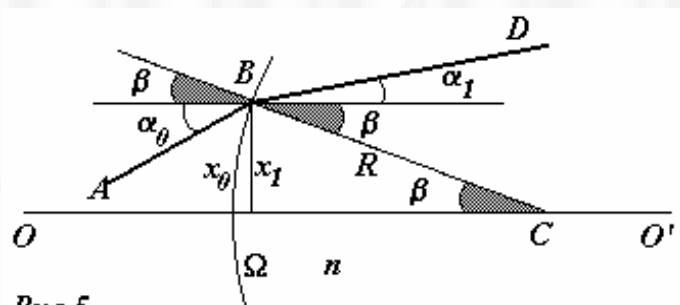


Рис.5

первой) показателем преломления n . Преломленный луч - BD . Так как параметры x малы, можно считать, что смещение точки пересечения луча с поверхностью в вертикальном направлении, не смещает ее в горизонтальном направлении. Совместим входную и выходную плоскости (на рисунке не показаны), тогда, очевидно $x_1 = x_0$. Проведем радиус поверхности в точку пересечения луча, этот отрезок CB является нормалью к поверхности. Закон преломления можно записать в виде

$$\sin(\alpha_0 + \beta) = n \sin(\alpha_1 + \beta),$$

учитывая малость всех углов, получим $\alpha_0 + \beta \approx n(\alpha_1 + \beta)$, кроме того, можно

заметить, что $\beta = \frac{x_0}{R}$. Из этих соотношений без труда можно найти угол α_1 .

Запишем окончательные формулы преобразования параметров луча при переходе через сферическую преломляющую поверхность

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \alpha_1 = -\frac{n-1}{nR}x_0 + \frac{1}{n}\alpha_0 \end{cases} \quad (2)$$

Покажите самостоятельно, что если преломляющая поверхность повернута в другую сторону (ее центр находится слева), то в формулах преобразования необходимо считать радиус кривизны поверхности отрицательным.

3. Тонкая линза представляет собой две сферические поверхности, причем ее толщина значительно меньше радиусов ее поверхностей.

Для того, чтобы описать ход луча через такую систему (рис.6) необходимо дважды рассмотреть его преломление - на передней и задней сферических поверхностях. Введем три плоскости, в которых будем рассматривать параметры луча: входную, непосредственно перед линзой - P_0 ; промежуточную, внутри линзы - P_1 ; выходную, сразу за линзой - P_2 . (Так линза

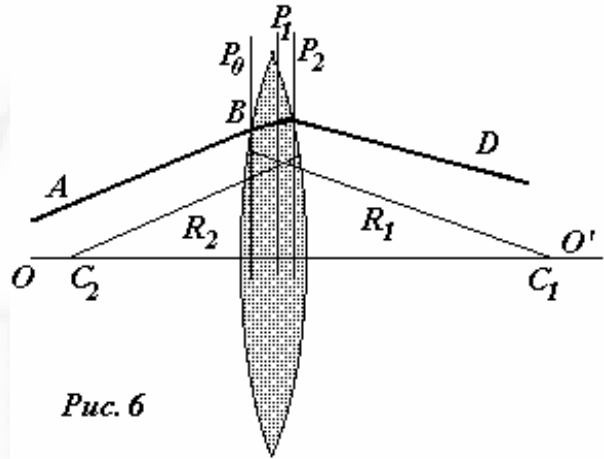


Рис. 6

тонкая, то все эти плоскости совпадают). Формулы преобразования параметров луча при переходе через сферическую поверхность нами получены, воспользуемся ими. Пусть входные параметры луча (x_0, α_0) , тогда в промежуточной плоскости P_1 параметры луча (x_1, α_1) определяются формулами (2), в которых следует положить $R = R_1$ радиусу первой преломляющей поверхности :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \alpha_1 = -\frac{n-1}{nR_1}x_0 + \frac{1}{n}\alpha_0 \end{cases} \quad (3)$$

«Переход» через вторую поверхность описывается теми же формулами, в которых надо считать $R = -R_2$ (так как центр кривизны с другой стороны) и

заменить n на $\frac{1}{n}$, так как в этом случае луч выходит из линзы:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ \alpha_2 = -\frac{n-1}{R_2}x_1 + n\alpha_1 \end{cases} \quad (4)$$

Осталось подставить выражения (3) для промежуточных параметров, чтобы получить окончательные выражения для формул преобразования параметров луча в тонкой линзе

$$\begin{cases} x_2 = x_0 \\ \alpha_2 = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot x_0 + \alpha_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_0 \\ \alpha_2 = -\frac{x_0}{F} + \alpha_0 \end{cases} . \quad (5)$$

Коэффициент при x_0 во второй формуле обозначим $-\frac{1}{F}$, где F - некоторая характеристика линзы, имеющая размерность длины.

4. Пусть на тонкую линзу падает пучок лучей, параллельных оптической оси линзы (см. рис.7, который здесь уже и не нужен - все «нарисовано» в формулах преобразований).

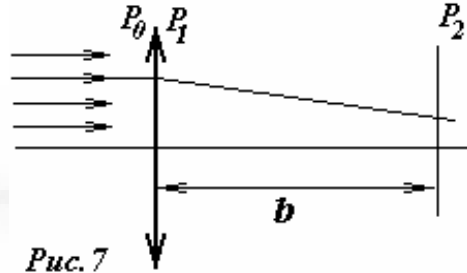


Рис. 7

Расположим входную плоскость непосредственно перед линзой, здесь $\alpha_0 = 0$ а x_0 изменяется от луча к лучу (можно сказать, что эта пара параметров, один из которых постоянен, а второй варьируется, описывает пучек лучей). На выходе из линзы параметры лучей находим по формулам (5),

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \alpha_1 = -\frac{x_0}{F} \end{cases} . \quad (6)$$

Найдем параметры пучка на некотором расстоянии b за линзой с помощью формул преобразования (1)

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \alpha_1 b \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_0 \left(1 - \frac{b}{F}\right) \\ \alpha_2 = -\frac{1}{F} x_0 \end{cases} .$$

Если положить $b = F$, то при любом значении x_0 выходной параметр $x_2 = 0$. Это и означает, что все лучи пересекутся в одной точке на оптической оси на расстоянии F от линзы. Иными словами, мы доказали, что введенная величина F является фокусным расстоянием линзы.

Покажите самостоятельно, что пучек параллельных лучей, падающий на линзу под некоторым углом α_0 , после преломления в линзе также сойдется в одной точке, которая находится на расстоянии F от линзы.

5. Выведем «формулу линзы». Пусть точечный источник находится на оптической оси тонкой линзы расстоянии a от нее. Пучок расходящихся от источника лучей имеет параметры-

изначально $x_0 = 0$, угол α_0 - произвольный;
на входе в линзу (применяем преобразования (1))

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_0 a \\ \alpha_1 = \alpha_0 \end{cases};$$

на выходе из линзы (преобразование (5)) :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ \alpha_2 = -\frac{x_1}{F} + \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \alpha_0 a \\ \alpha_2 = \alpha_0 \left(1 - \frac{a}{F}\right) \end{cases};$$

на расстоянии b от линзы :

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + \alpha_2 b \\ \alpha_3 = \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \alpha_0 \left(a + b - \frac{ab}{F}\right) \\ \alpha_3 = \alpha_0 \left(1 - \frac{a}{F}\right) \end{cases}. \quad (7)$$

Видно, что при выполнении условия

$$a + b = \frac{ab}{F} \quad (8)$$

параметр x_3 обращается в нуль при любом значении α_0 . То есть все лучи исходного пучка собираются на оптической оси на расстоянии b , удовлетворяющем уравнению, которое непосредственно следует из выражения (8),

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (9)$$

Как видите, рассматриваемая методика легко и просто приводит к известной формуле линзы, при чем ее вывод сводится к трем линейным подстановкам.

Таким же образом можно рассчитать ход луча и в толстой линзе. Если в системе линз больше одной, то принципиально ничего не изменяется: задайте параметры исходного луча, затем их преобразовывайте: пустой участок - по формулам (1), сферическая поверхность - по формулам (2); тонкая линза - по формулам (5).

6.1 Будем рассматривать лучи, идущие на небольшом расстоянии x от оптической оси и под малыми углами α к ней, так чтобы можно было пользоваться параксиальным приближением. Запишем формулы преобразования параметров луча, при его прохождении через «один период» нашей бесконечной цепочки (рис.8). Пусть после первой линзы параметры луча (x_0, α_0) , затем эти параметры будут преобразовываться по уже известным формулам

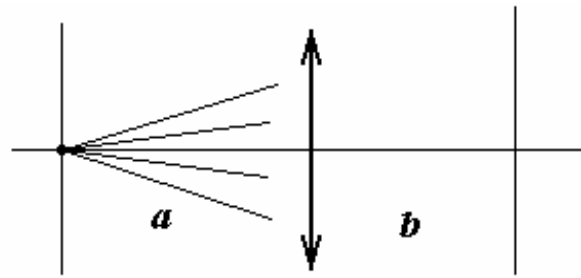
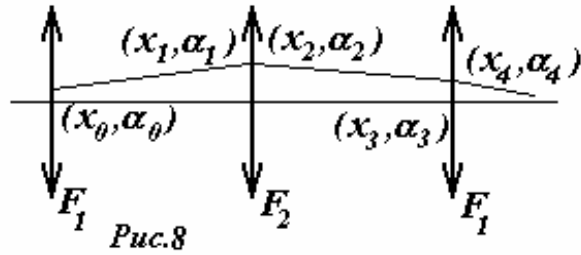


Рис. 7

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha_0 d \\ \alpha_1 = \alpha_0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ \alpha_2 = -\frac{x_1}{F_2} + \alpha_1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + \alpha_2 d \\ \alpha_3 = \alpha_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4 = x_3 \\ \alpha_4 = -\frac{x_3}{F_1} + \alpha_3 \end{cases}$$



Проводя последовательные подстановки, выразим (x_4, α_4) непосредственно через (x_0, α_0)

$$\begin{cases} x_4 = x_0 \left(1 - \frac{2d}{R_2}\right) + \alpha_0 \left(2d - \frac{2d^2}{R_2}\right) \\ \alpha_4 = x_0 \left(\frac{4d}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2}\right) + \alpha_0 \left(1 + \frac{4d^2}{R_1 R_2} - \frac{2d}{R_1} - \frac{4d}{R_2}\right) \end{cases}. \quad (10)$$

При использовании безразмерных параметров $\xi_1 = 1 - \frac{d}{R_1}$, $\xi_2 = 1 - \frac{d}{R_2}$

рекуррентные соотношения (10) принимают вид

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} \cdot (2\xi_2 - 1) + \alpha_{n-1} \cdot 2\xi_2 \\ \alpha_n = x_{n-1} \cdot (4\xi_1 \xi_2 - 2\xi_1 - 2\xi_2) + \alpha_{n-1} \cdot (4\xi_1 \xi_2 - 2\xi_2 - 1) \end{cases}, \quad (11)$$

где переобозначено (x_n, α_n) - параметры луча, после n полных проходов через резонатор.

6.2 Пусть последовательность пар чисел (x_n, α_n) задается своими начальными значениями (x_0, α_0) и линейными соотношениями

$$\begin{cases} x_n = ax_{n-1} + b\alpha_{n-1} \\ \alpha_n = cx_{n-1} + g\alpha_{n-1} \end{cases}, \quad (12)$$

где a, b, c, g - постоянные коэффициенты. Эти зависимости являются своеобразным обобщением геометрической прогрессии, которая может быть определена соотношением $x_n = ax_{n-1}$, из которого следует $x_n = x_0 a^n$. Попробуем и в «двумерном случае» (12) найти явные выражения в виде

$$x_n = A\gamma^n; \alpha_n = B\gamma^n. \quad (13)$$

После подстановки этих выражений в (12) и сокращений получим

$$\begin{cases} A\gamma = aA + bB \\ B\gamma = cA + gB \end{cases}, \text{ а после перестановки } \begin{cases} A(\gamma - a) = bB \\ cA = (\gamma - g)B \end{cases}. \quad (14)$$

Эта пара уравнений может иметь отличные от нуля значения параметров A, B только при условии пропорциональности коэффициентов

$$\frac{\gamma - a}{c} = \frac{b}{\gamma - g}. \quad (15)$$

Как видите, решение в виде (13) может существовать только для тех значений γ , которые удовлетворяют квадратному уравнению (15).

Преобразуем его к стандартному виду

$$\gamma^2 - \gamma(a + g) + (ag - bc) = 0. \quad (16)$$

Обозначим корни этого уравнения γ_1, γ_2 , тогда

$$\gamma_{1,2} = \frac{a + g}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a + g}{2}\right)^2 - (ag - bc)} = 2\xi_1\xi_2 - 1 \pm \sqrt{(2\xi_1\xi_2 - 1)^2 - 1}. \quad (17)$$

Явные выражения для последовательности (12) будут иметь вид (с учетом связи между коэффициентами (14))

$$\begin{cases} x_n = A_1\gamma_1^n + A_2\gamma_2^n \\ y_n = A_1\frac{\gamma_1 - a}{b}\gamma_1^n + A_2\frac{\gamma_2 - a}{b}\gamma_2^n \end{cases}. \quad (18)$$

При записи последних соотношений учтено, рекуррентные соотношения являются линейными, поэтому сумма двух решений, соответствующих разным значениям γ , также является решением. Неопределенные пока значения коэффициентов A_1, A_2 находятся из начальных значений последовательности. Таким образом, находится явный вид зависимости членов последовательности. Очевидно, что для того чтобы значения (x_n, y_n) не возрастали до бесконечности необходимо, чтобы оба корня уравнения (16) по модулю не превосходили единицы $|\gamma_1|, |\gamma_2| \leq 1$.

Применим полученные формулы к рассматриваемому нами резонатору. Элементарные преобразования показывают, что для системы (11) свободный член квадратного уравнения (16) $ab - cg = 1$. Тогда, согласно теореме Виета, произведение его корней $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$, следовательно, если один из корней меньше единицы, то второй ее превышает. Таким образом, для нашей системы не существует устойчивых решений в форме (13)!

Поэтому условие устойчивости резонатора - когда уравнение (16) не имеет вещественных корней - когда его дискриминант отрицателен. Опуская алгебраические выкладки запишем это условие

$$0 < \xi_1\xi_2 < 1. \quad (19)$$

Согласитесь, метод нашего решения весьма странный - фактически, мы записали условия, когда мы не знаем решения. Тем не менее, неравенства

(11) действительно определяют условия устойчивости оптического сферического резонатора.

Простота этих неравенств оправдывает введение безразмерных параметров (ξ_1, ξ_2) . Изобразим также графически область устойчивости - на рис.4 она заштрихована.

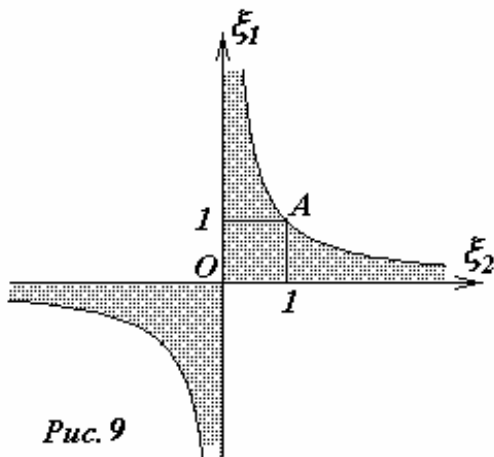


Рис. 9

Отметим, что резонатор с плоскими зеркалами ($\xi_1 = \xi_2 = 1$), или даже с одним плоским зеркалом находится на границе устойчивости и является неустойчивым. Также неустойчив резонатор, у которого $R_1 = R_2 = d$ ($\xi_1 = \xi_2 = 0$). Но существуют устойчивые резонаторы, одно из зеркал которых является рассеивающим - найдите

соответствующие точки на диаграмме устойчивости.

Задача 17.

«Объясняя» возникновение радуги, авторы учебных пособий весьма часто ограничиваются указанием на то, что это замечательное природное явление демонстрирует явление дисперсии света. Иногда приводят типичный рисунок двойного преломления луча света в сферической капле воды (рис. 1), позаимствованный еще из работы Р.Декарта. Приведенные утверждения справедливы: действительно изображение радуги формируют солнечные лучи дважды преломившиеся на поверхности капли (и конечно, один раз отразившиеся от ее внутренней поверхности); действительно показатель преломления воды зависит от длины волны падающего света, поэтому углы выхода лучей из капли различны для различных длин волн. Однако объяснение и описание радуги не столь просто, как это кажется на первый взгляд, хотя эффекты данного явления вполне объяснимы в рамках геометрической оптики.

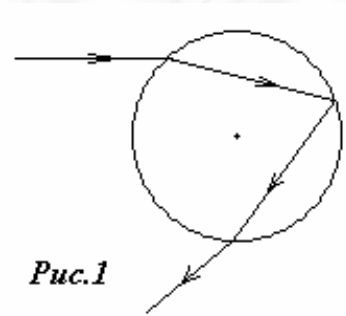


Рис.1

Рассмотрим прохождение лучей через сферическую каплю.

Назовем оптической осью прямую O_1O_2 , проходящую через центр капли и параллельную падающему лучу S_0 . Обозначим:

S_1 - луч, сразу отразившийся от поверхности капли;

S_2 - луч, испытавший два преломления на поверхности капли;

S_3 - луч, испытавший два преломления и одно отражение внутри капли;

S_4 - луч, испытавший два преломления и два отражения внутри капли.

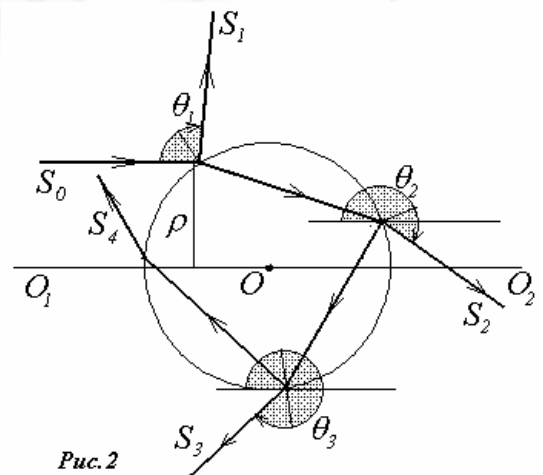


Рис. 2

Углы, под которыми лучи отходят от капли $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, будем отсчитывать от оптической оси. Назовем прицельным параметром ρ отношение расстояния между падающим лучом и оптической осью к радиусу капли. (Для лучей, падающих на каплю, этот параметр изменяется от -1 до $+1$).

1. Найдите зависимости углов, под которыми лучи отходят от капли $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, от прицельного параметра ρ .

2. Покажите, что зависимости углов θ_1, θ_2 от прицельного параметра ρ являются монотонными. Покажите, что для лучей S_3, S_4 существуют минимальные значения углов отклонения θ_3, θ_4 . Найдите значения этих минимальных углов.

3. Покажите, что лучи, вышедшие из различных капель под одинаковыми углами к оптической оси, расположенных в разных точках пространства, дают изображение на сетчатке глаза в виде дуги окружности. Постройте ход этих лучей в глазу человека.

4. Покажите, что минимальным углом отклонения соответствует яркая граница, которая определяет угловой размер радуги.

5. Вычислите угловой наблюдаемый размер α основной и вторичной радуги. (На рис.3 показана только одна из них)

6. Вычислите угловую ширину $\delta\alpha$ каждой дуги радуги.

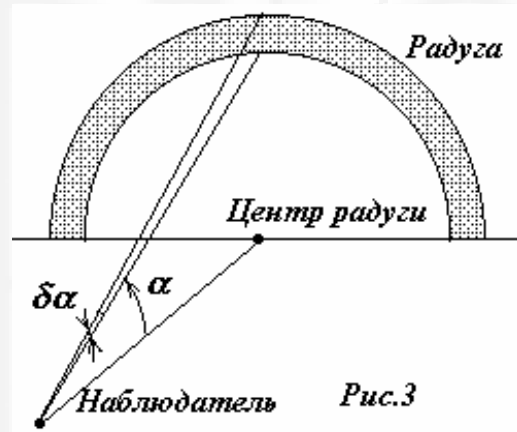


Рис.3

Значения показателя преломления воды, для различных длин волн.

Длина волны (нм), цвет	759,0 (красный)	589,8 (желтый)	486,0 (голубой)	397,0 (фиолетовый)
Показатель преломления	1,329	1,333	1,337	1,344

Решение.

1.

Используя рис.4 и законы отражения и преломления света, легко получить

$$\theta_0 = \arcsin \rho, \quad \beta = \arcsin\left(\frac{t}{r}\right) \quad (1)$$

Тогда искомые углы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2\theta_0; \\ \theta_2 &= 2\theta_0 + \alpha; \\ \theta_3 &= 2\theta_0 + 2\alpha; \\ \theta_4 &= 2\theta_0 + 3\alpha; \end{aligned} \quad (2)$$

которые можно записать в общем виде

$$\begin{aligned} \theta_k &= 2\theta_0 + (k-1)\alpha = \\ &= 2\arcsin \rho + 2(k-1)\pi - 2(k-1)\arcsin\left(\frac{\rho}{n}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

2. Вычислим производную от функции (3)

$$\theta'_k = \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2(k-1)}{\sqrt{n^2-\rho^2}} \quad (4)$$

и приравняем ее к нулю. Тем самым получим уравнение для определения значения ρ , при котором эта функция достигает экстремума -

$$n^2 - \rho^2 = (k-1)^2 (1 - \rho^2), \quad (5)$$

При $k-1 > 2$ уравнение (5) имеет корни

$$\rho^* = \pm \sqrt{\frac{(k-1)^2 - n^2}{(k-1)^2 - 1}}. \quad (6)$$

При $k \leq 2$ уравнение (5) корней не имеет. Следовательно, углы отклонения лучей S_0, S_1, S_2 изменяются монотонно, а для углов отклонения лучей S_3, S_4 существуют экстремальные значения, можно показать, что эти экстремумы являются точками минимума.

В пределах видимого диапазона показатель воды изменяется незначительно, поэтому вычислим минимальные углы отклонения для желтого цвета. Для

лучей S_3 $\rho^* = \sqrt{\frac{4 - 1,333^2}{4 - 1}} \approx 0,861.$

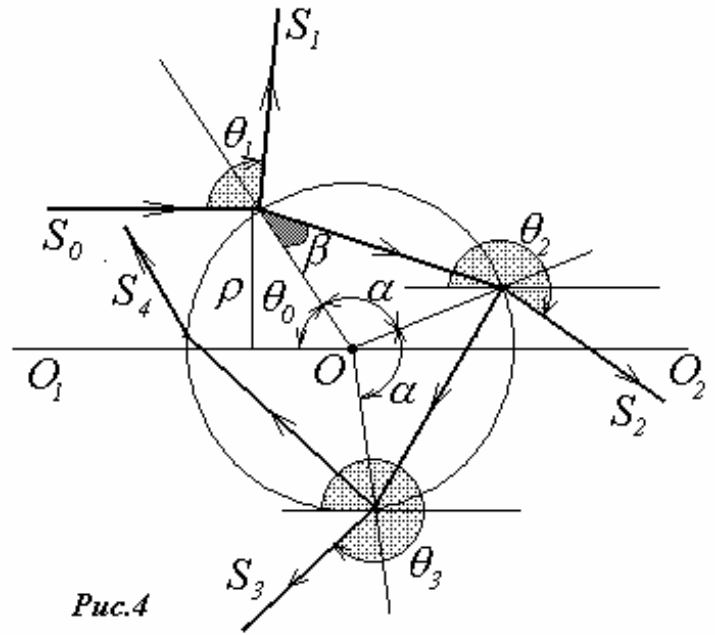


Рис.4

Этому значению соответствует угол отклонения (рассчитанный по формуле (4) при $k = 3$)

$$\theta_{3min} \approx 317,9^\circ. \quad (7)$$

Для лучей S_4 $\rho^* = \sqrt{\frac{9 - 1,333^2}{9 - 1}} \approx 0,950$, и соответствующий угол отклонения (рассчитанный по формуле (4) при $k = 4$)

$$\theta_{4min} \approx 410,9^\circ. \quad (8)$$

Построим графики (рис. 5) зависимостей этих углов от параметра ρ (конечно, вручную сделать это затруднительно, но с помощью компьютера проблем не представляет). Обратите внимание, углы θ_1, θ_2 монотонно возрастают при увеличении параметра ρ . В то же время углы θ_3, θ_4 сначала уменьшаются, достигают минимума, а затем начинают возрастать. Это значит, что при увеличении расстояния от оптической оси отклонение луча уменьшается, достигает предельного значения, затем начинает возрастать. На рис.6 показан ход лучей S_3 вблизи точки минимального отклонения.

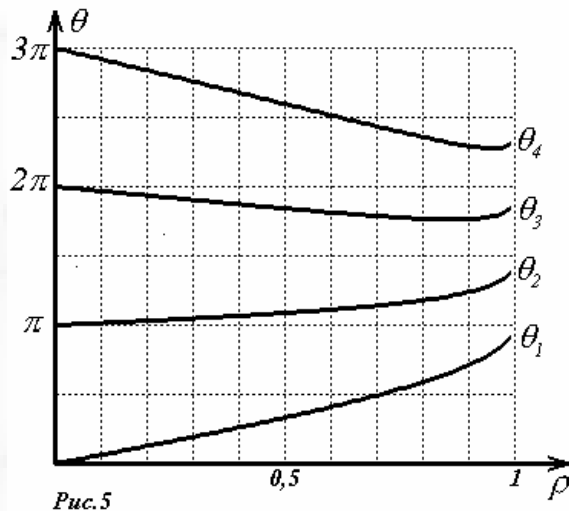


Рис.5

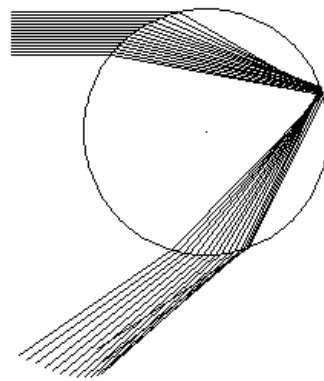


Рис.6

3. При наблюдении радуги глаз человека аккомодируется (настраивается) «на бесконечность», то есть

фокусное расстояние хрусталика равняется расстоянию до сетчатки. Следовательно, лучи попадающие в глаз человека параллельно друг другу независимо от их источника, после преломления в хрусталике соберутся на сетчатке в одной точке.

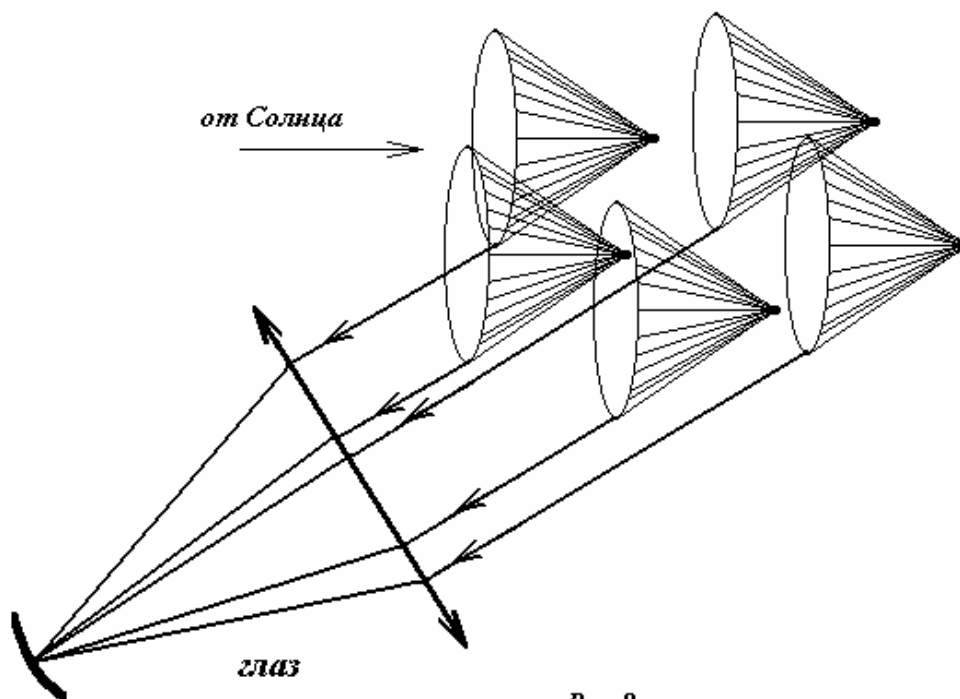


Рис. 8

Так как конусы лучей, выходящие из капли под одинаковыми углами к оптической оси, обладают осевой симметрией, то на сетчатке они образуют кольцо. Обратите внимание, что при обычных условиях наблюдения радуги, в глаз человека попадут лучи, которые выходят из капель только «вниз», поэтому на сетчатке будет сформирована только часть кольца, расположенная на нижней части сетчатки. Однако, изображение всех предметов на сетчатке является перевернутым (обратный поворот осуществляет мозг человека!), поэтому человек воспринимает эту часть кольца как обращенную выпуклостью вверх..

4. Наличие точки экстремума для лучей является настоящей катастрофой², так как вблизи этого предельного значения концентрируется значительная часть светового потока. Если отнестись к понятию силы света (световой поток в единицу телесного угла) формально, по определению

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \quad (9)$$

(где Φ - световой поток, Ω - телесный угол), то вблизи точки экстремума $d\Omega \rightarrow 0$, следовательно $I \rightarrow \infty$. С физической точки зрения, конечно, сила света не обращается в бесконечность, так как величина «бесконечно малого» телесного угла ограничена снизу (например, размером зрачка человеческого глаза).

² Название «катастрофа» является в данном случае строгим математическим термином, существует даже математическая теория катастроф.

Поясним эффект резкого возрастания силы света вблизи точки минимума с помощью графика (рис.7) зависимости $\theta(\rho)$. Выделим два участка одинаковой ширины³ $\Delta\theta$ - один на участке монотонности, а другой в районе минимума. Хорошо видно, что во втором случае ширина интервала $\Delta\rho^*$ значительно больше!

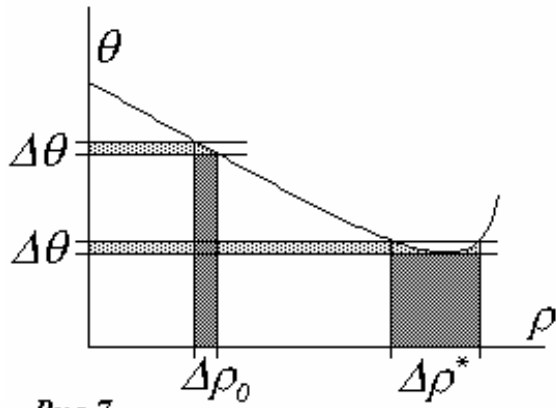


Рис.7

Более того, можно утверждать, что если $\Delta\theta$ является малой величиной, то $\Delta\rho_0$ является малой величиной того же порядка, а $\Delta\rho^*$ малой величиной не является.

Все эти рассуждения и демонстрируют, что значительная доля падающих лучей концентрируется вблизи точки минимального отклонения, которую мы и наблюдаем как дугу радуги.

Именно наличие минимума в угле отклонения лучей является основной (и не очевидной) причиной возникновения радуги.

5. Фактически мы уже получили все необходимые данные, чтобы найти угловой размер радуги. Как показано в п.4. дуге соответствуют углы минимального отклонения, которые были вычислены в п.3.

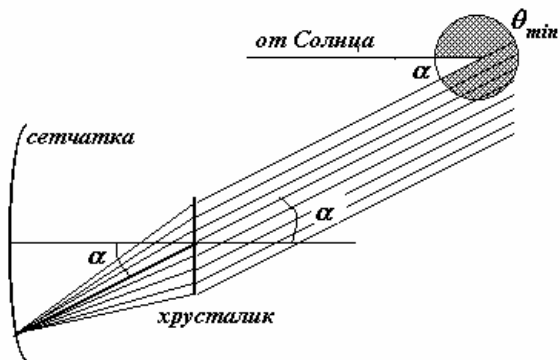
Рассмотрим еще раз преломление этих лучей в глазу человека (мы изобразим ход лучей только в одной плоскости, содержащей оптическую ось глаза - остальное можно достроить, используя осевую симметрию задачи).

Как следует из рис. , угловой размер основной радуги (образованной лучами S_3 по нашей терминологии), равен $\alpha = 360^\circ - \theta_{3min} \approx 42,1^\circ$

Аналогично, для вторичной радуги, образованной лучами S_4 , можно вычислить по формуле

$$\alpha = \theta_{4min} - 360^\circ \approx 50,9^\circ.$$

Заметим, что основную радугу формируют лучи, попадающую в верхнюю часть капли, а вторую дугу формируют лучи, попадающие в нижнюю часть капли.



³ Более последовательно было бы выделять участки одинаковых телесных углов, но в данном случае нас больше интересует качественное описание, а не точность расчетов интенсивности, которые, в принципе, не слишком сложно провести.

6. Понятно, что угловая ширина радуги $\delta\alpha$ равна угловому расстоянию $\delta\theta$ между углами минимального отклонения, соответствующими крайним длинам волн. Поэтому можно посчитать значения этих углов по изложенной выше методике. Однако такие вычисления достаточно громоздки, и проводить их надо весьма тщательно, с большой точностью в промежуточных расчетах. Мы воспользуемся малостью изменения показателя преломления и воспользуемся несколько иным способом, заменяющим громоздкие арифметические расчеты чуть менее громоздкими алгебраическими преобразованиями. Зависимость угла отклонения от прицельного параметра описывается формулой (3), в которую необходимо подставить значение прицельного параметра, соответствующее минимуму функции (3). Это значение определяется по формуле (6) (Чтобы не загромождать обозначения мы опустим «звездочку» в этой функции). Функция (3) зависит от показателя преломления n как явно, так и посредством зависимости ρ от n . Вычислим производную функции (3) по переменной n :

$$\frac{d\theta_k}{dn} = \frac{2\rho'}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{n^2}}} \left(\frac{\rho'}{n} - \frac{\rho}{n^2} \right), \quad (10)$$

где ρ' - производная функции (6) по n . Первые два слагаемых в формуле (10) взаимно уничтожаются (это условие экстремума!), поэтому изменение угла минимального отклонения описывается функцией

$$\frac{d\theta_k}{dn} = \frac{2\rho}{n\sqrt{n^2-\rho^2}} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{(k-1)^2 - n^2}{n^2 - 1}}, \quad (11)$$

где использовано явное выражение для ρ , определяемое формулой (6). Таким образом, угловая ширина радуги описывается формулой

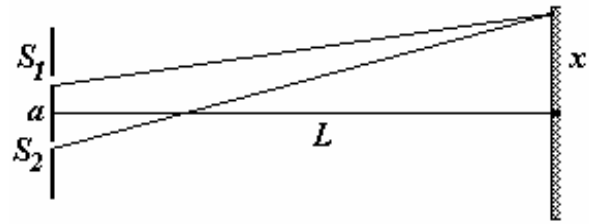
$$\delta\alpha \approx \frac{d\theta_k}{dn} \Delta n = 2 \frac{\Delta n}{n} \sqrt{\frac{(k-1)^2 - n^2}{n^2 - 1}}, \quad (12)$$

в которой в качестве n можно взять его среднее значения, а величина Δn равна разности показателей преломления для крайних длин волн. Численные значения, полученные с помощью этой формулы, таковы:

ширина основной радуги $\delta\alpha \approx 0,038 \approx 2,3^\circ$, вторичной $\delta\alpha \approx 0,069 \approx 4,0^\circ$.

Задача 18.

В интерференционной схеме Юнга две узкие параллельные щели S_1 и S_2 , расстояние между которыми равно a , освещаются плоской волной, падающей нормально на экран со щелями. На расстоянии



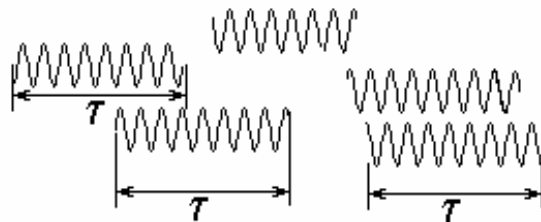
L ($L \gg a$) расположен экран, на котором наблюдается интерференционная картина. Исследуется зависимость интенсивности света на этом экране от координаты x ($x \ll L$) - расстояния до оси симметрии системы.

1. Щели освещены монохроматической волной с длиной волны λ . Найдите распределение интенсивности света на экране. Определите ширину интерференционной полосы (расстояние между двумя последовательными максимумами интенсивности).

2. Пусть щели освещены двумя монохроматическими волнами равной интенсивности с близкими длинами волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \ll \lambda$). Опишите распределение интенсивности света на экране в этом случае.

3. Щели осветили немонохроматическим излучением, содержащим непрерывный спектр длин волн, лежащих в узком интервале от λ_0 до $\lambda_0 + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \ll \lambda_0$). Опишите распределение интенсивности света на экране в этом случае.

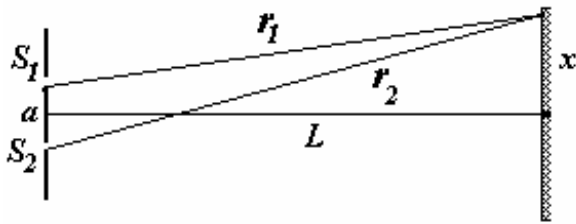
4. Рассмотрим следующую модель частично когерентного света. Световой поток представим в виде случайной совокупности цугов - ограниченных во времени и пространстве участков синусоидальных волн. Все цуги имеют одинаковую частоту, амплитуду и длительность τ . Однако начальные фазы колебаний изменяются от цуга к цугу случайным образом.



Опишите интерференционную картину на экране в интерференционной схеме Юнга, если щели освещены частично когерентным светом, модель которого представлена выше. Покажите, что качественно интерференционная картина совпадает с картиной, описанной в п.3. Установите связь между величинами τ и $\Delta\lambda$ (а также с шириной спектра $\Delta\nu$), чтобы две описанные интерференционные картины качественно совпадали.

Решение.

1. В точке, находящейся на расстоянии x от оси системы будут складываться два колебания - волны пришедшие от обеих щелей. Разность фаз колебаний определяется разностью путей $r_2 - r_1$ от щелей:



$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1). \quad (1)$$

Из элементарных геометрических соображений можно записать

$$\begin{aligned} r_2^2 &= L^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \\ r_1^2 &= L^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, получим

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2xa. \quad (3)$$

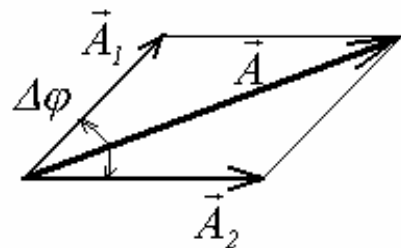
С учетом того, что $L \gg x, a$, можно положить $r_2 + r_1 \approx 2L$. Поэтому разность хода между лучами рассчитывается по формуле

$$r_2 - r_1 = \frac{xa}{L}. \quad (4)$$

Соответствующая разность фаз определяется выражением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{xa}{L}. \quad (5)$$

Для вычисления интенсивности суммарного колебания удобно воспользоваться методом векторных диаграмм. При сложении двух колебаний $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ с равными амплитудами $|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2| = A_0$ амплитуда



резльтирующего вектора рассчитывается по формуле

$$A = 2A_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Тогда интенсивность суммарной волны, (пропорциональная квадрату амплитуды) подчиняется закону

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda L} x, \quad (6)$$

где $I_0 = A_0^2$ - интенсивность, создаваемая одной щелью.

Максимум интенсивности будет наблюдаться в тех точках x_k , где разность хода лучей равна целому числу длин волн, или где выполняется условие $\frac{\pi a}{\lambda L} x_k = k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, из которого следует

$$x_k = \frac{\lambda L}{a} k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Следовательно, ширина интерференционной полосы может быть рассчитана по формуле

$$\delta x = \frac{\lambda L}{a}. \quad (8)$$

2. Так волны разных частот не интерферируют между собой, то результирующая интенсивности просто равна сумме интенсивностей обеих компонент, каждая из которых определяется формулой (6):

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = 4I_0 \left(\cos^2 \frac{\pi a}{\lambda L} x + \cos^2 \frac{\pi a}{(\lambda + \Delta\lambda)L} x \right) = \\ &= 2I_0 \left(2 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda L} x + \cos \frac{2\pi a}{(\lambda + \Delta\lambda)L} x \right) \approx \\ &\approx 4I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda L} x \cdot \cos \frac{\pi a}{\lambda L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} x \right) \end{aligned} \quad (9)$$

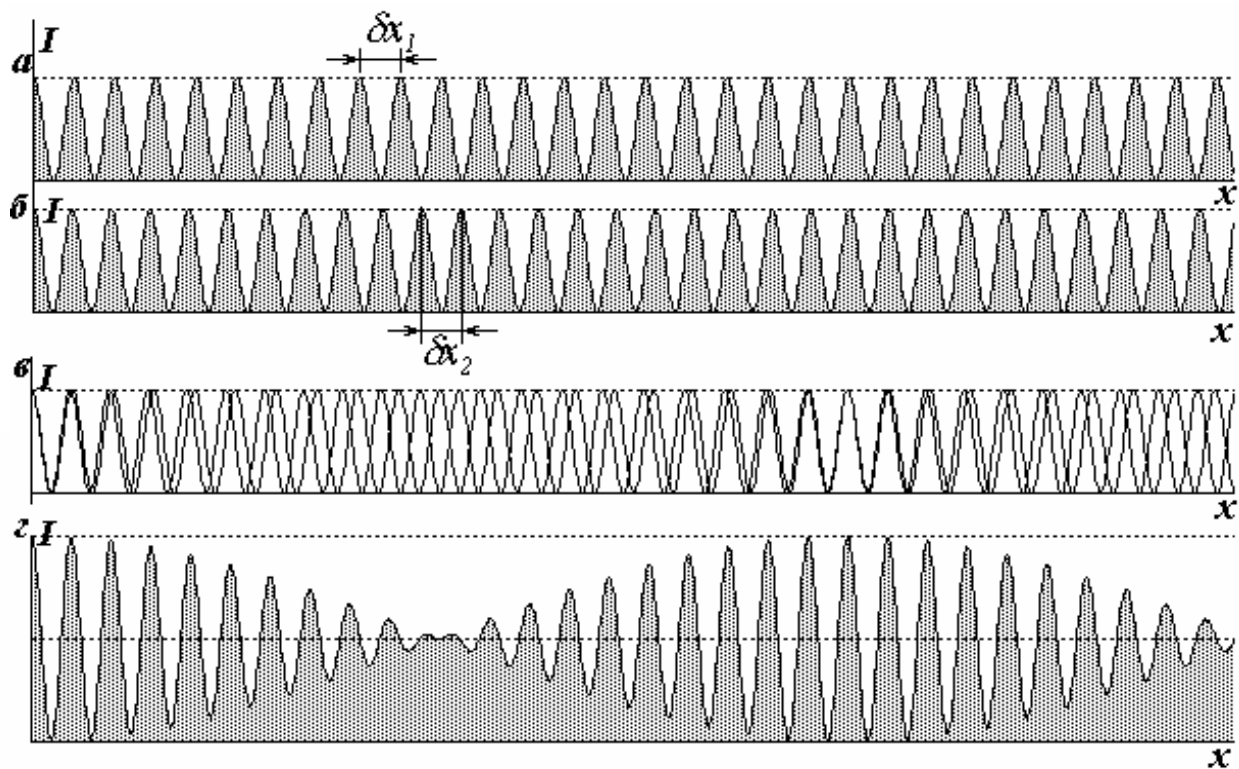
При выводе последнего соотношения мы учли, что $\Delta\lambda \ll \lambda$, поэтому

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} \right) \approx \frac{1}{\lambda}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} \right) \approx \frac{\Delta\lambda}{2\lambda^2}.$$

Из соотношения (9), следует, что распределение интенсивности на экране представляет собой своеобразные «пространственные биения» - периодическое распределение интенсивности, определяемое формулой (6), модулируется медленно изменяющейся функцией $\cos \frac{\pi a}{\lambda L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} x$.

Проиллюстрируем это явление графически. На рисунке представлены графики зависимости интенсивностей обеих компонент от координаты x (а, б), наложение этих графиков (в) и их сумма (г). Данные графики построены для $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,05$.

Интенсивности, соответствующие двум монохроматическим компонентам, представляют собой периодические решетки с незначительно различающимися ширинами полос δx_1 и δx_2 . В районе нулевого максимума, максимумы разных решеток совпадают, при увеличении порядка интерференции расстояние между максимумами двух решеток возрастает и, наконец, в некоторой точке максимум одной решетки совпадает с минимумом другой. В этой области интерференционная картина исчезает. При дальнейшем увеличении порядка интерференции ситуация периодически повторяется.



Таким образом, мы можем оценить порядок интерференционной полосы, в районе которой интерференционная картина исчезает, с помощью соотношений

$$k^* \delta x_1 = (k^* + \frac{1}{2}) \delta x_2, \text{ откуда находим } k^* = \frac{\delta x_2}{2(\delta x_1 - \delta x_2)} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}.$$

Число интерференционных полос между двумя последовательными исчезновениями интерференционной картины оценивается по очень красивой формуле $N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$.

Заметим, что при x , соответствующем номеру полосы k^* модулирующий множитель $\cos \frac{\pi a}{\lambda L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} x$ обращается в нуль.

3. В данной ситуации необходимо проинтегрировать вклады всех спектральных компонент (6) в заданном спектральном интервале. То есть распределение интенсивности света на экране может быть вычислено по формуле

$$I = C \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} (1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda L}) d\lambda, \quad (10)$$

где C - некоторый постоянный множитель, определяющий интенсивность падающего излучения. Для вычисления интеграла воспользуемся малостью величины $\Delta\lambda$ и преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0 + \delta} \approx \frac{1}{\lambda_0} (1 - \frac{\delta}{\lambda_0}).$$

Тогда интеграл (10) примет вид

$$\begin{aligned}
I &= C \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} \left(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda L}\right) d\lambda = C \int_0^{\Delta\lambda} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 L} \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_0}\right)\right)\right) d\delta = \\
&= C\Delta\lambda \left(1 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, и в данном случае на экране наблюдается система интерференционных полос шириной $\delta x = \frac{\lambda_0 L}{a}$, которая модулируется функцией

$$F(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(\frac{\pi ax}{\lambda_0 L} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}. \tag{12}$$

Для удобства анализа обозначим $\xi = \frac{x}{\delta x} = \frac{ax}{\lambda_0 L}$. Заметим, что параметр ξ есть координата x , измеренная в единицах ширины полосы. Тогда распределение интенсивности (11) примет вид

$$I = C\Delta\lambda \left(1 + \cos 2\pi\xi \cdot \frac{\sin\left(\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}\right). \tag{13}$$

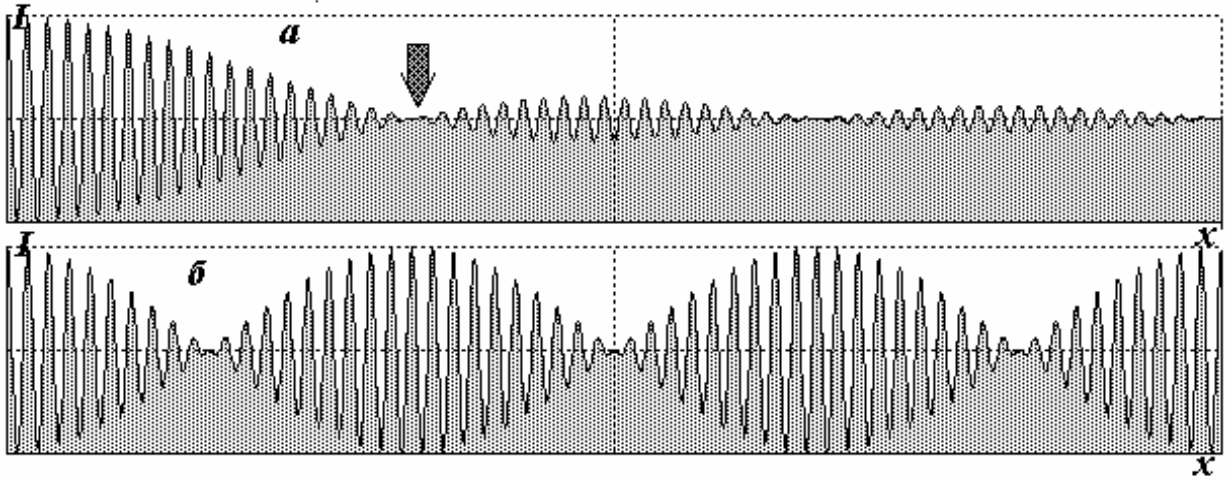
Модулирующая функция $F(\xi) = \frac{\sin\left(\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}{\left(\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)}$ стремится к нулю при возрастании

координаты x (соответственно и ξ). Поэтому число видимых полос интерференции ограничено. Минимальное значение аргумента этой функции, при котором она обращается в нуль, можно определить из условия

$\pi\xi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \pi$, то есть $F(\xi) = 0$ при $\xi = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$. Эта величина является максимальным

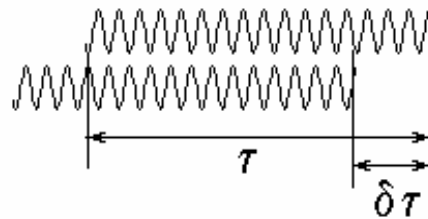
порядком интерференционной полосы. Соответствующее значение координаты

$$x^* = \frac{\lambda_0 L}{a} \cdot \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{L}{a} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \tag{14}$$



На рисунке изображен график функции (11) (рис. а), ниже для сравнения в том же горизонтальном масштабе построен график функции (9) (рис. б) при одинаковом значении отношения $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,05$. Обратите внимание, в той области (отмеченной стрелкой на рис.), где интерференционная картина от источника со сплошным спектром исчезает, интерференционная картина от двух монохроматических источников имеет максимальную контрастность.

4. Так как различные пути имеют различные фазы, они интерферировать не будут. Иными словами, интерферирует каждый пуч «сам с собой» - при прохождении через щели возникают два когерентных пуча. При изменении координаты x изменяется область их перекрытия.



В области их перекрытия наблюдается интерференция, к которой добавляется постоянная интенсивность от не перекрывающихся «хвостов». Поэтому результирующую интенсивность света на экране можно представить в виде суммы

$$I = \left(1 - \frac{\delta\tau}{\tau}\right) 2I_0 \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda L} x + \frac{\delta\tau}{\tau} \cdot I_0, \quad (15)$$

где величина временного сдвига может быть рассчитана по очевидной формуле (c - скорость света):

$$\delta\tau = \frac{r_2 - r_1}{c} = \frac{xa}{cL}. \quad (16)$$

(Естественно, эти формулы применимы при $\delta\tau < \tau$, в противном случае интенсивность света равна I_0 - интенсивности создаваемой одним исходным пучком).

Таким образом, распределение интенсивности света на экране будет иметь вид

$$I = \begin{cases} I_0 \left(2 \left(1 - \frac{ax}{cL\tau} \right) \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda L} x + \frac{ax}{cL\tau} \right), & \text{при } x < \frac{cL\tau}{a} \\ I_0 & \text{при } x > \frac{cL\tau}{a} \end{cases} \quad (17)$$

Интерференционные полосы исчезают в данном случае при $x^* = \frac{cL\tau}{a}$.

Сравнивая данное выражение с формулой (14), заключаем, что качественное соответствие между картинками будет наблюдаться при

$$\frac{L}{a} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = \frac{cL\tau}{a},$$

или при $\tau = \frac{\lambda_0^2}{c\Delta\lambda}$. (18)

Перейдем от ширины спектра, заданной в длинах волн к ширине спектра, заданной в частотах колебаний ν . Как известно, связь между частотой и длиной волны задается уравнением $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Поэтому $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$.

При использовании этого соотношения, формула (18) приобретает изящный вид,

$$\tau = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (18a)$$

На рисунке показаны распределения интенсивности в двух рассмотренных случаях (а - по формуле (11), б - по формуле (17)) при выполнении условия (18), как видите картины действительно схожи.

