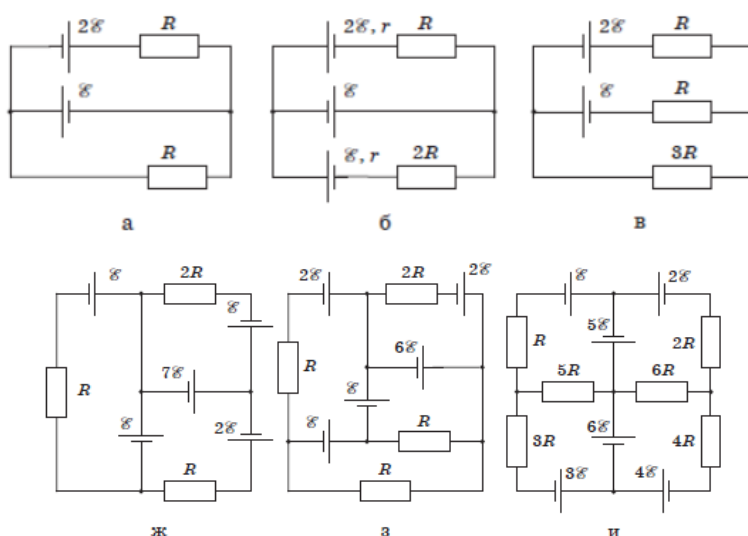
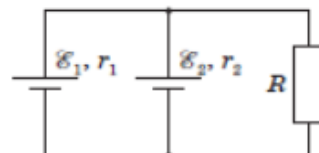
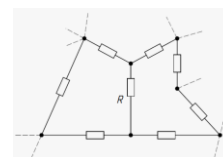


МЕТОДЫ РАСЧЁТА РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ

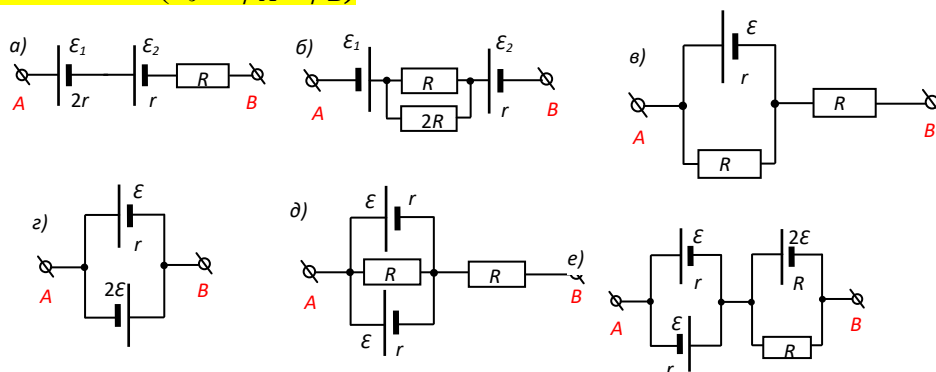
1. Найдите силу тока через резистор сопротивлением R .
2. Найдите силы токов в ветвях цепей: а) используя правила Кирхгофа; б) методом узловых потенциалов; в) методом эквивалентного источника; г) методом наложения токов. $\mathcal{E} = 2 \text{ В}$, $r = 1 \text{ Ом}$, $R = 2 \text{ Ом}$.



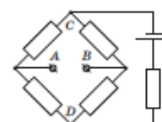
3. Участок схемы состоит из неизвестных сопротивлений. Как, имея амперметр, вольтметр, источник и соединительные провода, измерить сопротивление R , не разрывая ни одного контакта в схеме?



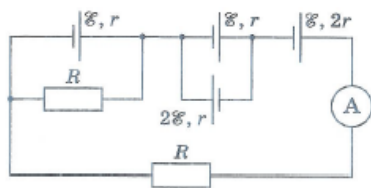
4. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника ($\mathcal{E}_9 = \varphi_A - \varphi_B$)



5. К клеммам A и B цепи, состоящей из резисторов и источника, подключают сначала идеальный вольтметр, а затем идеальный амперметр. Их показания равны U и I соответственно. Какой будет сила тока через резистор сопротивлением R , включенный между клеммами A и B ?



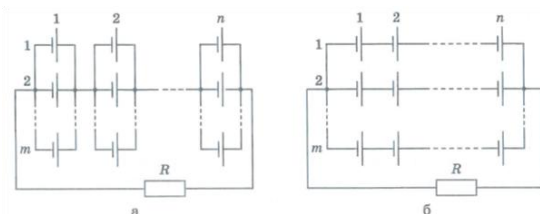
6. Найдите силу тока I через резистор с сопротивлением $R = 5 \text{ Ом}$ в цепи. Все источники одинаковые и имеют ЭДС $\mathcal{E} = 15 \text{ В}$ и внутреннее сопротивление $r = 2 \text{ Ом}$.



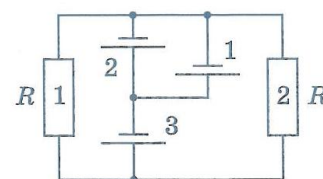
7. Экспериментатор Глюк собрал электрическую цепь, подключив по ошибке одну из батареек параллельно, а не последовательно двум другим. Найдите токи через резисторы в получившейся цепи. Каждый резистор имеет сопротивление R . Все батарейки идеальны, одинаковы и имеют ЭДС $\mathcal{E}$.

8. Имеется батарейка с ЭДС E_1 и внутренним сопротивлением r_1 , а также некоторое количество одинаковых батареек с ЭДС $E_2 = E_1/2$. Если последовательно с батареей E_1 подключить некоторое количество батареек E_2 и нагрузку, то сила тока в цепи при любом количестве батареек E_2 будет одинаковой. Если же к батарейке E_1 параллельно подсоединить любое число батареек E_2 и ту же нагрузку, то сила тока через неё останется равной прежнему значению. Полярности всех батарей считать одинаковыми. Найдите сопротивление нагрузки R , а также внутреннее сопротивление r_2 батареек E_2 .

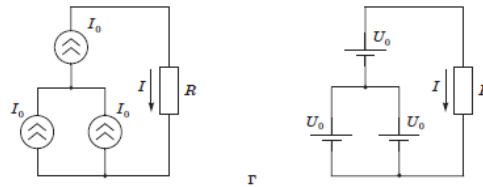
9. Из $N = 100$ одинаковых источников тока составлена батарея так, что образовано n соединённых последовательно групп, в каждой из которых содержится m источников, соединённых параллельно (см. рисунок а). Внутреннее сопротивление каждого источника $r = 1 \text{ Ом}$. При каких значениях m и n тока через резистор с сопротивлением $R = 100 \text{ Ом}$, подключенный к батарее, будет наибольшей? Изменится ли ответ, если источники тока соединить в батарею, как показано на рисунке б (m параллельно соединённых ветвей, в каждой из которых n последовательно соединённых источников)?



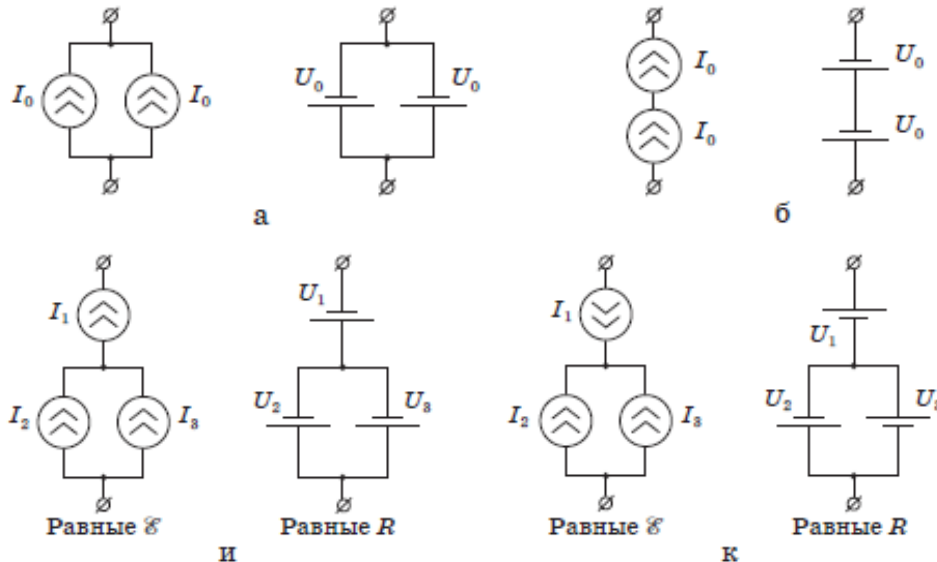
10. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из трёх идеальных батареек и двух одинаковых резисторов. Напряжения на батарейках равны $U_1 = U_2 = 2 \text{ В}$, $U_3 = 6 \text{ В}$. Сопротивления резисторов равны $R = 4 \text{ Ом}$. Определите силу тока через каждый элемент схемы.



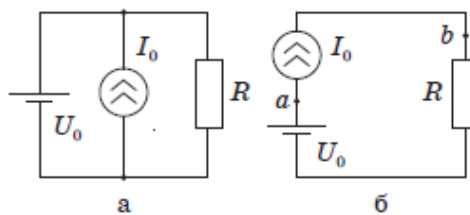
11. Определите силу тока, текущего через резисторы с сопротивлением R , в цепях с идеальными источниками тока и напряжения.



12. Каким одним эквивалентным источником можно заменить фрагмент электрической цепи? Указанные на рисунке величины считайте известными.



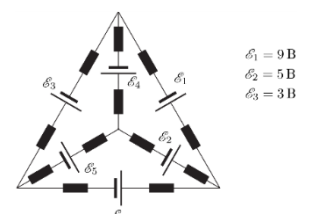
На рисунке представлены цепи, содержащие источники постоянного тока I_0 , источники постоянного напряжения U_0 и резисторы сопротивлением R . Определите: а) силу тока I через источник постоянного напряжения (схема а); б) разность потенциалов между точками a и b (схема б).



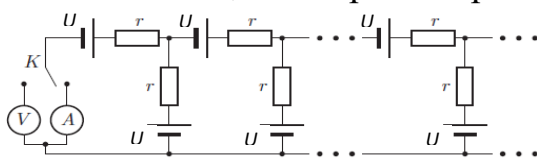
13. Имеется цепь, содержащая $N = 1000$ одинаковых источников тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r каждый. Между точками A и B (на дуге ACB) находится m источников тока. Найдите разность потенциалов между точками A и B . Какой будет эта разность потенциалов, если элементы будут обращены друг к другу одноименными полюсами?



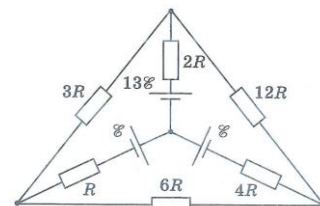
14. Экспериментатор собрал электрическую цепь, состоящую из разных батареек с пренебрежимо малыми внутренними сопротивлениями и одинаковых плавких предохранителей, сопротивление которых тоже очень мало, и нарисовал ее схему (предохранители на схеме обозначены черными прямоугольниками). Экспериментатор помнит, что в тот день при проведении опыта все предохранители остались целыми. Напряжения некоторых батареек известны. Восстановите неизвестные значения напряжений.



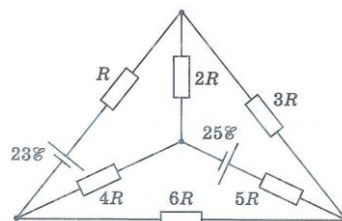
15. На рисунке изображена полубесконечная цепочка, состоящая из одинаковых идеальных источников постоянного тока с напряжением $U = 1,2$ В и резисторов с сопротивлением $r = 2,0$ Ом. К выходным клеммам цепочки могут быть подключены либо идеальный вольтметр, либо идеальный амперметр. Определите показания этих приборов.



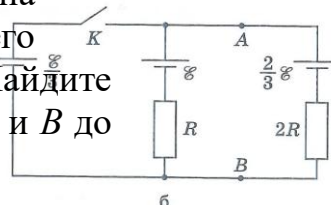
16. Электрическая цепь состоит из трёх идеальных батареек с известными ЭДС и шести резисторов с известными сопротивлениями. Определите ток через резистор сопротивлением $6R$.



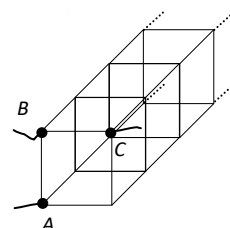
17. Считая известными величины, обозначенные на схеме, определите токи через источники напряжения.



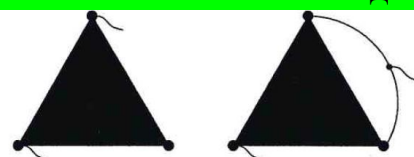
18. В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке, все элементы идеальные и указанные на рисунке параметры известны. Найдите силу тока и его направление через ключ K после его замыкания. Найдите отношение разностей потенциалов между точками A и B до и после замыкания ключа.



19. Определите сопротивление бесконечной объемной кубической сетки, измеренное между соседними узлами A и B , а также между узлами A и C , если сопротивление одного элемента ячейки R .

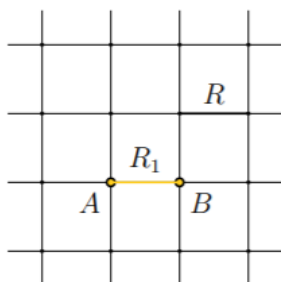


20. Однородная тонкая пластина в форме равностороннего треугольника сделана из плохо проводящего электрический ток материала (см. рисунок). В вершины пластины впаяны хорошо проводящие шарики для обеспечения хорошего контакта с измерительным прибором. Измерение сопротивления между двумя вершинами пластины дало значение R . После этого два шарика соединили хорошо проводящей проволокой, и измерили сопротивление между двумя соединёнными вершинами и третьей вершиной. Какое значение сопротивления было получено при втором измерении.

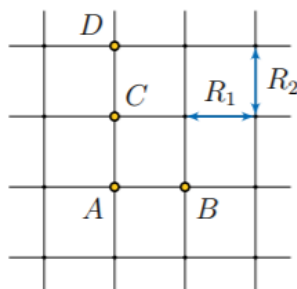


21. Задачи с кубка ЛФИ:

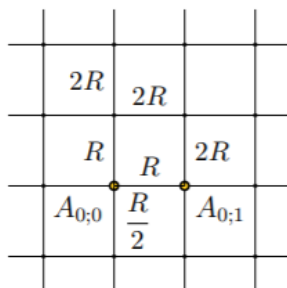
В бесконечной симметричной квадратной решетке с сопротивлением каждого ребра R заменили ребро между точками A и B на сопротивление R_1 , как показано на рисунке. Найдите сопротивление сетки между точками A и B .



В бесконечной симметричной квадратной решетке сопротивление любого горизонтального ребра — R_1 , а любого вертикального — R_2 , как показано на рисунке. Найдите сопротивление сетки между точками A и B , если известно, что сопротивление сетки между точками C и D равно R_0 .

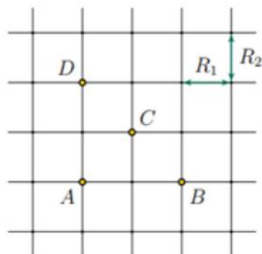


В бесконечной симметричной квадратной решетке сопротивление ребра увеличивается в два раза при смещении вверх или вправо, как показано на рисунке. Найдите сопротивление сетки между узлами $A_{0;0}$ и $A_{0;1}$.



Сложная часть задачи – (не обязательная часть задачи):

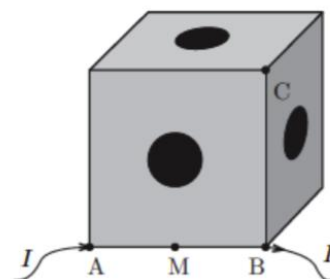
В бесконечной квадратной сетке сопротивление каждого горизонтального резистора равно R_1 , а каждого вертикального — R_2 . Сопротивление, измеренное между узлами A и B равно R_{AB} , а между узлами A и D — R_{AD} .



Чему равно сопротивление между точками A и C ?

22. Задача

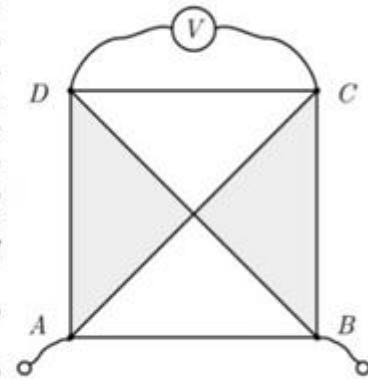
ЗАДАЧА 60. (Всеросс., 2015, финал, 11) Кубик составлен из шести одинаковых проводящих пластин с просверленными по центру одинаковыми отверстиями. В вершины кубика вставлены одинаковые маленькие хорошо проводящие шарики, к которым можно присоединять провода. Диаметры отверстий таковы, что электрическое сопротивление кубика между его соседними вершинами A и B оказалось равным $R_{AB} = r = 32$ кОм. Если через эти вершины пропустить ток $I = 1$ мА в направлении, указанном на рисунке, то разность потенциалов между точкой M (серединой ребра AB) и вершиной C будет равна $U_{MC} = \varphi_M - \varphi_C = U = 2,0$ В. Определите сопротивление R_{AC} между точками A и C . Как изменятся сопротивления R_{AB} и R_{AC} , если, не изменяя толщину пластин, увеличить их размеры и размер отверстий в 2 раза?



$$R_{AC} = \frac{2r}{3} + r = 36 \text{ кОм; не изменится}$$

23. Задача

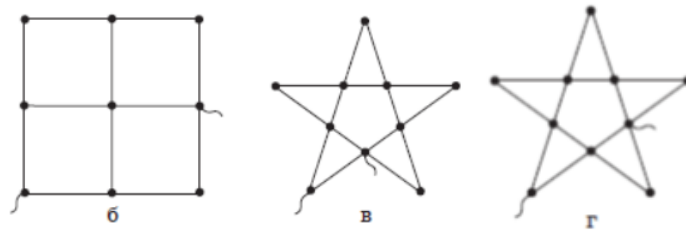
Квадратная пластина составлена из проводников двух сортов: серого и белого (см. рисунок). Удельное сопротивление белого проводника вдвое меньше, чем серого. Сопротивление пластины между вершинами A и B равно r_1 . Если через эти вершины пропускать ток силой I , то идеальный вольтметр, подключенный к вершинам C и D , показывает значение напряжения U_1 . После охлаждения пластины удельное сопротивление белых проводников уменьшилось вдвое, а серых – в восемь раз. Сопротивление пластины между вершинами A и B при этом стало равным r_2 , а при пропускании через эти вершины прежнего тока силой I тот же вольтметр стал показывать значение U_2 .



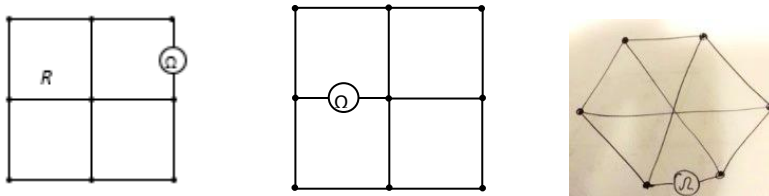
1) Найдите сопротивление пластины между вершинами B и C до её охлаждения.

2) Найдите сопротивление пластины между вершинами A и C до её охлаждения.

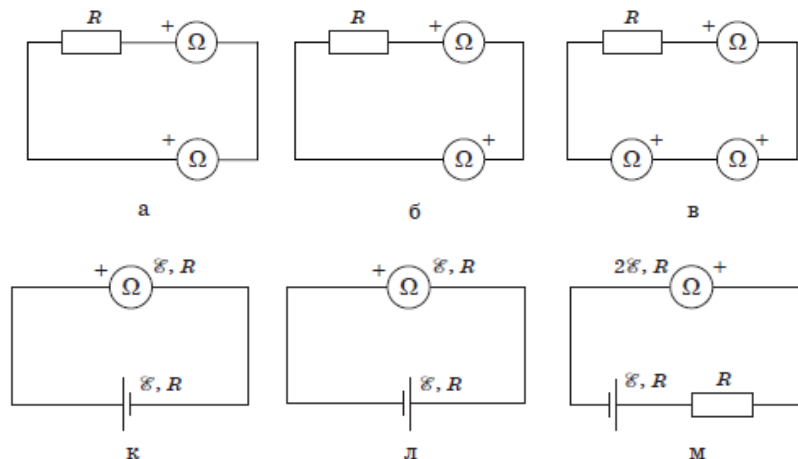
24. Определите сопротивления проволочных конструкций, представленных на рисунках. Сопротивление одного звена R .



25. Определите показание омметра, подсоединенного к проволочной сетке. Сопротивления отдельных проводников сетки одинаковы и равны $R = 1,0$ Ом. Сопротивление проводов в ветви омметра пренебрежимо мало.



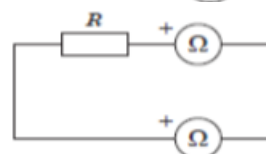
26. Определите показания одинаковых омметров в цепях, схемы которых приведены на рисунке. Сопротивления резисторов $R = 1,0$ кОм.



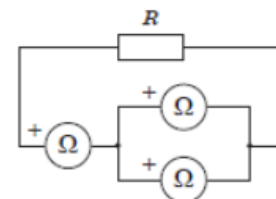
27. Показания двух омметров, соединенных последовательно с резистором (см. рисунок), равны $R_1 = 120 \text{ Ом}$ и $R_2 = 180 \text{ Ом}$. Определите сопротивление резистора R .



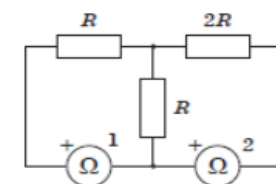
28. Показания двух омметров, соединенных последовательно с резистором (см. рисунок), равны $R_1 = -120 \text{ Ом}$ и $R_2 = 180 \text{ Ом}$. Определите сопротивление резистора R .



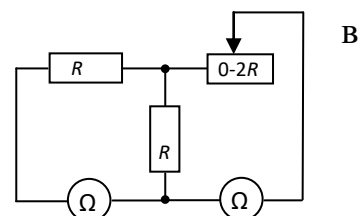
29. На рисунке приведена схема цепи, состоящей из трех одинаковых омметров, с помощью которых измеряется сопротивление резистора R . Один из омметров показывает $R_1 = 100 \text{ Ом}$, а другой $R_2 = 800 \text{ Ом}$. Каковы показания R_3 третьего омметра? Чему равно сопротивление резистора? Полярности подключения омметров указаны на рисунке.



30. Определите показания одинаковых омметров, включенных в электрическую цепь, если сопротивление резистора $R = 10 \text{ Ом}$. Внутреннее сопротивление омметра равно $2R$. Полярности омметров указаны на рисунке.



31. Построить график зависимости показаний правого омметра зависимости от сопротивления реостата, которое может изменяться в пределах от 0 до $2R$. Собственное сопротивление омметра R . Омметры считать одинаковыми.



32. Одинаковые омметры соединены треугольником. Сумма показаний двух из них равна $4R$. Определите показания всех приборов и их внутренние сопротивления.

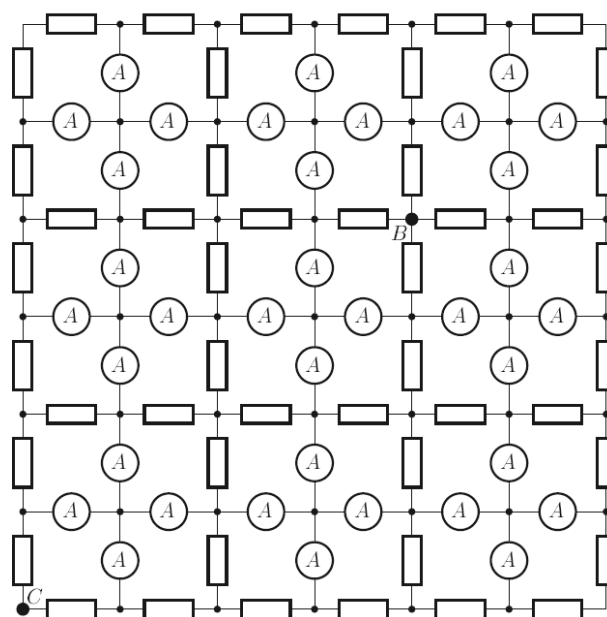
33. Одинаковые омметры соединены четырехугольником. Сумма показаний трех из них отрицательна и равна $-R$. Определите показания всех приборов и их внутренние сопротивления.

34. N одинаковых омметров соединены N -угольником. Определите сумму показаний всех омметров.

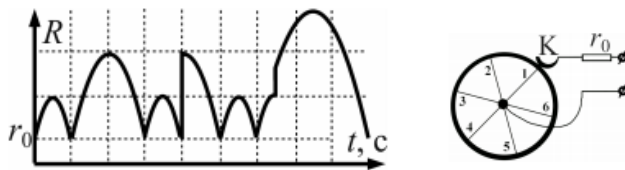
35. Каждый резистор в цепи (рисунок) имеет сопротивление $R = 100 \text{ Ом}$. Все амперметры одинаковые, а их внутренние сопротивления много меньше R .

1) Найдите сопротивление R_{BC} цепи между точками B и C .

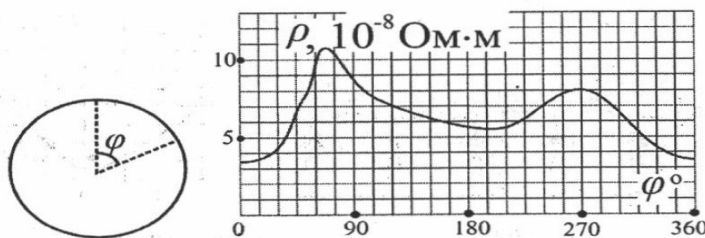
2) Источник постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$ подключили плюсом к точке B и минусом к точке C . Найдите силы тока через каждый амперметр. В качестве ответа пометьте стрелочкой направление тока через каждый амперметр и подпишите рядом численное значение силы тока, выраженное в мА (само обозначение «мА» не указывайте, чтобы не загромождать схему).



36. Колесо (см. рисунок) вращается по часовой стрелке вокруг неподвижной оси. Однородный обод колеса имеет электрическое сопротивление $6R_0$, сопротивление спиц мало. Источник постоянного напряжения подключён к оси колеса и, через сопротивление r_0 , - к скользящему контакту K , касающемуся обода. При вращении у колеса ломаются спицы. По графику зависимости полного сопротивления цепи от времени определите, в каком порядке ломались спицы. Нумерация спиц и начальное положение колеса указано на рисунке.



37. Кольцо радиуса $r = 10$ см изготовлено из проволоки сечением $S = 5$ мм². Материал проволоки неоднороден – его удельное сопротивление зависит от угла φ так, как показано на графике. Сопротивление между всевозможными парами точек кольца измеряют омметром. Какое максимальное сопротивление может быть получено при таких измерениях?



38. Задача

Задача 3.5* (Конечная цепочка)

Пусть I – искомый ток через резистор R_4 , а I_0 – ток, текущий через источник $\mathcal{E}$ (рис. 90). Так как $R_4 + R_3 = R_2$, то токи на параллельно соединённых участках $C-R_4-D$ и $C-R_2-D$ одинаковы. Вследствие этого ток, покидающий узел D , равен $2I$. Сопротивления участков $E-R_2-F$ и $E-C-D-F$ также одинаковы, поэтому ток, покидающий узел F вдвое больше тока $2I$, текущего по $D-F$. Аналогичная ситуация повторяется и далее: при приближении от R_4 к

39. Задача

Задача 3.6 (Батарейки)

Имеется батарейка с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 , а также некоторое количество одинаковых батареек с ЭДС $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1/2$. Если последовательно с батареей $\mathcal{E}_1$ подключить некоторое количество батареек $\mathcal{E}_2$ и нагрузку, то сила тока в цепи при любом количестве батареек $\mathcal{E}_2$ будет одинаковой. Если же к батарейке $\mathcal{E}_1$ параллельно подсоединить любое число батареек $\mathcal{E}_2$ и ту же нагрузку, то сила тока через неё останется равной прежнему значению. Полярности всех батарей считать одинаковыми. Найдите сопротивление нагрузки R , а также внутреннее сопротивление r_2 батареек $\mathcal{E}_2$.

Сопротивление призмы**1. Математическое введение (3,0 балла)**

По определению считается, что члены числовой последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots$ подчиняются рекуррентному соотношению, если каждый последующий из них выражается через предыдущие. Например, для известной вам геометрической прогрессии

$$x_k = \lambda x_{k-1}, \quad (1)$$

где $k=1, 2, 3, \dots$, λ – некоторое фиксированное число, а нулевой член последовательности имеет некоторое значение A , то есть $x_0 = A$.

1.1 [0,2 балла] Получите формулу для произвольного члена последовательности x_k в явном виде, т.е. выразите его через номер k , начальное значение A и λ .

Теперь рассмотрим число $\lambda = 2 + \sqrt{3}$. При возведении в целую натуральную степень k , его можно представить в виде

$$\lambda^k = p_k + q_k \sqrt{3}, \quad (2)$$

где p_k, q_k – некоторые целые числа.

1.2 [0,4 балла] Запишите рекуррентные соотношения, выражающие значения p_k, q_k через предыдущие значения p_{k-1}, q_{k-1} . Запишите также обратные соотношения, выражающие p_{k-1}, q_{k-1} через p_k, q_k .

1.3 [0,7 балла] Рассчитайте численные значения коэффициентов p_k, q_k для $k=1, 2, 3, 4, 5$.

1.4 [0,2 балла] Выразите число $\lambda^{-k} = (2 + \sqrt{3})^{-k}$ через найденные величины p_k, q_k .

Пусть члены некоторой числовой последовательности подчиняются рекуррентному соотношению

$$x_{k+1} = 4x_k - x_{k-1}, \quad k=1, \dots, N-1, \quad (3)$$

причем известно, что N – некоторое целое число, а $x_0 = A$ и $x_N = B$, A, B – произвольные числа.

1.5 [1,0 балла] Получите формулу для произвольного члена x_k последовательности (3) в явном виде, т.е. выразите его через номер k и величины A, B, N .

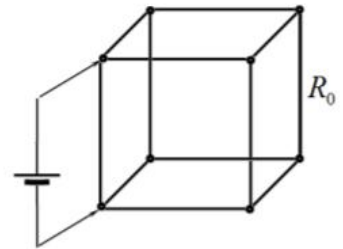
1.6 [0,5 балла] Выразите произвольный член последовательности x_k через величины p_k, q_k , найденные в пп.1.2-1.3.

Подсказка. Решение рекуррентного соотношения (3) нужно искать в виде $x_k = C\lambda^k$, где C – некоторая константа. Найдите, при каких значениях λ это возможно и постройте общее решение, удовлетворяющее заданным условиям.

2. Проволочный каркас в форме призмы (7,0 балла)

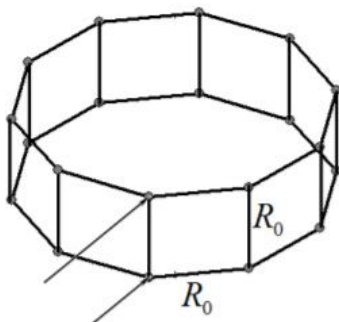
Широко известны задачи, в которых требуется найти электрическое сопротивление простейших проволочных каркасов. Пример одного из таких каркасов в форме куба показан на рисунке внизу. Пусть электрическое сопротивление каждого ребра равно R_0 .

2.1 [0,8 балла] Найдите сопротивление куба при подключении источника к вершинам одного ребра, как показано на рисунке справа.

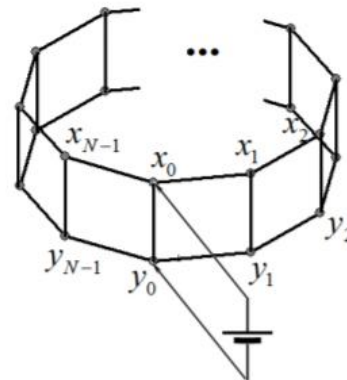


Давайте рассмотрим более общий случай проволочного каркаса в форме правильной призмы с произвольным числом боковых граней N и определим его электрическое сопротивление при подключении источника к вершинам одного из боковых ребер, как показано на рисунке внизу. Сопротивление каждого ребра каркаса равно R_0 .

Для удобства пронумеруем вершины призмы и обозначим их электрические потенциалы: на верхней грани x_k , а на нижней грани y_k , как показано на рисунке внизу. Источник постоянного напряжения подключен к вершинам нулевого ребра. Будем считать, что источник задает потенциалы вершин ребра равными $x_0 = +\varphi_0$ и $y_0 = -\varphi_0$ соответственно.



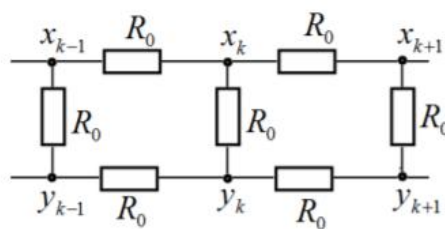
Проволочный каркас в форме призмы



Обозначения потенциалов для узлов призмы

2.2 [0,2 балла] Запишите соотношение, которое связывает значения потенциалов x_k и y_k . Запишите соотношение, которое связывает значения потенциалов x_k и x_{N-k} .

Рассмотрим произвольное боковое ребро призмы, кроме нулевого $k = 0$ и последнего $k = N - 1$. Соответствующая электрическая схема показана на рисунке ниже.



2.3 [1,0 балла] Запишите соотношение, связывающие значения потенциала x_k со значениями потенциалов в соседних вершинах для $k = 1, 2, \dots, N - 2$.

2.4 [0,2 балла] Запишите граничные условия в точках $k = 0$ и $k = N - 1$, позволяющие определить значения потенциалов x_k однозначно.

2.5 [0,2 балла] Найдите явные выражения для потенциалов x_k и y_k для всех значений $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

2.6 [0,4 балла] Выразите значение силы тока, протекающего через источник, через величины φ_0, R_0, N . Используйте найденные в Математическом введении числа p_k, q_k .

- 2.7 [0,2 балла] Получите явную формулу для сопротивления проволочного каркаса R_N , выразив его через величины R_0, p_N, q_N .
- 2.8 [1,0 балла] Рассчитайте точные значения сопротивлений каркаса для $N = 1, 2, 3, 4, 5$.
- 2.9 [0,5 балла] Нарисуйте эквивалентные электрические схемы для «экзотических» призм с $N = 1$ и $N = 2$.
- 2.10 [1,0 балла] Найдите значения сопротивления R_∞ каркаса при $N \rightarrow \infty$.
- 2.11 [1,5 балла] Найдите минимальное значение N , при котором сопротивление призмы отличается от R_∞ не более чем на 2%.