

Решения задач

Открытой межрегиональной олимпиады

по астрономии имени Ф.А. Бредихина

10-11 класс

№ 1. «Максимальное время выдержки на Луне»

Условие. Чему равно максимальное время выдержки при съемке звезды с помощью фотоаппарата, с точки лунного экватора, находящейся в зените, если при съемке звезды той же яркости (определенной за пределами земной атмосферы) в зените, на земном экваторе, тем же фотоаппаратом оно составляет 5 с? Во сколько раз отличается поверхностная яркость образов звезды, полученных на Луне и Земле? Коэффициент пропускания земной атмосферы в видимом свете – $\tau = 0.80$.

Решение. 1. Максимальное время выдержки ($t_{\max}$) при съемке звезды – это максимально возможное время открытия затвора фотоаппарата, при котором звезды на снимках еще остаются точечными объектами. При наблюдении звезды в зените с экватора ее угловая скорость суточного движения равна угловой скорости вращения Земли, т.е. $\omega_* = \omega_{\oplus} = 2\pi/T_{\oplus}$ (2 балла), где $T_{\oplus}$ – сидерический период вращения Земли вокруг своей оси.

Поскольку за время $t_{\max}^{(\oplus)}$ при наблюдении с земного экватора звезда перемещается на угол

$$\varphi_{\max} = \omega_* t_{\max}^{(\oplus)} = \omega_{\oplus} t_{\max}^{(\oplus)}, \quad (2 \text{ балла}) \quad (1)$$

причем данный угол фактически равен разрешающей способности фотоаппарата и не зависит от места и времени съемки. Аналогично уравнению (1) можно записать уравнение для Луны:

$$\varphi_{\max} = \omega_{\zeta} t_{\max}^{(\zeta)} = \frac{2\pi}{T_{\zeta}} t_{\max}^{(\zeta)}, \quad (2 \text{ балла}) \quad (2)$$

здесь T_{ζ} – сидерический период вращения Луны. Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{2\pi}{T_{\oplus}} t_{\max}^{(\oplus)} = \frac{2\pi}{T_{\zeta}} t_{\max}^{(\zeta)} \Rightarrow t_{\max}^{(\zeta)} = \left(\frac{T_{\zeta}}{T_{\oplus}} \right) t_{\max}^{(\oplus)} = 136.6 \text{ с.} \quad (2 \text{ балла}) \quad (3)$$

2. Яркость изображения звезды (J) определяется количеством энергии (W) излучения звезды, упавшего на рабочую поверхность приемника площадью (S), за время выдержки

$$J = \frac{W}{S} = \frac{E S_{\text{об}} \tau \alpha t}{S}, \quad (4 \text{ балла}) \quad (4)$$

здесь E – освещенность, создаваемая звездой у фронтальной поверхности объектива (без учета влияния атмосферы), $S_{\text{об}}$ – площадь его рабочей поверхности, α – коэффициент пропускания света объективом.

В случае Земли и Луны имеем

$$J_{\oplus} = \frac{E S_{\text{об}} \tau \alpha t_{\max}^{(\oplus)}}{S}, \quad J_{\zeta} = \frac{E S_{\text{об}} \alpha t_{\max}^{(\zeta)}}{S}, \quad (4 \text{ балла}) \quad (5)$$

$$\frac{J_{\zeta}}{J_{\oplus}} = \frac{t_{\max}^{(\zeta)}}{\tau t_{\max}^{(\oplus)}} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{T_{\zeta}}{T_{\oplus}} \right) = 34. \quad (4 \text{ балла}) \quad (6)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (3) и (6).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Определение времени выдержки фотоаппарата на Луне	8
Определение отношения поверхностных яркостей образов звезды, полученных на Луне и Земле	12

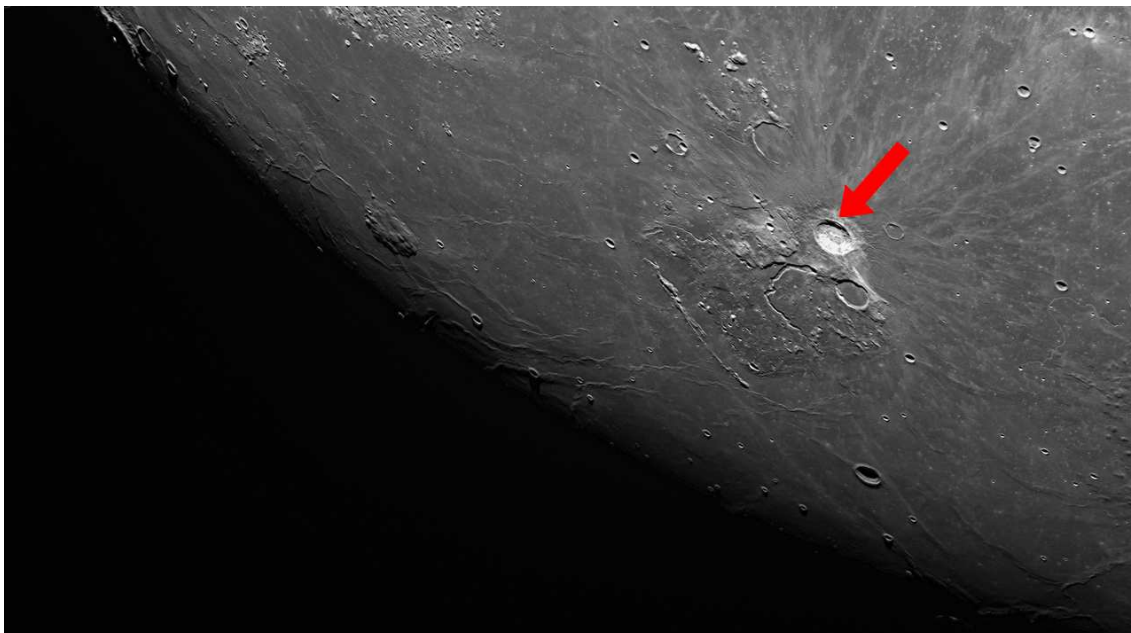


Рис. 1: поверхность Луны и ее кратеры (Автор-Joostie, источник: <https://vk.com/club176359443>).

№ 2. «Поверхность Луны и размеры ее кратера»

Условие. Оцените диаметр кратера, указанного стрелкой в центральной части фотографии Луны (см. рис. 1). Представьте подробный алгоритм определения данной величины.

Решение. 1. Определим с помощью линейки наибольшую протяженность кратера $s = 13$ мм (Ваши значения здесь и далее могут отличаться от указанных, при использовании фотографии в ином масштабе, **2 балла**). Следовательно линейный диаметр (L) кратера будет

$$L = \mu_\ell s, \text{ (2 балла)} \quad (7)$$

здесь μ_ℓ – линейный масштаб фотографии, подлежащий определению.

2. Для его определения вычислим линейный радиус (R_ζ) Луны на фотографии. Очевидно, непосредственно на фотографии эту величину невозможно измерить, поскольку видна лишь малая часть диска Луны. Выполним дополнительное построение. Отметим точки пересечения видимого диска с границами кадра A и B (**2 балла**). Построим хорду AB и найдем ее середину – точку C (см. рис. 2, **2 балла**). Определим половину ее длины – $\ell = AB/2 = 166$ мм (**2 балла**).

Далее построим перпендикуляр CD до границы видимого диска (**1 балл**). Определим его длину – $h = 30$ мм (**1 балл**). Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника $\triangle OAC$, катетами которого являются стороны AC , CO , где O – центр диска Луны (на фото не представлен), и гипотенузой $AO = R_\zeta$:

$$R_\zeta^2 = (R_\zeta - h)^2 + \ell^2, \Rightarrow R_\zeta = \frac{\ell^2 + h^2}{2h} = 474 \text{ мм. (4 балла)} \quad (8)$$

3. Далее можно определить угловой масштаб фотографии:

$$\mu_\ell = \frac{\Re_\zeta}{R_\zeta} = 3.66 \text{ км/мм. (2 балла)} \quad (9)$$

Следовательно искомая величина составляет $L = 48$ км (**2 балла**).

Ответ: диаметр кратера составляет 48 км.

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное определение наибольшей протяженности кратера + формула для расчета линейного диаметра кратера	2+2
Корректный алгоритм определения линейного радиуса (R_ζ) Луны на фотографии	12
Корректное определение линейного масштаба фотографии + линейного диаметра кратера в пределах интервала $[30, 70]$ км	2+2

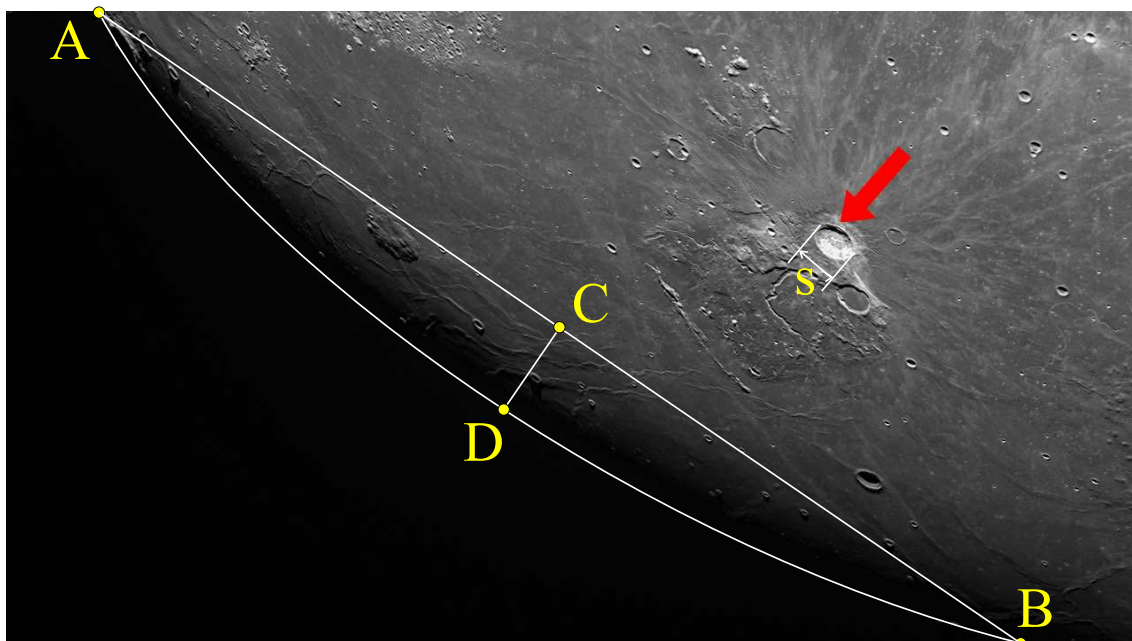


Рис. 2: к определению линейного радиуса Луны и диаметра ее кратера.

№ 3. «Орбитальные элементы примечательной кометы»

Условие. Определите эксцентриситет, большую полуось, период обращения кометы, расстояния до перигелия и афелия и значения гелиоцентрической скорости кометы в этих точках, испытавшей при подлете к Солнцу тесное сближение с семейством астероидов "Троянцы", а на обратном пути – тесное сближение с семейством астероидов "Греки", принадлежащих Юпитеру. Если известно, что площадь части эллипса, заматаемая гелиоцентрическим радиусом-вектором кометы, расположенной внутри орбиты Юпитера, составляет долю $\eta = 1.50 \cdot 10^{-5}$ от площади всего эллипса ее орбиты. Орбиту Юпитера считать круговой. Время пролета кометы внутри орбиты Юпитера меньше половины его сидерического периода.

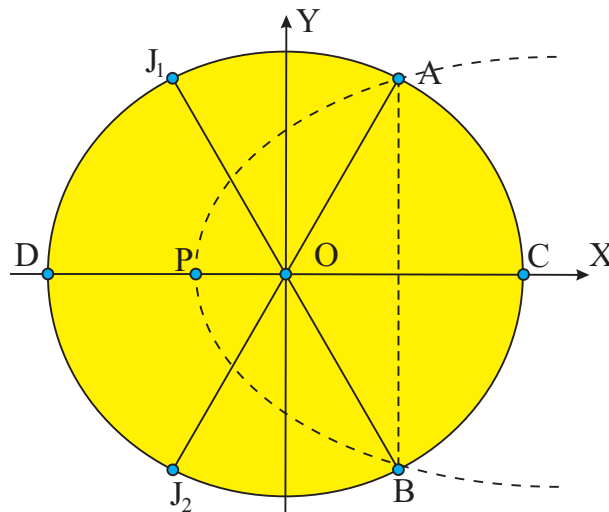


Рис. 3: к определению траектории примечательной кометы.

Решение. 1. Рассмотрим рис. 3, соответствующий условиям задачи. Согласно им, комета на подлете к Солнцу испытала тесное сближение с семейством астероидов "Троянцы" в точке A, поскольку это семейство находится в точке Лагранжа L_5 системы "Солнце-Юпитер", на орбите последнего и отстоящей от него на 60° позади. При этом, сам Юпитер и семейство "Греки" находились в первый момент сближения в точках J_1 и D соответственно (1 балл).

В момент пересечения орбиты Юпитера в точке B комета испытала тесное сближение с "Греками" – семейством астероидов, расположенных в точке L_4 системы "Солнце-Юпитер" и отстоящих впереди Юпитера на 60° . При этом сам Юпитер и Троянцы находились в точках J_2 и D соответственно (1 балл). Следовательно время пролета кометы внутри орбиты Юпитера равно $T_J/3$, где T_J – сидерический период обращения Юпитера вокруг Солнца, поскольку Юпитер и его астероиды прошли $1/3$ дуги орбиты (2 балла).

За указанный промежуток времени гелиоцентрический радиус-вектор заматывает площадь фигуры $APBOA$, площадь которой S_1 есть доля η от всей площади эллипса S_0 . Воспользуемся 2-ым

законом Кеплера:

$$\frac{S_1}{T_J/3} = \frac{S_0}{T}, \Rightarrow T = \frac{T_J}{3\eta} = 2.636 \cdot 10^5 \text{ лет. (2 балла)} \quad (10)$$

Воспользуемся третьим законом Кеплера для определения большой полуоси эллипса орбиты:

$$\left(\frac{a}{a_{\oplus}}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_{\oplus}}\right)^2, \Rightarrow a = a_{\oplus} \left(\frac{T}{T_{\oplus}}\right)^{2/3} = 4110 \text{ а.е. (2 балла)} \quad (11)$$

Воспользуемся уравнение эллипса в полярных координатах для точки A:

$$a_J = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \varphi_A}, \Rightarrow a_J + a_J \varepsilon \cos \varphi_A = a - a\varepsilon^2, \quad (12)$$

$$\varepsilon^2 + \left(\frac{a_J}{a}\right) \varepsilon \cos \varphi_A - \left(1 - \frac{a_J}{a}\right) = 0, \quad (2 \text{ балла}) \quad (13)$$

здесь угол $\varphi_A = \angle AOP = 120^\circ$, в силу симметричного поражения точек A и B относительно прямой OD, на которой, очевидно, расположен перигелий орбиты кометы (2 балла). В итоге уравнение (13) представляется в виде:

$$\varepsilon^2 - \left(\frac{a_J}{a}\right) \frac{1}{2} \varepsilon - \left(1 - \frac{a_J}{a}\right) = 0, \quad (14)$$

$$D = \frac{1}{4} \left(\frac{a_J}{a}\right)^2 + 4 \left(1 - \frac{a_J}{a}\right), \quad (15)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \frac{a_J}{a} \left(1 \pm \sqrt{1 + 16 \left(\frac{a}{a_J}\right)^2 \left(1 - \frac{a_J}{a}\right)}\right) = 0.999683, \quad (4 \text{ балла}) \quad (16)$$

здесь решение со знаком («-») является отрицательным и не соответствует интервалу допустимых значений для ε . Следовательно расстояние до афелия и перигелия кометы есть

$$q = a(1-\varepsilon) = 1.30 \text{ а.е. } Q = a(1+\varepsilon) = 8220.70 \text{ а.е. (2 балла)} \quad (17)$$

Скорости в перигелии и афелии:

$$V_q = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)} = 36.90 \text{ км/с, } V_Q = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)} = 5.85 \text{ м/с. (2 балла)} \quad (18)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (10)-(11), (16)-(18).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное построение картинка, определение положений кометы, Юпитера и астероидов в моменты сближения+ определение времени движения кометы внутри орбиты Юпитера	2+2
Правильный расчет периода обращения кометы вокруг Солнца+ большой полуоси ее орбиты	2+2
Построение уравнения относительно эксцентриситета орбиты + определение истинной аномалии для точки пересечения орбит + его численный + аналитический расчет	2+2+2+2
Расчет расстояний кометы до ее перигелия и афелия	2
Расчет скоростей кометы в ее перигелии и афелии	2

№ 4. «Супертелескоп СРЦОД и его некоторые свойства»

Условие. В Самарском региональном центре для одаренных детей есть 14 одинаковых телескопов-рефлекторов, с диаметром зеркала $D_T = 76$ мм и фокусным расстоянием $f_T = 700$ мм.

Была высказана идея объединить эти телескопы в один супертелескоп для поиска тусклых объектов на периферии Солнечной системы. Полагая, что оптическая схема такого телескопа является идеальной с тем же фокусным расстоянием, а монтровка способна обеспечивать слежение за данным участком неба в течении 3 минут, определите эквивалентный диаметр такого телескопа, относительное отверстие, проникающую силу телескопа в визуальных наблюдениях. Определите визуальную звездную величину самых слабых объектов, которые можно зафиксировать в данный телескоп в видимом диапазоне, с помощью астрокамеры, в режиме слежения? Следует полагать, что минимальная порция энергии, необходимая для получения сигнала камерой от объекта в видимом свете, равна минимальной энергии, получаемой человеческим глазом с диаметром зрачка $d_y = 6$ мм от звезд с $m_y = +6^m$ за время $\tau_y = 50$ мс.

Решение. 1. Согласно условию задачи, все $N=14$ телескопов собирают свет без потерь на приемнике излучения – камере, то полный поток излучения, собираемый супертелескопом, будет

$$\Phi_{\text{tot}} = N \cdot \Phi_1 = N E_0 \left(\frac{\pi D_T^2}{4} \right). \quad (2 \text{ балла}) \quad (19)$$

С другой стороны

$$\Phi_{\text{tot}} = E_0 \frac{\pi D_{ST}^2}{4}, \quad (2 \text{ балла}) \quad (20)$$

здесь E_0 – освещенность, создаваемая небесным телом у поверхности объектива телескопа; D_{ST} – эквивалентный диаметр супертелескопа. Из (19) и (20) следует, что

$$D_{ST} = \sqrt{N} D_T = 284 \text{ мм}. \quad (2 \text{ балла}) \quad (21)$$

2. Относительное отверстие супертелескопа:

$$R = \frac{D_{ST}}{f_T} = \frac{1}{2.46} = 0.406 \approx 2 : 5. \quad (2 \text{ балла}) \quad (22)$$

3. Проникающую силу телескопа в визуальных наблюдениях можно определить как

$$m_{ST} = m_y + 2.5^m \lg \left(\frac{D_{ST}^2}{d_y^2} \right) = 2.1^m + 5^m \lg D_{ST} = 14.4^m. \quad (2 \text{ балла}) \quad (23)$$

4. Определим минимальную порцию энергии, которую необходимо получить камере для формирования сигнала в видимом диапазоне:

$$W = E_y \frac{\pi d_y^2}{4} \tau_y, \quad (2 \text{ балла}) \quad (24)$$

здесь E_y – освещенность, соответствующая звездной величине $m_y = +6^m$ в видимом свете.

С другой стороны, эта порция энергии должна быть собрана данным супертелескопом за время $t_0=3$ мин=180 с:

$$W = E_* \frac{\pi D_{ST}^2}{4} t_0. \quad (2 \text{ балла}) \quad (25)$$

Из равенства (24) и (25) следует, что

$$E_* \frac{\pi D_{ST}^2}{4} t_0 = E_y \frac{\pi d_y^2}{4} \tau_y, \Rightarrow \frac{E_*}{E_y} = \left(\frac{d_y}{D_{ST}} \right)^2 \frac{\tau_y}{t_0}, \quad (2 \text{ балла}) \text{ иначе}$$

$$m_* - m_y = -2.5 \lg \left(\frac{E_*}{E_y} \right), \quad (2 \text{ балла}) \Rightarrow m_* = m_y + 2.5 \lg \left(\frac{t_0}{\tau_y} \left(\frac{D_{ST}}{d_y} \right)^2 \right) = 23.3^m. \quad (2 \text{ балла}) \quad (26)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (21)-(23), (26).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Расчет эквивалентного диаметра такого телескопа	6
Правильно вычислены относительное отверстие + проникающая сила телескопа	2+2



Рис. 4: Бушующие вулканы Ио (указан один из них красной стрелкой) и безмолвие Европы с пролетного КА "Новые горизонты".

Рекомендации для жюри (продолжение).

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректный расчет визуальной звездной величины самых слабых объектов, которые можно зафиксировать в данный телескоп в видимом диапазоне, с помощью астрокамеры, в режиме слежения	10

№ 5. «Ио и Европа в кадре КА "Новые горизонты"»

Условие. Пролетая мимо Юпитера, КА "Новые горизонты" запечатлел на одном фото два спутника этой планеты, причем Ио в момент съемки находился вблизи своей восточной элонгации, с позиции КА. На его поверхности отчетливо видно извержение вулкана. Определите по фотографии: 1) максимальную высоту выброса вещества с поверхности Ио из жерла вулкана, указанного стрелкой (см. рис. 4); 2) скорость выхода продуктов извержения с поверхности спутника; 3) массу вещества, выбрасываемого из жерла вулкана за одну секунду, если его диаметр оценивается в 5 м, а плотность магмы составляет 3000 кг/м^3 . Оцените 4) массу вещества, выброшенного за время его малого извержения, составляющего 3 суток, и 5) максимальную площадь покрытия поверхности спутника продуктами выброса. Какое 6) расстояние было между спутниками Юпитера на момент съемки? На каких 7) расстояниях от КА находились Ио и Европа в момент съемки? Орбиты галилеевых спутников считать круговыми.

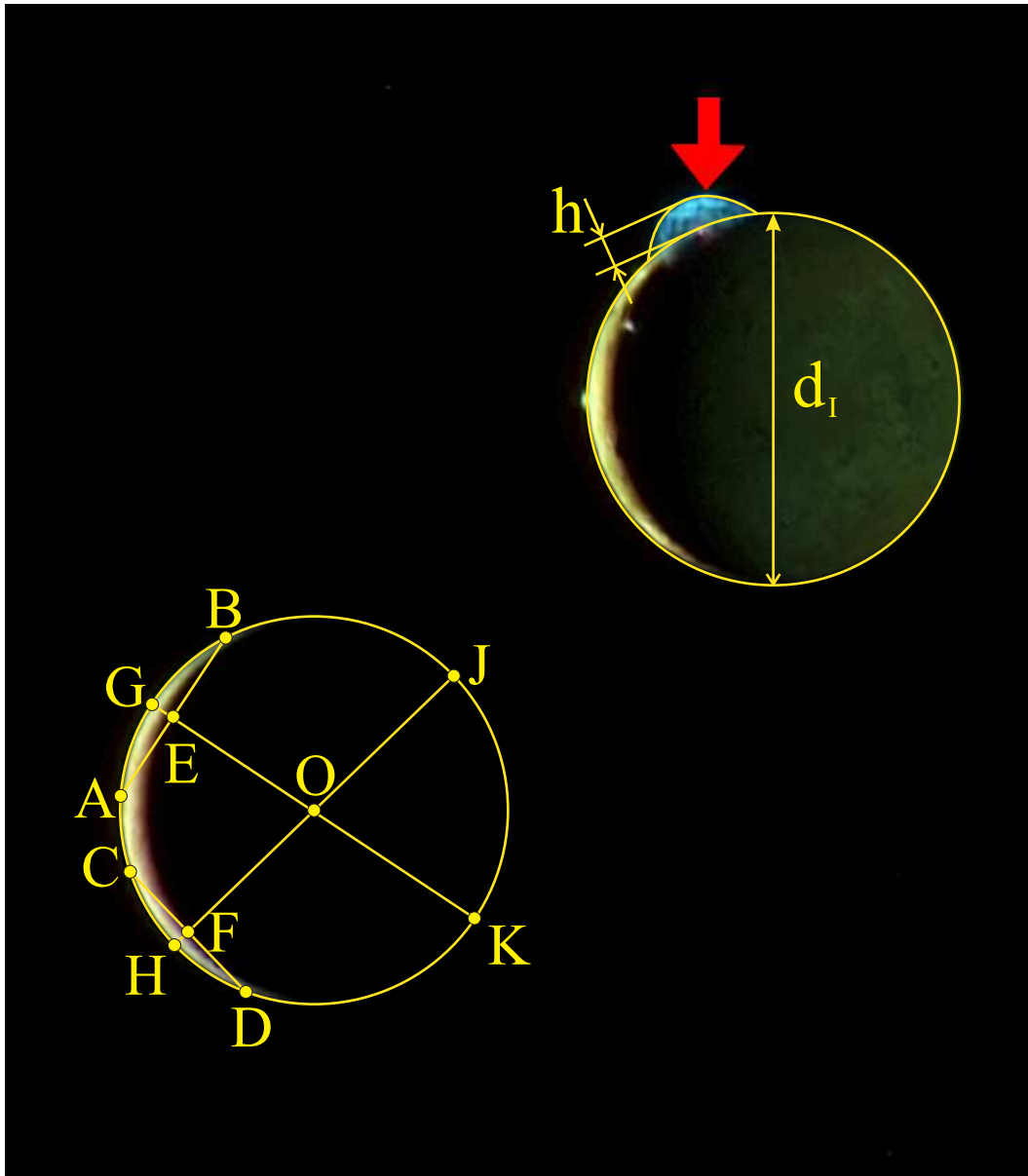


Рис. 5: к определению линейного диаметра Ио и высоты его вулкана.

Решение.

1. Для большей точности измерений отметим границу видимого диска Ио. Отметим профиль выброса (см. рис. 5). Определим диаметр спутника по фотографии $d_I = 75$ мм и высоту выброса $h = 6.5$ мм. Учитывая, что радиус спутника Ио $\mathfrak{R}_I = 1815$ км, составим пропорцию

$$\left. \begin{array}{l} h \rightarrow H \\ d_I \rightarrow 2\mathfrak{R}_I \end{array} \right\} \Rightarrow H = 2\mathfrak{R}_I \left(\frac{h}{d_I} \right) = 315 \text{ км. (3 балла)} \quad (27)$$

2. С использованием закона сохранения энергии определим скорость выхода продуктов извержения массы Δm с поверхности спутника:

$$\frac{\Delta m V_0^2}{2} - \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_I}{\mathfrak{R}_I} = - \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_I}{\mathfrak{R}_I + H}, \Rightarrow$$

$$V_0 = \sqrt{2G\mathfrak{M}_I \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_I} - \frac{1}{\mathfrak{R}_I + H} \right)} = 0.986 \text{ км/с, (2 балла)} \quad (28)$$

здесь $\mathfrak{M}_I$ – масса Ио, G – универсальная гравитационная постоянная.

3. Определим поток массы продуктов извержения:

$$\Phi_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{\pi D_{\text{ж}}^2}{4} V_0 = 58.1 \cdot 10^6 \text{ кг/с} = 58.1 \cdot 10^3 \text{ тонн/с. (2 балла)} \quad (29)$$

4. Оценим массу вещества, выброшенного за время малого извержения:

$$m_{\text{tot}} = \Phi_m \Delta t = 1.51 \cdot 10^{13} \text{ кг. (1 балл)} \quad (30)$$

5. Максимальную площадь покрытия оценим как площадь плоского круга, радиус которого равен максимальной дальности полета:

$$S = \pi L_{\text{max}}^2, \quad \text{где } L_{\text{max}} = \frac{V_0^2}{g_0} = \frac{V_0^2 \mathfrak{R}_1^2}{G \mathfrak{M}_1} = 537 \text{ км, } \Rightarrow$$

$$S = 7.85 \cdot 10^{11} \text{ м}^2 = 9.05 \cdot 10^5 \text{ км}^2. \text{ (3 балла)} \quad (31)$$

Более точный расчет максимальной площади покрытия поверхности спутника продуктами выброса с учетом кривизны его поверхности дает значение $9.27 \cdot 10^5 \text{ км}^2$. Непосредственные измерения радиуса основания "купола" вещества, выбрасываемого с поверхности, дают значение 550 км, что соответствует значению площади $9.50 \cdot 10^5 \text{ км}^2$.

6-7. Определим радиус Европы по фотографии. Для этого построим две неблизкие хорды AB и CD , находим их центры E и F , проводим перпендикуляры через данные точки и находим точку их пересечения – точку O . Определяем длины диаметров $GK=79 \text{ мм}$ и $HJ=79 \text{ мм}$ и вычисляем среднее значение радиуса:

$$r_E = \frac{1}{2} \frac{GK + HJ}{2} = 39.5 \text{ мм. (1 балл)} \quad (32)$$

Из последнего результата следует, что Европа на момент съемки располагалась к КА ближе, нежели Ио. Поскольку спутники расположены близко на фотографии, то будем полагать что КА Ио и Европа были расположены на одной прямой.

Угловые радиусы спутников есть

$$\rho_E = \frac{\mathfrak{R}_E}{\Delta_E}, \quad \rho_I = \frac{\mathfrak{R}_I}{\Delta_I}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_E}{\rho_I} = \left(\frac{\mathfrak{R}_E}{\mathfrak{R}_I} \right) \frac{\Delta_I}{\Delta_E},$$

где Δ_I, Δ_E – расстояния от КА до Ио и Европы соответственно; $\mathfrak{R}_I, \mathfrak{R}_E$ – их радиусы. С другой стороны отношение угловых размеров можно определить через отношение линейных на фотографии:

$$\frac{\rho_E}{\rho_I} = \frac{r_E}{r_I} = \frac{39.5}{37.5} = 1.053, \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\Delta_I}{\Delta_E} = \left(\frac{\rho_E}{\rho_I} \right) \left(\frac{\mathfrak{R}_I}{\mathfrak{R}_E} \right) = 1.218. \text{ (2 балла)} \quad (33)$$

Поскольку КА располагался в западной квадратуре для Ио, относительно материнской планеты, то согласно рис. 6, расстояние между спутниками можно определить по т. Пифагора:

$$\Delta_{IE} = \sqrt{a_E^2 - a_I^2} = 5.220 \cdot 10^5 \text{ км. (2 балла)} \quad (34)$$

С другой стороны, согласно рисунку

$$\Delta_I = \Delta_E + \Delta_{IE}, \quad \frac{\Delta_I}{\Delta_E} = 1 + \frac{\Delta_{IE}}{\Delta_E} \Rightarrow$$

$$\Delta_E = \frac{\Delta_{IE}}{(\eta - 1)} = 2.39 \cdot 10^6 \text{ км, } \Delta_I = \Delta_E + \Delta_{IE} = 2.92 \cdot 10^6 \text{ км. (4 балла)} \quad (35)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (27)-(31), (34)-(35).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное определение максимальной высоты выброса вещества с поверхности Ио в пределах интервала $315 \pm 50 \text{ км}$	3
Определение скорости выхода продуктов извержения с поверхности спутника	2

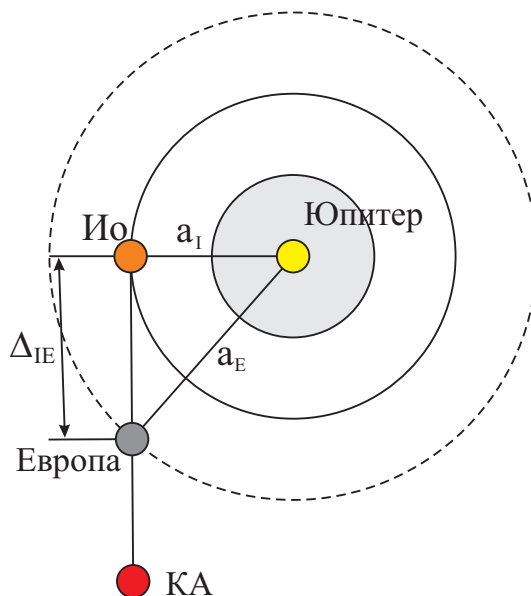


Рис. 6: к определению взаимного расположения спутников и КА.

Рекомендации для жюри (продолжение).

Выполненная часть решения задачи	Балл
Расчет потока массы вещества, выбрасываемого из жерла вулкана	2
Корректная оценка массы вещества, выброшенного за время малого извержения	1
Определение максимальной площади покрытия в пределах интервала $(8.50 \div 1.00) \cdot 10^5 \text{ км}^2$	3
Определение по фотографии линейного радиуса Европы + и отношения η	1+2
Расчет расстояния между спутниками Δ_{IE} на момент съемки	2
Корректный расчет расстояний от КА до Ио + Европы	2+2

№ 6. «Отражательная туманность и ее поверхностная яркость»

Условие. Граница отражающей туманности, за которой она перестает быть заметной для наземного телескопа, соответствует поверхностной яркости 23.0^{m} с квадратной секунды. Получите формулу, которая связывает видимую звездную величину освещающей туманность звезды с угловым размером туманности в секундах дуги, если альbedo пылевых частиц равно $A_p = 0.05$. Следует полагать пылевые частицы изотропными источниками излучения и межзвездным поглощением света пренебречь.

Решение. 1. Пусть r_* – астроцентрическое расстояние наблюдателя от звезды, r_p – астроцентрическое расстояние пылевой частицы, Δ_p – геоцентрическое расстояние частицы, тогда освещенности, создаваемые звездой и пылевой частицей у поверхности Земли можно записать так

$$E_* = \frac{L_*}{4\pi r_*^2}, \quad (2 \text{ балла}) \quad E_p = \frac{L_*}{4\pi r_p^2} \frac{\pi R_p^2 A_p}{4\pi \Delta_p^2}, \quad (4 \text{ балла}) \quad (36)$$

здесь L_* – светимость звезды, R_p – радиус пылевой частицы – изотропного источника излучения. Учитывая, что частица видна с Земли под телесным углом

$$\Omega_p = k \frac{\pi R_p^2}{\Delta_p^2}, \quad (2 \text{ балла}) \quad (37)$$

здесь $k = 4.255 \cdot 10^{10}$ кв. угл. сек/срад – коэффициент перевода единиц измерения угла. Следовательно, поверхностная яркость отражательной туманности будет

$$B_N = \frac{E_p}{\Omega_p} = \frac{L_* A_p}{16\pi^2 k r_p^2}. \quad (4 \text{ балла}) \quad (38)$$

Если частица располагалась на окраине туманности, в наибольшем удалении от центрального светила, то здесь $B_N = B_{\text{max}} = 23.0^{\text{m}}$ / кв. угл. сек, при этом угловой диаметр туманности будет

$$D_N'' = \frac{2r_p}{r_*} 206265''. \quad (2 \text{ балла}) \quad (39)$$

Определим отношение B_{max}/E_* :

$$\frac{B_{\text{max}}}{E_*} = \frac{A_p r_*^2}{4\pi r_p^2 k} = \frac{A_p}{\pi k} \left(\frac{r_*}{2r_p} \right)^2 = \frac{A_p}{\pi k} \left(\frac{206265''}{D_N''} \right)^2 = \frac{A_p}{\pi D_N''^2}. \quad (2 \text{ балла}) \quad (40)$$

Далее воспользуемся формулой Погсона:

$$m_{\text{max}} - m_* = -2.5^{\text{m}} \lg \left(\frac{B_{\text{max}}}{E_*} \right), \quad (2 \text{ балла}) \Rightarrow m_* = m_{\text{max}} - 2.5^{\text{m}} \lg \frac{\pi D_N''^2}{A_p} =$$

$$m_{\text{max}} - 2.5^{\text{m}} \lg \left(\frac{\pi}{A_p} \right) - 5^{\text{m}} \lg D_N'', \Rightarrow m_* = 18.5^{\text{m}} - 5^{\text{m}} \lg D_N''. \quad (2 \text{ балла}) \quad (41)$$

Ответ: к задаче представляется выражением (41).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное определение освещенностей, создаваемых звездой + пылевой частицей в месте, где находится наблюдатель	2+4
Правильно вычислен телесный угол для пылевой частицы	2
Получено корректное выражение для поверхностной яркости туманности	4
Правильно определен угловой диаметр туманности	2
Представлено корректное выражение для отношения $B_{\max}/E_*$	2
Правильное применение формулы Погсона	2
Корректный вывод выражения для звездной величины звезды, освещающей туманность, как функции углового диаметра туманности	2

На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год – $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая визуальная звездная величина – -26.74^m
- Видимая болометрическая звездная величина – -26.80^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – $\text{N}_2 (78\%), \text{O}_2 (21\%), \text{Ar} (\sim 1\%)$

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 363300 км
- Максимальное расстояние от Земли – 405500 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$

- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.