

САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ
ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.
СЕЗОН: 2020-2021, ТУР № 2



Самара, 2021 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 12 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 2». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/omoa-solutions>

Составитель: – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе $\text{\LaTeX}$ – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

vk.com/bredikhinolimp

3. Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021 тура № 2 на проверку:

15.02.2021-31.03.2021!!!

4. Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021:

samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

<https://vk.com/bredikhinolimp>

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2021»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника.**

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Майская Луна»

На рис. 1 представлена фотография Луны, полученная в мае. Какие из ниже перечисленных достопримечательностей (кратер Тихо, кратер Кеплер, Море Ясности, кратер Аристарх, Море Лета, Озеро смерти, Океан Бурь, кратер Коперник, Залив Росы, Болото Туманов, Море кризисов, Болота Эпидемий) ее рельефа находятся на освещенной стороне? Оцените по фотографии диаметр кратера Платон (методику оценки и расчеты необходимо представить). (5 баллов).



Рис. 1: майская Луна (автор – Филиппов Юрий).

Задача № 2. «Кривая скоростей звезд Млечного Пути и относительная скорость»

На рис. 2 представлена кривая скоростей звезд Млечного пути в зависимости от расстояния до его центра. Определите с использованием данного графика, а) максимально возможное значение скорости звезд Галактики относительно Солнца? б) расстояние от Солнца до таких звезд, в) во сколько раз отличаются периоды вращения таких звезд и Солнца относительно центра Галактики? (5 баллов).

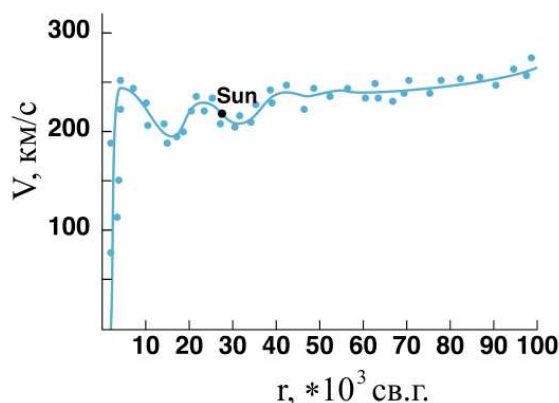


Рис. 2: кривая скоростей звезд Млечного Пути в зависимости от расстояния до его центра (источник – uoregon.edu).

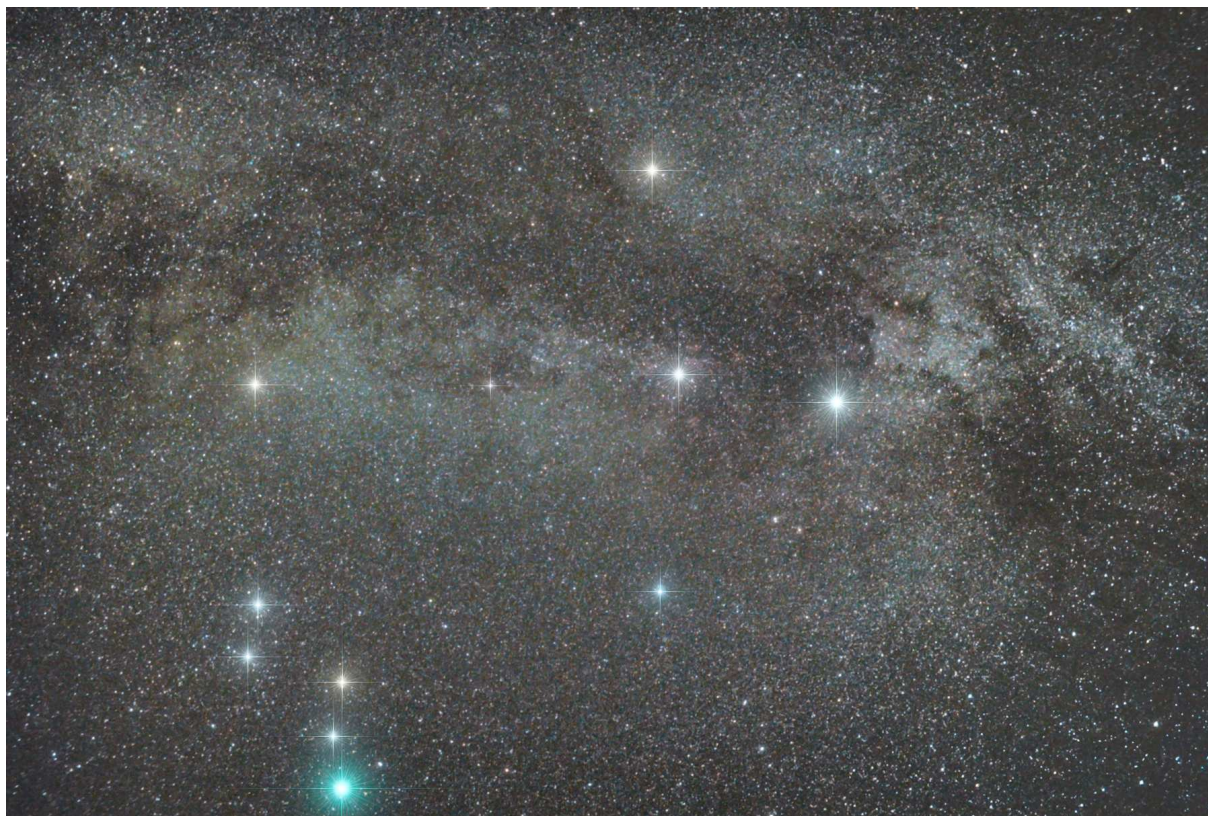


Рис. 3: участок Млечного Пути с его некоторыми яркими звездами (автор: Филиппов Ю.П.).

Задача № 3. «Третья космическая скорость КА»

Получите аналитическое выражение и численное значение для *третьей космической скорости* – минимальной скорости, которую необходимо придать находящемуся вблизи поверхности Земли космическому аппарату (КА), чтобы он мог преодолеть гравитационное притяжение Земли и Солнца и покинуть пределы Солнечной системы. (5 баллов).

Задача № 4. «Часть Млечного Пути и созвездия»

На рис. 3 представлена часть Млечного Пути, на которую проецируются его некоторые яркие звезды.

1. Как называется самая яркая звезда, представленная на этом снимке? (1 балл)
2. Какое место она занимает в рейтинге самых ярких звезд земного небосвода? Чему равна ее видимая звездная величина? (2 балла)
3. В какое созвездие она входит? (1 балла)
4. С использованием сторонних данных, оцените угол между направлением на эту звезду и на центр Галактики. (3 балла)

Задача № 5. «Луна и условия ее фотосъемки»

1. В какое время суток была сделана фотография Луны, представленная на рис. 1, если ее изображение является прямым? В какой стороне небосвода она могла при этом располагаться? (2 балла)
2. Оцените по фотографии фазу Луны. (2 балла)
3. Какое количество дней (с точностью до целых) спустя состоялось ближайшее полнолуние? (2 балла)

4. Определите долю, которую составляет освещенная часть поверхности Луны от всей ее поверхности? (2 балла)

Задача № 6. «Морозко: запуск на геоцентрическую орбиту»

В советской сказке "Морозко" один из ее главных героев, Иван, в сцене нападения на него лесных разбойников метнул несколько дубинок в небо. Прошло ровно полгода и разбойники вновь напали на Ивана и его невесту, Настеньку. Во время нападения дубинки упали на головы разбойникам и помогли Ивану справиться с последними. Полагая, что все время полета дубинки двигались вокруг Земли по эллиптической (геоцентрической) орбите, определите,

1. Минимальное значение эксцентриситета такой орбиты. (2 балла)
2. Большую полуось орбиты. (2 балла)
3. Значения скорости в перигее и апогее. (4 балла)
4. Расстояние до апогея. (2 балла)

Сопротивлением воздуха, гравитационными возмущениями кеплеровой орбиты от прочих тел пренебречь.

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Кульминации двойной звезды»

В некотором населенном пункте северного полушария Земли наблюдалась двойная звезда в верхней и нижней кульминациях. В верхней кульминации первый компонент кульминировал к югу от зенита, второй – точно в зените, причем звезды прошли через меридиан одновременно 23 сентября в 1 час 20 минут по местному среднему солнечному времени. Из наблюдений удалось определить угловое расстояние между компонентами – $d = 5'$. В нижней кульминации первый из компонентов оказался под горизонтом, второй – точно на горизонте. Определите широту места наблюдения и экваториальные координаты звезд. (11 баллов).

Задача № 8. «Навигационные сумерки в городе белых ночей»

Как известно, в РФ городом белых ночей традиционно считается г. Санкт-Петербург ($\varphi_{SP} = 59^\circ 57'$, $\lambda_{SP} = 30^\circ 19'$). На самом деле в этом городе не бывает белых ночей (в строгом смысле)! Определите

1. Моменты начала и окончания навигационных сумерек (по декретному времени) в самую короткую ночь года. (6 баллов)
2. Продолжительность навигационных сумерек в этом городе в эту ночь. (2 балла)
3. Минимальное расстояние от данного города до точки поверхности Земли, где уже в течение года могут наблюдаться белые ночи. (3 балла)
4. В какую сторону света надо перемещаться, чтобы попасть в данную точку? (1 балл)

Задача № 9. «Гипотеза Planet Nine и ее видимая звездная величина»

В январе 2016 года американскими астрофизиками Брауном М.Е. и Боттигиным К. была сформулирована гипотеза о существовании на окраинах Солнечной системы еще одной планеты, получившей название Planet Nine (Планета 9). По последним оценкам специалистов масса этой планеты заключена в интервале $(5 \div 20)\mathfrak{M}_{\oplus}$ (здесь и далее $\mathfrak{M}_{\oplus}$, $\mathfrak{R}_{\oplus}$ – масса и радиус Земли соответственно). Радиус планеты должен удовлетворять уравнению вида:

$$\mathfrak{R}_{P9} = \mathfrak{R}_{\oplus} \left(2.4 + 0.1 \left(\frac{\mathfrak{M}_{P9}}{\mathfrak{M}_{\oplus}} \right) \right), \quad (1)$$

где $\mathfrak{M}_{P9}$, $\mathfrak{R}_{P9}$ – масса и радиус гипотетической планеты. Сферическое альбедо (A_{P9}) планеты, большая полуось (a_{P9}) ее орбиты и эксцентриситет (ε_{P9}) должны удовлетворять системе неравенств вида:

$$0.3 \leq A_{P9} \leq 0.75, \quad 350 \text{ а.е.} \leq a_{P9} \leq 1000 \text{ а.е.}, \quad 0.3 \leq \varepsilon_{P9} \leq 0.75. \quad (2)$$

Опираясь на данные результаты, оцените

1. Интервал возможных значений для видимой звездной величины планеты. (10 баллов)
2. Минимальный диаметр зеркала телескопа, необходимого для визуального поиска и идентификации гипотетической планеты. (4 балла)

Задача № 10. «Где-то там... на краю Галактики»

На рис. 3 представлена часть диска Млечного Пути (МП). Полагая, что вся масса и звезды МП сосредоточены в его галактическом диске (последний следует считать однородным), определите первую и вторую космические скорости для звезд на краю галактического диска. Следует считать, что масса МП составляет $\mathfrak{M}_G = 1.5 \cdot 10^{12} \cdot \mathfrak{M}_{\odot}$, диаметр диска – $D_G = 10^5$ св. лет., толщина диска – $H = 10^3$ св. лет. (14 баллов).

Задача № 11. «Предел Чандрасекара для белого карлика»

Как известно, **белый карлик (БК)** является одной из возможных конечных стадий эволюции звезд, небесным шарообразным телом, где гравитационные силы уравновешивают силы давления вырожденного газа. Давление вырожденного электронного газа имеет квантовую природу. Оно возникает как следствие принципа Паули, которому подчиняются электроны. С использованием данного принципа и соотношения неопределенностей Гейзенберга, получите

1. Аналитическое выражение для давления вырожденного электронного газа. (4 балла)
2. Аналитическое выражение для давления звездного вещества, обусловленного гравитационными силами. (3 балла)

3. Аналитическое выражение и численный результат для максимально допустимой массы БК (предел Чандрасекара). (3 балла)
4. Аналитическое (оценочное) выражение и численный результат для средней массовой плотности вырожденного газа БК. (2 балла)
5. Аналитическое выражение и численный результат для радиуса БК в пределе Чандрасекара. (2 балла)

Задача № 12. «Морозко: запуск на гелиоцентрическую орбиту»

В советской сказке "Морозко" один из ее главных героев, Иван в сцене нападения на него лесных разбойников метнул несколько дубинок в небо. Прошло ровно полгода и разбойники вновь напали на Ивана и его невесту, Настеньку. Во время нападения дубинки упали на головы разбойникам и помогли Ивану справиться с последними. Полагая, что все время полета дубинки двигались вокруг Солнца по эллиптической (гелиоцентрической) орбите, определите,

1. Эксцентриситет этой орбиты. (4 балла)
2. Большую полуось эллиптической орбиты. (2 балла)
3. Гелиоцентрическую скорость дубинок в точке пересечения орбит дубинок и Земли, вдали от последней. (2 балла)
4. Угол между направлением скоростей дубинок и Земли, в точке пересечения орбит. (3 балла)
5. Скорость дубинок относительно Земли, в указанной выше точке, вдали от Земли. (2 балла)
6. Минимальную скорость, которую должен был придать Иван дубинкам на Земле, чтобы последние смогли начать движение по указанной орбите. (2 балл)

Сопротивлением воздуха и гравитационными возмущениями кеплеровой орбиты дубинок пренебречь. Орбиту Земли считать круговой.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Майская Луна»

Решение. На освещенной стороне Луны (см. рис. 1) находятся следующие элементы рельефа (для сравнения см. рис. 4): кратер Тихо, Море Ясности, Озеро смерти, кратер Коперник, Болото Туманов, Море кризисов.

Для оценки диаметра кратера Платон измерим линейкой по фотографии его наибольший неискаженный эффектом проекции размер – $d_c=2.5$ мм, определим таким же образом диаметр Луны – $d_M=89$ мм (Ваши значения могут отличаться от указанных, при использовании фотографии в ином масштабе). Составим пропорцию:

$$\left. \begin{array}{l} d_c \rightarrow x \\ d_M \rightarrow 2\mathfrak{R}_\zeta \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2\mathfrak{R}_\zeta \left(\frac{d_c}{d_m} \right) = 98 \text{ км}, \quad (3)$$

здесь $\mathfrak{R}_\zeta$ – радиус Луны. Последнее значение уверенно согласуется с оценками (95-100 км) диаметра этого кратера профессионалами. (5 баллов)

Задача № 2. «Кривая скоростей звезд Млечного Пути и относительная скорость»

Решение. а. Относительная скорость звезд (относительно Солнца) определяется как

$$\vec{V}_{\text{rel}} = \vec{V}_* - \vec{V}_\odot, \Rightarrow V_{\text{rel}} = \sqrt{V_*^2 + V_\odot^2 - 2V_* V_\odot \cos \alpha}, \quad (4)$$

здесь $\vec{V}_*$, $\vec{V}_\odot$ – векторы скоростей звезды и Солнца, определенные относительно центра Галактики, α – угол между данными векторами. Очевидно, чтобы V_{rel} была максимальной необходимо, чтобы

1) угол $\alpha = \pi(180^\circ)$, поскольку в этом случае $\cos \alpha = -1$, что достигается в случае звезд, движущихся навстречу Солнцу.

2) величина V_* должна быть максимальной, что достигается на краю Галактики. В результате имеем

$$V_{\text{rel}}^{(\max)} = V_*^{(\max)} + V_\odot = 270 + 220 = 490 \text{ км/с}, \quad (5)$$

здесь $V_*^{(\max)}=270$ км/с – определена как крайняя правая точка кривой скоростей звезд, $V_\odot=220$ км/с – скорость Солнца.

б. Очевидно, что такая звезда движется на окраине Галактики на продолжении прямой "Солнце-Центр Галактики", тогда расстояние до нее будет

$$r = r_* + r_\odot = (26 + 100) \cdot 10^3 \text{ св. лет} = 1.26 \cdot 10^5 \text{ св. лет}. \quad (6)$$

в. Как известно, в низшем приближении движение звезд в диске Галактики можно рассматривать как движение по окружности, тогда период обращения

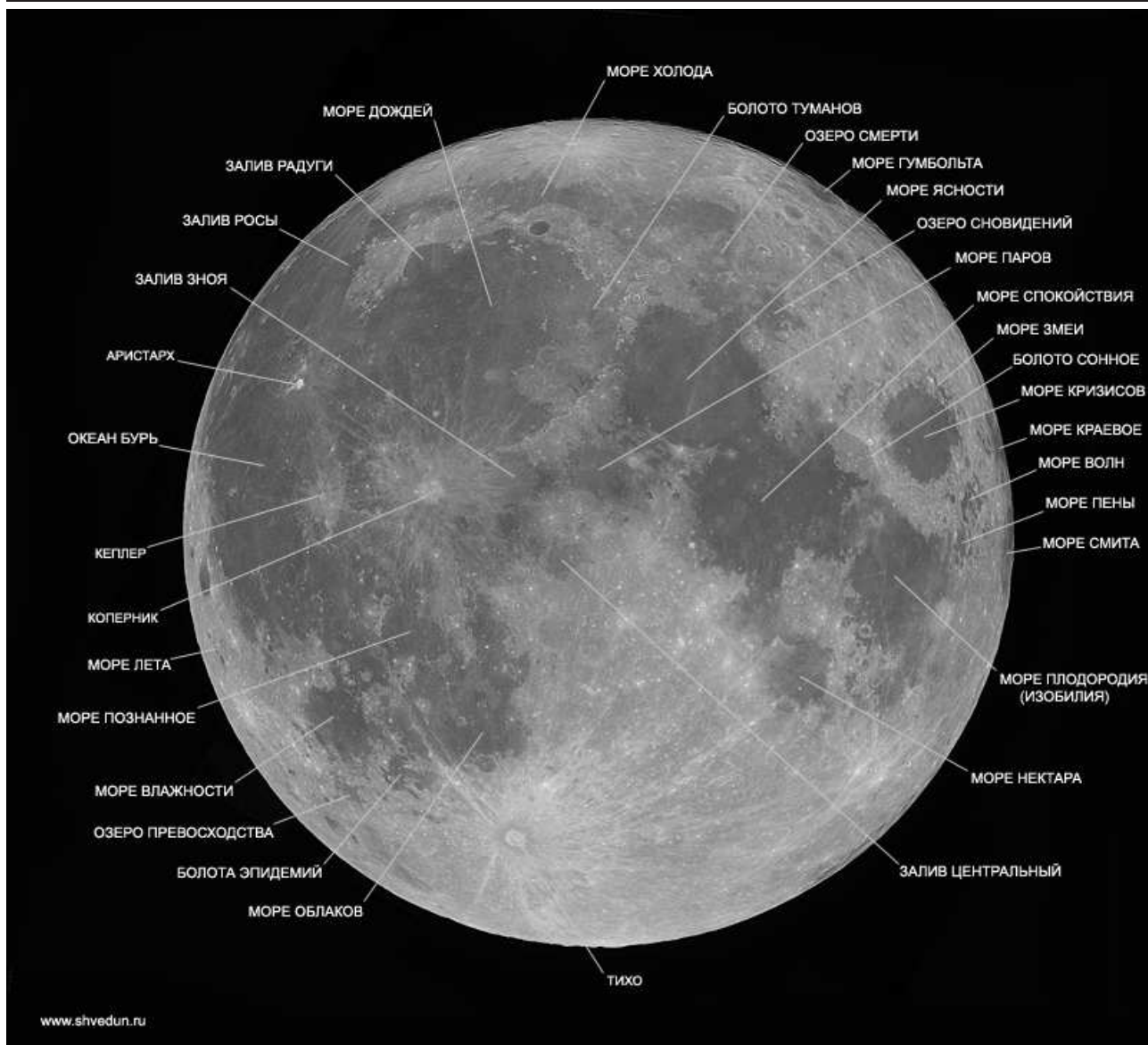


Рис. 4: достопримечательности рельефа видимой стороны Луны.

Солнца и звезды:

$$T_{\odot} = \frac{2\pi r_{\odot}}{V_{\odot}}, \quad T_* = \frac{2\pi r_*}{V_*}, \quad \Rightarrow \quad \frac{T_*}{T_{\odot}} = \left(\frac{r_*}{r_{\odot}}\right) \left(\frac{V_{\odot}}{V_*}\right) = 3.1 \text{ раза.} \quad (7)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (5)-(7). (5 баллов)

Задача № 3. «Третья космическая скорость КА»

Решение. Чтобы КА смог покинуть Солнечную систему необходимо, чтобы на орбите Земли, вдали от последней, его полная механическая энергия в поле тяготения Солнца была равна нулю:

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{G m \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}} = 0, \quad \Rightarrow \quad V_0^2 = \frac{2G \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}, \quad (8)$$

здесь $\mathfrak{M}_{\oplus}$ – масса Солнца, $a_{\oplus}$ – большая полуось земной орбиты. При этом относительно Земли скорость КА будет минимальна в случае, когда он будет

удаляться от планеты в направлении ее движения, тогда

$$V_{\text{rel}} = V_0 - V_{\oplus} = \sqrt{\frac{2G \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} - \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} = (\sqrt{2} - 1)V_{\oplus}, \quad (9)$$

здесь учтено, что орбитальная скорость Земли есть

$$V_{\oplus} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} = 29.78 \text{ км/с}. \quad (10)$$

Согласно закону сохранения энергии, энергия КА (относительно Земли) вблизи ее поверхности и вдали от нее равны, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{mV_{\text{III}}^2}{2} - \frac{G m \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} &= \frac{mV_{\text{rel}}^2}{2}, \Rightarrow V_{\text{III}}^2 = V_{\text{rel}}^2 + \frac{2G \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} = (\sqrt{2} - 1)^2 V_{\oplus}^2 + V_{\text{II}}^2, \\ \Rightarrow V_{\text{III}} &= \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 V_{\oplus}^2 + V_{\text{II}}^2} = 16.65 \text{ км/с}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь учтено, что вторая космическая скорость КА у поверхности Земли есть

$$V_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2G \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}}}, \quad (12)$$

где $\mathfrak{M}_{\oplus}, \mathfrak{R}_{\oplus}$ – масса и радиус Земли.

Ответ: к задаче представляется выражением (11) (5 баллов).

Задача № 4. «Часть Млечного Пути и созвездия»

Решение. Очевидно на фотографии представлена часть Млечного пути в районе созвездий Лиры и Лебеда.

1. Как известно, самой яркой звездой этой части небосвода является α Лиры или Вега (видна на фото как самая яркая и "пушистая" звезда зеленоватого оттенка). (1 балл)

2. Данная звезда занимает пятое место в рейтинге самых ярких звезд. Ее видимая звездная величина составляет $+0.03^m$. (2 балла)

3. Данная звезда является самой яркой звездой созвездия Лиры. (1 балл)

4. Для определения угла между направлениями на данную звезду и на центр Галактики Sgr A* определим их

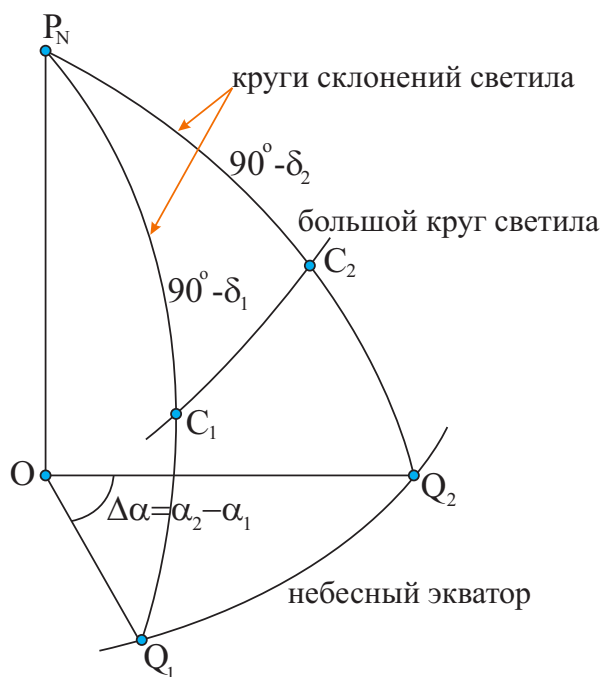


Рис. 5: к определению угла σ .

экваториальные координаты

$$\left. \begin{array}{l} \text{Вега} : \alpha_* = 18^{\text{h}}37^{\text{m}}, \delta_* = 38^{\circ}47' \\ \text{Sgr A}^* : \alpha_c = 17^{\text{h}}46^{\text{m}}, \delta_c = -29^{\circ}00'. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Далее рассмотрим сферический треугольник $\triangle_S P_N C_1 C_2$ (см. рис. 5). С использованием теоремы косинусов для данного треугольника имеем

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \delta_2 \right) \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \\ \Rightarrow \sigma &= \arccos[\sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Отождествляя координаты (13) с координатами (14), в результате получаем значение искомого угла $\sigma = 68^{\circ}$. (3 балла)

Ответ: $\sigma = 68^{\circ}$ (7 баллов).

Задача № 5. «Луна и условия ее фотосъемки»

Решение. 1. Поскольку изображение Луны является прямым и освещена западная часть диска Луны, то эта фотография могла быть сделана после заката Солнца и вплоть до истинной полуночи (и даже чуть позже), т.е. по сути, вечером. Вечером Луна видна в юго-западной части небосвода. (2 балла)

2. Для оценки фазы Луны воспользуемся следующей методикой. Отметим точки A и B – точки пересечения границы видимого диска Луны и ее терминатора. Соединим их прямой AB . Для большей наглядности определим положение терминатора дугой $A\hat{D}B$. Найдем середину отрезка AB и проведем перпендикуляр ND . С помощью линейки определим длину этого перпендикуляра – $d = ND = 191$ мм (здесь и далее Ваши значения могут отличаться от указанных при использовании картинки в ином масштабе). Далее определим положение центра диска Луны. Для этого построим две неблизкие хорды EF и JK , найдем их центры – точки M и H . Построим к ним перпендикуляры – LM и GH . Найдем точки их пересечения – точку O . Последняя является центром видимого диска. Определим радиусы диска с

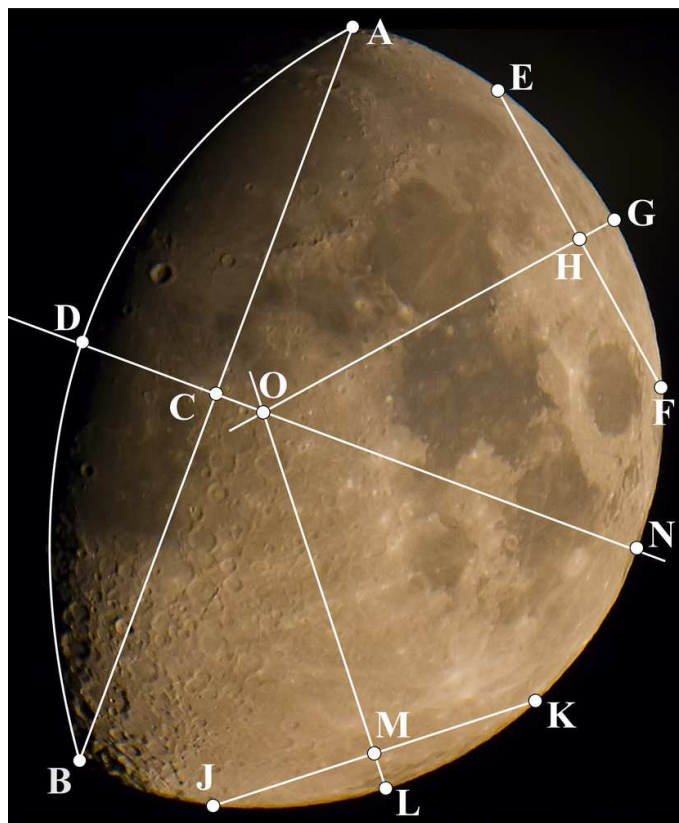


Рис. 6: к определению фазы Луны.

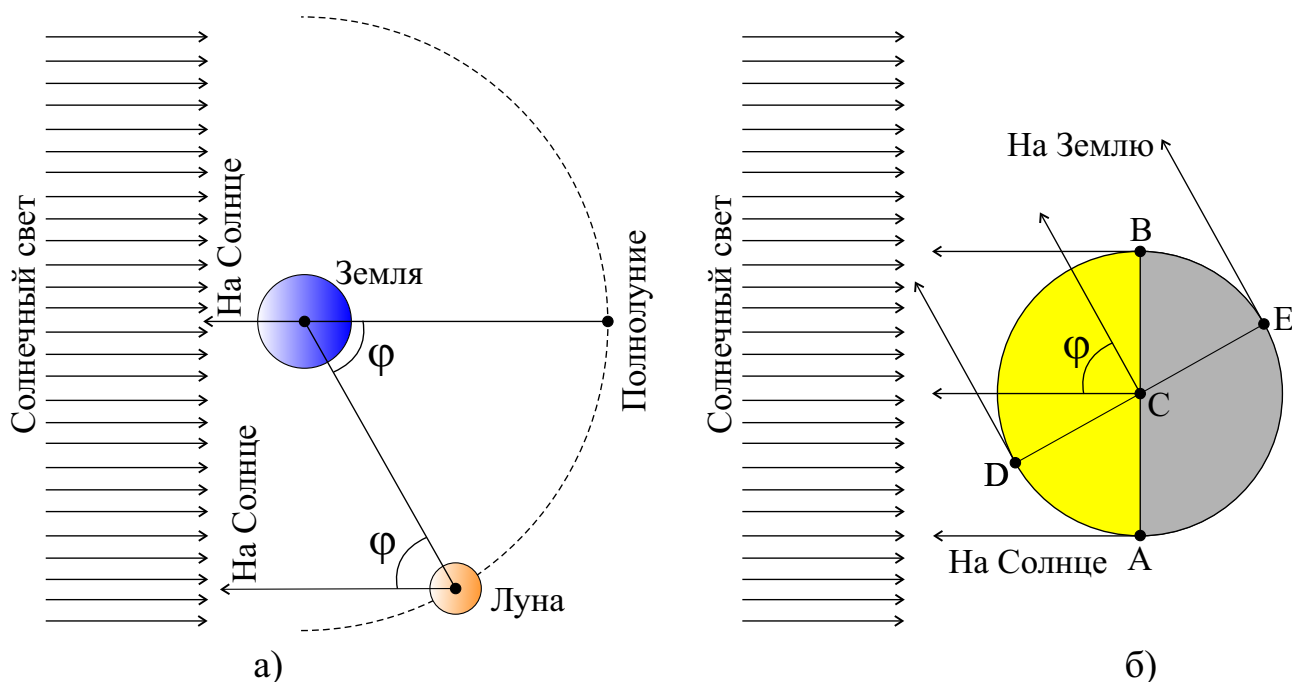


Рис. 7: к определению а) фазы Луны и оставшегося количества дней до полнолуния, б) доли поверхности Луны, освещенной Солнцем и видимой с Земли.

помощью линейки: $OL = 128$ мм, $OG = 129$ мм, $ON = 128$ мм. В качестве радиуса диска Луны примем среднее арифметическое от последних значений – $R = 128.3$ мм. Тогда фазу Луны можно определить как (2 балла)

$$\Phi = \frac{d}{2R} = 0.744. \quad (15)$$

3. Зная фазу Луны, легко определить ее фазовый угол φ :

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi), \Rightarrow \varphi = \arccos[2\Phi - 1] = 61^\circ. \quad (16)$$

Согласно рис. 7.а) нетрудно убедиться в том, что Луне до ближайшего полнолуния необходимо было пройти именно угол φ . Следовательно, искомое количество дней есть

$$N_d = \left[\frac{\varphi}{360^\circ} T_{\zeta} \right] = 5 \text{ сут}, \quad (17)$$

здесь T_{ζ} – синодический месяц Луны. (2 балла)

4. Определите долю, которую составляет освещенная часть поверхности Луны, видимой с Земли, от всей ее поверхности. Для это рассмотрим рис. 7.б), здесь Луна представлена с позиции гипотетического наблюдателя, парящего над ее северным полюсом. Очевидно, с Земли видна освещенная часть BCD, по сути двугольник, с углом раствора $\angle BCD = \gamma = 2 \cdot (90^\circ - \varphi) + \varphi = 180^\circ - \varphi = \pi - \varphi$. Как известно, площадь двугольника представляется выражением вида:

$$S = 2\Re_{\zeta}^2 \gamma = 2\Re_{\zeta}^2 (\pi - \varphi). \quad (18)$$

Искомая доля будет равна (2 балла)

$$\eta = \frac{S}{4\pi \Re_{\zeta}^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) = 0.331. \quad (19)$$

Ответ: 1) фотография была сделана вечером, в юго-западной части неба; 2)-4) представляются (15), (17), (19). (8 баллов).

Задача № 6. «Морозко: запуск на геоцентрическую орбиту»

Решение: Рассмотрим рис. 8, соответствующий условиям задачи. Предположим, что дубинки брошены Иваном из точки S . В силу симметрии положения эллиптической орбиты относительно прямой AP , точка падения на Землю будет F , а перигелий орбиты лежит в

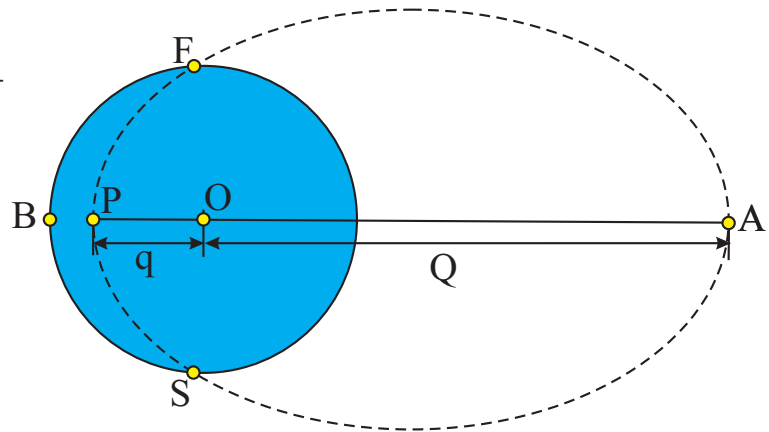


Рис. 8: к определению геоцентрической орбиты дубинок. теле Земли, в точке P . Поскольку период обращения дубинок очень близок к $T_{\oplus}/2$, где $T_{\oplus}$ – звездный год Земли, то можно определить большую полуось данной эллиптической орбиты с использованием третьего закона Кеплера.

$$\left(\frac{a}{a_{\odot}}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^2, \Rightarrow a = a_{\odot} \left(\frac{T_{\oplus}}{2T_{\odot}}\right)^{2/3} = 1.364 \cdot 10^5 \text{ км.} \quad (20)$$

Как известно, расстояние орбиты q можно записать так

$$q = a(1 - \varepsilon), \Rightarrow \varepsilon = 1 - \frac{q}{a}. \quad (21)$$

Чтобы последняя величина была минимальной, необходимо чтобы q принимало максимальное значение. Из рисунка видно, что $q \leq \mathfrak{R}_{\oplus}$, тогда точки старта (S) и падения дубинок (F) должны совпадать с точкой B . Из (21) следует, что

$$\varepsilon_{\min} = 1 - \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{a} = 0.9953. \quad (22)$$

Следовательно, расстояние до апогея можно записать так

$$Q = a(1 + \varepsilon_{\min}) = 2.722 \cdot 10^5 \text{ км.} \quad (23)$$

Скорость дубинок в перигее и апогее орбиты есть

$$V_q = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\oplus}}{a} \left(\frac{1 + \varepsilon_{\min}}{1 - \varepsilon_{\min}}\right)} = V_I \sqrt{1 + \varepsilon_{\min}} = 11.17 \text{ км/с}, \quad (24)$$

$$V_Q = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\oplus}}{a} \left(\frac{1 - \varepsilon_{\min}}{1 + \varepsilon_{\min}}\right)} = V_I \frac{(1 - \varepsilon_{\min})}{\sqrt{1 + \varepsilon_{\min}}} = 0.026 \text{ км/с} = 26 \text{ м/с}, \quad (25)$$

$$\text{где } V_I = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}}} = 7.909 \text{ км/с}, \quad q = a(1 - \varepsilon_{\min}) = \mathfrak{R}_{\oplus}. \quad (26)$$

В выражениях (24) и (25) V_1 – первая космическая скорость у поверхности Земли.

Ответ: к задаче представляется формулами (20), (22)-(25). (10 баллов).

Уровень «Знатор» (уровень В)

Задача № 7. «Кульминации двойной звезды»

Решение. Поскольку звезды прошли через меридиан одновременно, то их прямые восхождения равны между собой, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$ и равны звездному времени (s) в момент кульминации. 23 сентября – день осеннего равноденствия, когда звездное время на начало суток совпадает с истинным солнечным временем. Уравнение времени на указанную дату составляет $\eta \approx -10^m$, тогда истинное солнечное время в указанный момент было $T_\odot = T_m - \eta = 01^h30^m$, т.е. $s = 01^h30^m$. Следовательно

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 01^h30^m. \quad (27)$$

Первый компонент кульминировал к югу от зенита, тогда $\delta_1 < \varphi$; второй кульминировал точно в зените, тогда

$$\delta_2 = \varphi. \quad (28)$$

Поскольку звезды расположены на одном меридиане, то угловое расстояние между компонентами есть

$$d = \delta_2 - \delta_1. \quad (29)$$

В нижней кульминации, звезды также пройдут меридиан одновременно, причем их высоты здесь

$$\text{для комп-та 1 : } -d = \delta_1 + \varphi - 90^\circ, \quad (30)$$

$$\text{для комп-та 2 : } 0 = \delta_2 + \varphi - 90^\circ, \text{ или } 2\varphi = 90^\circ, \Rightarrow \delta_2 = \varphi = 45^\circ. \quad (31)$$

В итоге получаем следующие значения искомых величин $\delta_1 = 44^\circ55'$, $\delta_2 = \varphi = 45^\circ$. Окончательно имеем следующие экваториальные координаты компонентов двойной звезды – ($\alpha_1 = 01^h30^m$, $\delta_1 = 44^\circ55'$), ($\alpha_2 = 01^h30^m$, $\delta_2 = 45^\circ00'$).

Ответ: $\varphi = 45^\circ$, ($\alpha_1 = 01^h30^m$, $\delta_1 = 44^\circ55'$), ($\alpha_2 = 01^h30^m$, $\delta_2 = 45^\circ00'$). (11 баллов).

Задача № 8. «Навигационные сумерки в городе белых ночей»

Решение. 1. Как известно, декретное время (T_d) связано с поясным (T_N) посредством уравнения:

$$T_d = T_N + 1^h. \quad (32)$$

В свою очередь поясное время связано со всемирным (T_0) так

$$T_N = T_0 + N^h, \quad (33)$$

здесь $N^h = 2^h$ – номер часового пояса для Санкт-Петербурга.

Местное среднее солнечное время можно связать со всемирным посредством уравнения вида:

$$T_m = T_0 + \lambda_{SP}, \Rightarrow T_0 = T_m - \lambda_{SP}. \quad (34)$$

Местное среднее солнечное с истинным солнечным временем ($T_\odot$) связаны посредством уравнения времени η :

$$T_m = T_\odot + \eta = 12^h + t_\odot + \eta. \quad (35)$$

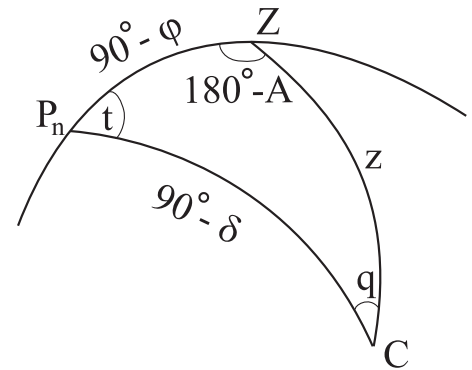


Рис. 9: к определению параллактического треугольника.

Из (32)-(35) следует явное выражение для декретного времени:

$$T_d = t_\odot + \eta - \lambda_{SP} + N^h + 13^h, \quad (36)$$

таким образом, для определения искомого декретного времени, необходимо определить часовой угол $t_\odot$ истинного Солнца.

Далее рассмотрим параллактический треугольник $\Delta_S P_N Z C$ (см. рис. 9). Для него справедливы формулы синусов, косинусов и пяти элементов в виде:

$$\left. \begin{aligned} a) \sin z \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ b) \cos z &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ c) \sin z \cos A &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t \end{aligned} \right\}. \quad (37)$$

Из формулы b) последнего набора следует, что

$$\cos t_\odot = \frac{\cos z - \sin \delta_\odot \sin \varphi_{SP}}{\cos \delta_\odot \cos \varphi_{SP}} = -0.9767, \Rightarrow \quad (38)$$

$$\Rightarrow t_{\odot 1} = 167.6^\circ = 11^h 10^m, \quad t_{\odot 2} = 192.4^\circ = 12^h 50^m, \quad (39)$$

здесь учтено, $z = 96^\circ$, $\delta_\odot = 23^\circ 26'$, поскольку навигационные сумерки начинаются (заканчиваются), когда высота истинного Солнца, относительно горизонта, равна $h_\odot = -6^\circ$, и это происходит в ночь летнего солнцестояния.

Следовательно моменты начала и окончания навигационных сумерек в Санкт-Петербурге есть

$$T_d^{(i)} = t_{\odot 1} + \eta - \lambda_{SP} + N^h + 13^h = 11^h 10^m + 2^m - 2^h 01^m + 2^h + 13^h = 00^h 11^m. \quad (40)$$

$$T_d^{(f)} = t_{\odot 2} + \eta - \lambda_{SP} + N^h + 13^h = 12^h 50^m + 2^m - 2^h 01^m + 2^h + 13^h = 1^h 51^m. \quad (41)$$

2. Продолжительность навигационных сумерек в эту ночь:

$$\Delta T = T_d^{(f)} - T_d^{(i)} = 1^{\text{h}}40^{\text{m}}. \quad (42)$$

3-4. Определим широту на которой уже возможно наблюдение белых ночей – здесь высота Солнца в нижней кульминации должна быть не меньше -6° , т.е.

$$h_{\odot}^{(\min)} = \varphi + \delta_{\odot} - 90^\circ \geq -6^\circ, \Rightarrow \varphi \geq 84^\circ - \delta_{\odot} = 60^\circ34'. \quad (43)$$

Очевидно, минимальное расстояние от Санкт-Петербурга до точки поверхности Земли с пограничной широтой $\varphi_{\min} = 60^\circ34'$ будет достигаться вдоль географического меридиана, проходящего через указанный город. Тогда искомое расстояние ℓ можно определить дугой меридиана:

$$\ell = \frac{(\varphi_{\min} - \varphi_{SP})}{360^\circ} 2\pi \mathfrak{R}_{\oplus} = 68.6 \text{ км}. \quad (44)$$

Очевидно, что данная точка расположена к северу относительно Санкт-Петербурга.

Ответ: к данной задаче представляется выражениями (40)-(42), (44); на север. (12 баллов).

Задача № 9. «Гипотеза Planet Nine и ее видимая звездная величина»

Решение. 1. Прежде всего определим интервалы допустимых значений для радиуса и гелиоцентрического расстояния Planet Nine. Согласно условию задачи, масса планеты должна быть заключена в интервале $(5 \div 20) \mathfrak{M}_{\oplus}$. Тогда радиус планеты должен принадлежать интервалу:

$$2.9 \mathfrak{R}_{\oplus} \leq \mathfrak{R}_{P9} \leq 4.4 \mathfrak{R}_{\oplus}. \quad (45)$$

Диапазон допустимых гелиоцентрических расстояний (r_{P9}) планеты определим интервалом:

$$a_{\min}(1 - \varepsilon_{\max}) \leq r_{P9} \leq a_{\max}(1 + \varepsilon_{\max}), \text{ или } 87.5 \text{ а.е.} \leq r_{P9} \leq 1750 \text{ а.е.} \quad (46)$$

Освещенность ($E_{\odot}$), создаваемая Солнцем у поверхности Planet Nine есть

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r_{P9}^2},$$

здесь $L_{\odot}$ – светимость Солнца. Поток солнечного излучения, падающего на планету, равен

$$\Phi_0 = E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_{P9}^2 = \frac{1}{4} L_{\odot} \left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}}{r_{P9}} \right)^2.$$

Доля A_{P9} от потока Φ_0 отражается от поверхности планеты и рассеивается по всем направлениям (изотропно). При этом освещенность (E_{P9}), создаваемая Planet Nine у поверхности Земли (без учета поглощения атмосферой), есть

$$E_{P9} = \frac{A_{P9}\Phi_0}{4\pi \Delta_{P9}^2} = \frac{A_{P9}}{16\pi} \frac{L_\odot}{\Delta_{P9}^2} \left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}}{r_{P9}} \right)^2, \quad (47)$$

здесь Δ_{P9} – геоцентрическое расстояние Planet Nine. Поскольку $a_\oplus = 1$ а.е. $\ll r_{P9}, \Delta_{P9}$, тогда $r_{P9} \approx \Delta_{P9}$, в результате освещенность (47) можно представить в виде:

$$E_{P9} \approx L_\odot \frac{A_{P9}}{16\pi} \left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}}{r_{P9}^2} \right)^2 = \frac{1}{4} f_\odot A_{P9} \left(\frac{a_\oplus}{r_{P9}} \right)^2 \left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}}{r_{P9}} \right)^2, \quad \text{где } f_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}, \quad (48)$$

здесь $f_\odot = 1361$ Вт/м² – солнечная постоянная.

Определим далее минимальную и максимальную освещенности, создаваемые планетой у поверхности Земли:

$$E_{P9}^{(\min)} = \frac{1}{4} f_\odot A_{P9}^{(\min)} \left(\frac{a_\oplus}{r_{P9}^{(\max)}} \right)^2 \left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}^{(\min)}}{r_{P9}^{(\max)}} \right)^2,$$

$$E_{P9}^{(\max)} = \frac{1}{4} f_\odot A_{P9}^{(\max)} \left(\frac{a_\oplus}{r_{P9}^{(\min)}} \right)^2 \left(\frac{\mathfrak{R}_{P9}^{(\max)}}{r_{P9}^{(\min)}} \right)^2.$$

С использованием формулы Погсона для звездных величин Planet Nine (m_{P9}) и Солнца ($m_\odot = -26.74^m$, согласно справочным данным)

$$m_{P9} - m_\odot = -2.5 \lg \left(\frac{E_{P9}}{f_\odot} \right), \Rightarrow m_{P9} = m_\odot + 2.5 \lg \left(\frac{f_\odot}{E_{P9}} \right),$$

определим минимальное и максимальное значения m_{P9} :

$$m_{P9}^{(\min)} = m_\odot + 2.5 \lg \left(\frac{f_\odot}{E_{P9}^{(\max)}} \right) = 13.13^m, \quad (49)$$

$$m_{P9}^{(\max)} = m_\odot + 2.5 \lg \left(\frac{f_\odot}{E_{P9}^{(\min)}} \right) = 28.04^m. \quad (50)$$

Т.о., интервал возможных значений для видимой звездной величины планеты есть

$$13.13^m \leq m_{P9} \leq 28.04^m. \quad (51)$$

2. Для того чтобы данную планету можно было обнаружить визуально в любой точке ее орбиты, необходимо чтобы проникающая сила телескопа (m_T) была не меньше $m_{P9}^{(\max)}$, т.е.

$$m_{P9}^{(\max)} \leq m_T, \quad \text{или} \quad m_{P9}^{(\max)} \leq 2.1^m + 5^m \lg D, \Rightarrow$$

$$D_{\min} = 10^{0.2(m_{P9}^{(\max)} - 2.1^m)} (\text{мм}) = 154 \text{ м.} \quad (52)$$

Ответ: к задаче представляется диапазоном (51) и результатом (52). (14 баллов).

Задача № 10. «Где-то там... на краю Галактики»

Решение. Как известно, если звезда обладает второй космической скоростью относительно какого-либо источника гравитационного поля, то ее полная механическая энергия должна быть равна нулю, т.е.

$$\frac{m_* V_{\text{II}}^2}{2} + U_p = 0, \Rightarrow V_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2(-U_p)}{m_*}}, \quad (53)$$

здесь m_* – масса звезды, U_p – потенциальная энергия гравитационного взаимодействия звезды и источника (диска Галактики).

Если звезда образует гравитационно связанную стационарную систему с данным источником (диском Галактики), то для нее справедлива *теорема вириала*:

$$2 \left(\frac{m_* V_{\text{I}}^2}{2} \right) + U_p = 0, \Rightarrow V_{\text{I}} = \sqrt{\frac{(-U_p)}{m_*}}, \quad (54)$$

здесь учтено, что в диске Галактики звезды движутся по орбитам, близким к круговым, поэтому V_{I} является первой космической скоростью звезды в гравитационном поле источника (диска Галактики).

Из (53) и (54) следует, что для определения V_{I} и V_{II} необходимо определить потенциальную энергию гравитационного взаимодействия звезды с диском Галактики – U_p . Поскольку размеры звезды много меньше размеров Галактики, то ее можно считать материальной точкой массы m_* . Тогда U_p можно записать (по аналогии с кулоновской потенциальной энергией) в виде:

$$U_p = m_* \varphi_G, \quad (55)$$

здесь φ_G – гравитационный потенциал диска Галактики на его краю, который подлежит определению. Из аналогии гравитационного и кулоновского электрического поля нетрудно доказать, что гравитационный потенциал точечной

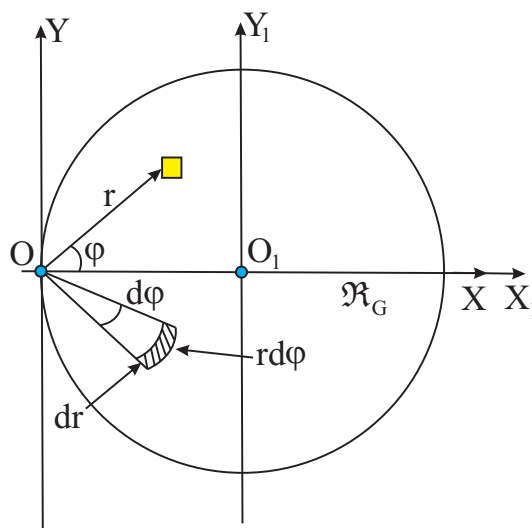


Рис. 10: к определению потенциала гравитационного поля однородного диска.

массы dm на расстоянии r от последней можно определить как

$$d\varphi_G = -\frac{G dm}{r}, \quad (56)$$

здесь знак « $-$ » указывает на характер взаимодействия между телами – *притяжение*.

Рассмотрим однородный диск массы $\mathfrak{M}_G$ и радиуса $\mathfrak{R}_G$. И определим гравитационный потенциал плоского тонкого диска в точке O (см. рис. 10). Для этого заметим, что уравнение окружности – границы диска в системе координат $O_1X_1Y_1$ есть

$$x_1^2 + y_1^2 = \mathfrak{R}_G^2, \quad (57)$$

а в системе OXY :

$$(x - \mathfrak{R}_G)^2 + y^2 = \mathfrak{R}_G^2. \quad (58)$$

Далее для удобства последующих вычислений перейдем в полярную систему координат (r, φ) , ось которой будет совпадать с осью OX , посредством замены:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (59)$$

Тогда уравнение (58) можно переписать так

$$r^2 - 2\mathfrak{R}_G r \cos \varphi + \mathfrak{R}_G^2 = \mathfrak{R}_G^2, \Rightarrow \quad (60)$$

$$r_1 = 0 \quad \text{или} \quad r_2 = 2\mathfrak{R}_G \cos \varphi. \quad (61)$$

Полученные значения определяют минимальное и максимальное значения полярного радиус-вектора как функции полярного угла. Потенциал гравитационного поля диска φ_G можно определить с использованием принципа суперпозиции:

$$\varphi_G = \int d\varphi_G = - \int_{\mathfrak{M}_G} \frac{G dm}{r}, \quad (62)$$

при записи последнего результата подразумевалось, что производится мысленное разбиение всего диска на столь малые площадки величиной dS и массы dm , что каждую из них можно рассматривать как точечную массу. Итоговый потенциал определяется суммой (интегралом) потенциалов всех таких элементов диска, создаваемых ими в точке O . Введем понятие **поверхностной плотности** вещества диска Галактики – скалярной физической величины, равной отношению массы вещества диска, приходящуюся на единицу площади его поверхности, т.е.

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}_G}{S_G} = \frac{\mathfrak{M}_G}{\pi \mathfrak{R}_G^2}. \quad (63)$$

Следовательно, массу элемента диска можно записать так

$$dm = \sigma dS = \sigma (r d\varphi) dr, \quad (64)$$

в последнем выражении учтено, что элементарную площадку согласно рис. 10, можно представить в виде $dS = (r d\varphi) dr$. Тогда интеграл (62) можно записать так

$$\begin{aligned}\varphi_G &= -G\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r_1}^{r_2} dr d\varphi = -\frac{G\mathfrak{M}_G}{\pi\mathfrak{R}_G^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} dr = -\frac{G\mathfrak{M}_G}{\pi\mathfrak{R}_G^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\mathfrak{R}_G \cos \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{2G\mathfrak{M}_G}{\pi\mathfrak{R}_G} \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{2G\mathfrak{M}_G}{\pi\mathfrak{R}_G} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{4G\mathfrak{M}_G}{\pi\mathfrak{R}_G}.\end{aligned}\quad (65)$$

Согласно (55) и (65) получаем

$$U_p = -\frac{4G m_* \mathfrak{M}_G}{\pi\mathfrak{R}_G}.\quad (66)$$

Следовательно, согласно (53) и (54) первая и вторая космические скорости звезды будут равны:

$$V_I = \sqrt{\frac{4G\mathfrak{M}_G}{\pi\mathfrak{R}_G}} = \sqrt{\frac{8G\mathfrak{M}_G}{\pi D_G}} = 732 \text{ км/с},\quad (67)$$

$$V_{II} = \sqrt{\frac{8G\mathfrak{M}_G}{\pi\mathfrak{R}_G}} = \sqrt{\frac{16G\mathfrak{M}_G}{\pi D_G}} = 1035 \text{ км/с}.\quad (68)$$

Очевидно, что полученный результат для V_I существенно больше значения скорости на периферии Галактики в действительности (см. рис. 2). Это можно объяснить лишь неоднородностью диска Галактики, падением поверхностной плотности вещества от центра к периферии и как следствие уменьшением потенциала гравитационного поля диска.

Ответ: к задаче представлен выражениями (67)-(68). (14 баллов).

Задача № 11. «Предел Чандрасекара для белого карлика»

Решение. Принцип Паули устанавливает предельный минимальный объем фазового пространства, который может занимать каждый электрон. Внешнее давление не в состоянии этот объем уменьшить. Если полагать, что все электроны БК достигли своего минимального фазового объема и гравитационное сжатие уравновешено внутренним давлением электронного газа, то легко оценить предельную массу БК, воспользовавшись соотношением неопределенности Гейзенберга для электрона:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar,\quad (69)$$

далее будем полагать, что неопределенности координаты и импульса одного порядка с соответствующими величинами:

$$\Delta x \approx x, \quad \Delta p_x \approx p_x,$$

где x — характерные расстояния до которых сближаются электроны под действием сил гравитации, приобретая импульсы p_x . Концентрация электронов в системе есть

$$n_e = \frac{1}{x^3},$$

то соотношение (69) сведется к уравнению вида:

$$p_x \approx \hbar \cdot n_e^{1/3}.$$

1. Давление релятивистского электронного газа есть

$$P_e = \frac{F_x}{\Delta S} = \frac{N_e \cdot p_x}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{n_e \cdot \Delta S \cdot \Delta x \cdot p_x}{\Delta S \cdot \Delta t} = n_e \cdot v_x \cdot p_x \approx n_e \cdot c \cdot p_x, \quad (70)$$

здесь учтено, то для релятивистского электрона $v_x \approx c$, где c — скорость света в вакууме. (4 балла)

2. Давление гравитационных сил можно представить в виде:

$$P_G = \frac{F_G}{\Delta S} = -\frac{\Delta U_G}{\Delta x \cdot \Delta S} = -\frac{\Delta U_G}{\Delta V} \approx -\frac{U_G}{\Delta V},$$

здесь учтено, что гравитационные силы являются потенциальными и, следовательно, для них можно ввести потенциальную энергию U_G . Известно, что гравитационная потенциальная энергия однородного шара-звезды представляется в виде:

$$U_G = -\frac{3}{5} \frac{G \cdot \mathfrak{M}_*^2}{\mathfrak{R}_*}. \quad (71)$$

Учитывая, что массу звезды определяют главным образом протоны и нейтроны¹, мы можем записать $\mathfrak{M}_* \approx N_p m_p + N_n m_n$ и принимая во внимание соотношения $n_p = N_p / \Delta V = n_e$ (концентрации протонов и электронов должны быть равны в силу квазинейтральности звездной плазмы) и $m_p \approx m_n$ в итоге получаем

$$P_G = \frac{3}{5} \frac{G \cdot n \cdot m_p \cdot \mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*}. \quad (72)$$

(3 балла)

3. В состоянии механического равновесия рассмотренные выше давления должны быть равны, следовательно

$$\frac{3}{5} \frac{G \cdot n \cdot m_p \cdot \mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*} = n_e \cdot c \cdot p_x, \Rightarrow \frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*} = \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{12}{14}\right) \frac{c \cdot p_x}{G \cdot m_p}, \Rightarrow$$

$$\frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*} = \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{12}{14}\right) \frac{c \cdot \hbar \cdot n_e^{1/3}}{G \cdot m_p}, \Rightarrow$$

$$\frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*} = \frac{5}{3} \frac{c \cdot \hbar}{G \cdot m_p} \left(\frac{12}{14}\right)^{4/3} \left(\frac{\mathfrak{M}_*}{(4/3) \cdot \pi \cdot \mathfrak{R}_*^3 \cdot m_p}\right)^{1/3}, \Rightarrow$$

¹Согласно таблице 1, на 10 протонов звездного вещества приходится (в среднем) одно ядро гелия, где содержится два протона и два нейтрона, тогда концентрация протонов составляет $n_p = (12/14)n$, а концентрация нейтронов $n_n = (2/14)n$ от полной концентрации барионов n .

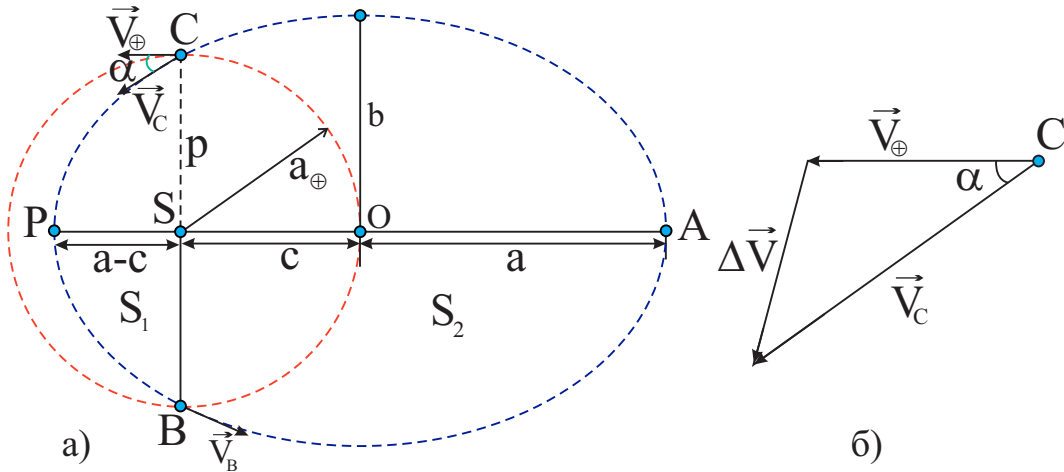


Рис. 11: к определению а) гелиоцентрической траектории дубинок, б) вектора относительной скорости дубинок $\Delta \vec{V}$.

$$\mathfrak{M}_{Ch} = \left(\frac{12}{14}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{3}{4 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{m_p^2} \cdot \left[\frac{c \cdot \hbar}{G}\right]^{3/2} \approx 1.43 \cdot \mathfrak{M}_{\odot}. \quad (73)$$

Последняя величина есть максимально допустимая масса БК (предел Чандрасекара). Самые точные оценки, в зависимости от химического состава белого карлика, дают значения $\mathfrak{M}_{Ch} \approx (1.38 \div 1.44) \mathfrak{M}_{\odot}$. (3 балла)

4. Массовая плотность БК определяется из соотношения вида:

$$\rho = m_p \cdot n_e = m_p \left(\frac{p_e}{\hbar}\right)^3,$$

поскольку газ является релятивистским, то $p_e \approx m_e c/2$ (полагаем здесь и далее $v_e = c/2$), тогда

$$\rho = m_p \cdot n_e = \frac{m_p}{(2\hbar/(m_e \cdot c))^3} = 3.64 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^3 = 3.64 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3. \quad (74)$$

(2 балла)

5. Для радиуса БК с массой, равной $\mathfrak{M}_{Ch}$, имеем

$$\mathfrak{R}_* = \left(\frac{3\mathfrak{M}_{Ch}}{4\pi \cdot \rho}\right)^{1/3} = 5.07 \cdot 10^6 \text{ (м)} = 5.07 \cdot 10^3 \text{ (км)}. \quad (75)$$

(2 балла)

Ответ: к задаче представлен результатами (70), (72)-(75). (14 баллов).

Задача № 12. «Морозко: запуск на гелиоцентрическую орбиту»

Решение: 1. Рассмотрим рис. 11.а), соответствующий условию задачи: здесь окружность – орбита Земли радиуса $a_{\oplus}$, а эллипс – гелиоцентрическая орбита дубинок. Поскольку события запуска и падения дубинок отстоят ровно на $T_{\oplus}/2$ – половину звездного года Земли, то указанные события произошли в

диаметрально противоположных точках орбиты Земли (B и C). При этом эллипс должен быть расположен симметрично относительно прямой AP . Очевидно, что фокальный параметр орбиты дубинок $p = a_{\oplus}$. С другой стороны из рисунка видна, что

$$p < b < a, \Rightarrow a_{\oplus} < a,$$

значит период обращения дубинок по орбите больше $T_{\oplus}$. Поскольку дубинки перемещались от точки C до точки B , следовательно полгода они могли двигаться лишь по малой дуге $C\check{P}B$. Определим время движения дубинок по большой дуге $B\check{A}C$.

Для этого учтем, что согласно второму закону Кеплера, секторная скорость (σ) дубинок постоянна, тогда

$$\sigma = \frac{\pi a b}{T} = \frac{S_1}{T_{\oplus}/2} = \frac{S_2}{t_2}, \Rightarrow t_2 = \frac{S_2}{S_1} \left(\frac{T_{\oplus}}{2} \right), \quad (76)$$

здесь T – сидерический период обращения дубинок вокруг Солнца, a, b – большая и малая полуоси их орбиты, S_1, S_2 – площади малой ($CPBS$) и большой ($CABS$) частей эллипса, t_2 – время движения по большой дуге эллипса.

Очевидно, что

$$T = \frac{T_{\oplus}}{2} + t_2 = \frac{T_{\oplus}}{2} \left(1 + \frac{S_2}{S_1} \right) = \frac{T_{\oplus}}{2} \left(\frac{S_1 + S_2}{S_1} \right) = \frac{T_{\oplus}}{2} \frac{\pi a b}{S_1}. \quad (77)$$

Определим площадь S_1 малой части эллипса. Для этого воспользуемся каноническим уравнением эллипса в декартовых координатах:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \Rightarrow y = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}. \quad (78)$$

Разобьем малую часть эллипса на малые трапеции и рассмотрим одну такую малую трапецию (см. рис. 12.а). Очевидно, ее площадь будет равна

$$dS = y(x) dx = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} dx, \quad (79)$$

где x – средняя точка нижней грани трапеции. Следовательно, площадь малой части эллипса определяется интегралом:

$$S_1 = 2 \int dS = 2b \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} dx. \quad (80)$$

Из рисунка видно, что интегрирование необходимо произвести в интервале:

$$a - c \leq x \leq a, \text{ т.е. } x_1 = a - c, \quad x_2 = a.$$

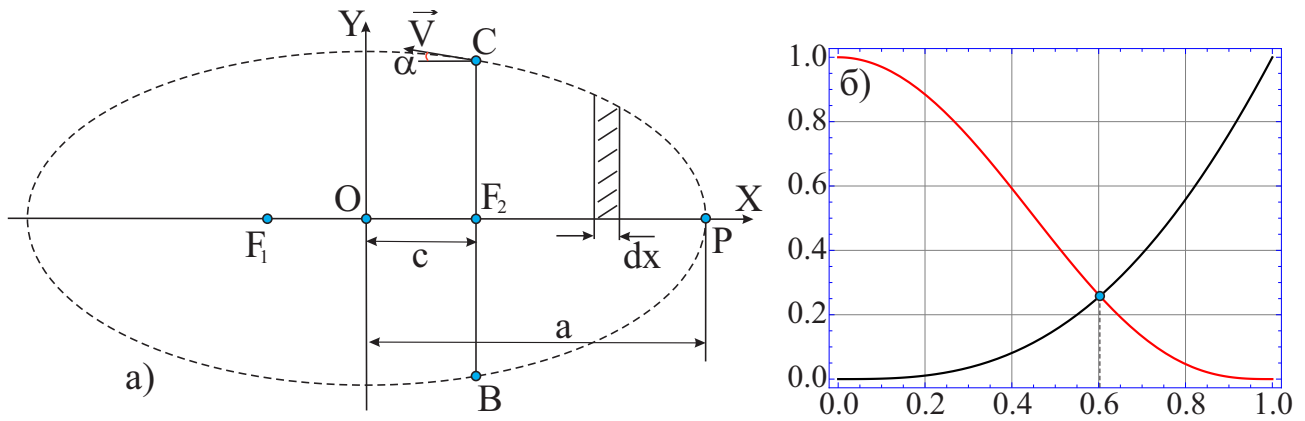


Рис. 12: к определению а) площади малой части эллипса, б) эксцентриситета орбиты.

Для вычисления интеграла произведем замену переменных вида:

$$x = a \sin \gamma, \Rightarrow dx = a \cos \gamma d\gamma,$$

$$\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2, \text{ где } \gamma_1 = \arcsin(1 - \varepsilon), \quad \gamma_2 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда (80) можно переписать так

$$\begin{aligned} S_1 &= 2ab \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} d\gamma = 2ab \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos^2 \gamma d\gamma = ab \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} (1 + \cos 2\gamma) d\gamma = \\ &= ab \left[\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos 2\gamma d\gamma \right] = ab \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - \varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos 2\gamma d2\gamma \right] = \\ &= \frac{1}{2} \pi ab \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon) + \frac{1}{\pi} (\sin 2\gamma_2 - \sin 2\gamma_1) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \pi ab \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon) - \frac{2}{\pi} \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \pi ab \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon) - \frac{2}{\pi} (1 - \varepsilon) \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2} \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Тогда из (77) и (81) следует, что

$$\frac{T_{\oplus}}{T} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon) - \frac{2}{\pi} (1 - \varepsilon) \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}. \quad (82)$$

С другой стороны, известно, что фокальный параметр эллиптической орбиты можно записать так

$$p = a(1 - \varepsilon^2), \Rightarrow 1 - \varepsilon^2 = \frac{a_{\oplus}}{a}. \quad (83)$$

Воспользуемся третьим законом Кеплера:

$$\left(\frac{T_{\oplus}}{T} \right)^2 = \left(\frac{a_{\oplus}}{a} \right)^3, \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon) - \frac{2}{\pi} (1 - \varepsilon) \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2} \right)^2 = (1 - \varepsilon^2)^3. \quad (84)$$

Последнее уравнение можно решить численным или графическим способом. Рассмотрим последний подробнее. Будем полагать, что

$$f_1(\varepsilon) = \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \varepsilon) - \frac{2}{\pi}(1 - \varepsilon) \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}\right)^2, \quad f_2(\varepsilon) = (1 - \varepsilon^2)^3.$$

Построим данные функции на одном графике (см. рис. 12.6). Из рисунка видно, что точка пересечения кривых соответствует значению $\varepsilon = 0.60$. Численные методы дают более точное значение $\varepsilon = 0.6028$.

2. Из выражения (83) получаем большую полуось орбиты.

$$a = \frac{a_{\oplus}}{1 - \varepsilon^2} = 1.571 \text{ а.е.} \quad (85)$$

Из третьего закона Кеплера получаем сидерический период обращения дубинок:

$$T = T_{\oplus} \left(\frac{a}{a_{\oplus}}\right)^{3/2} = 1.969 \text{ года.} \quad (86)$$

3. Вычислим гелиоцентрическую скорость движения дубинок в точке пересечения орбит:

$$V = \sqrt{G\mathfrak{M}_{\odot} \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{G\mathfrak{M}_{\odot} \left(\frac{2}{a_{\oplus}} - \frac{1}{a}\right)} = 34.78 \text{ км/с.} \quad (87)$$

4. Найдем угол между гелиоцентрической скоростью V дубинок и скоростью Земли в точке пересечения орбит. Для этого заметим, что α – это угол между касательной к эллипсу в данной точке и осью абсцисс. Найдем производную от функции $y(x)$, определяемой (78):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{b}{2} \frac{\frac{-2x}{a^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \Big|_{x=a-c} = - \frac{bx}{a^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \Big|_{x=a-c} = - \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}} = - \operatorname{tg} \alpha, \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha &= \frac{(1 - \varepsilon)\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}} = 0.3453 \Rightarrow \alpha = 19.0^\circ. \end{aligned} \quad (88)$$

5. Определим скорость дубинок относительно Земли в данной точке. Для этого рассмотрим треугольник из векторов скоростей (см. рис. 11.6):

$$\Delta \vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_{\oplus}, \quad \Delta V = \sqrt{V^2 + V_{\oplus}^2 - 2V V_{\oplus} \cos \alpha} = 11.77 \text{ км/с.} \quad (89)$$

Определим минимальную скорость, которую должен был сообщить Иван дубинкам у поверхности Земли. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии.

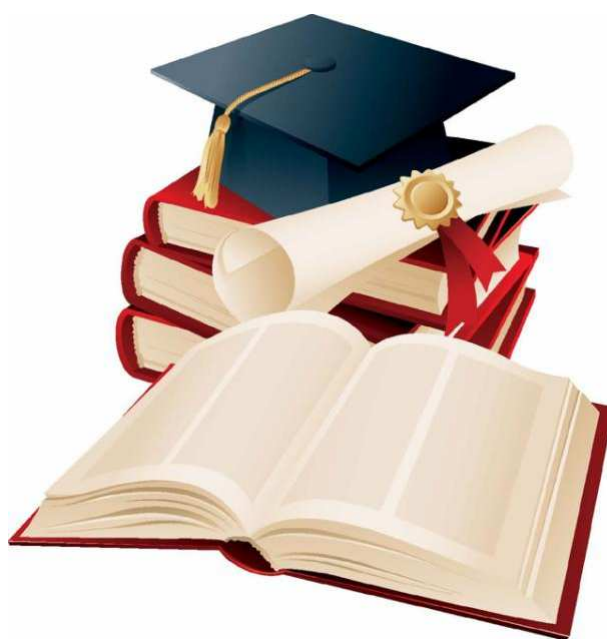
$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{Gm\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} = \frac{m_{\Delta}V^2}{2}, \Rightarrow$$

$$V_0^2 = \sqrt{\Delta V^2 + V_{\text{II}}^2} = 16.24 \text{ км/с}, \quad \text{где } V_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2G\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}}} = 11.19 \text{ км/с}, \quad (90)$$

здесь V_{II} – вторая космическая скорость тела у поверхности Земли.

Ответ: к задаче представляется выражениями (85), (87)-(90); $\varepsilon = 0.6028$.
($\$_{\text{max}} = 15$ баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

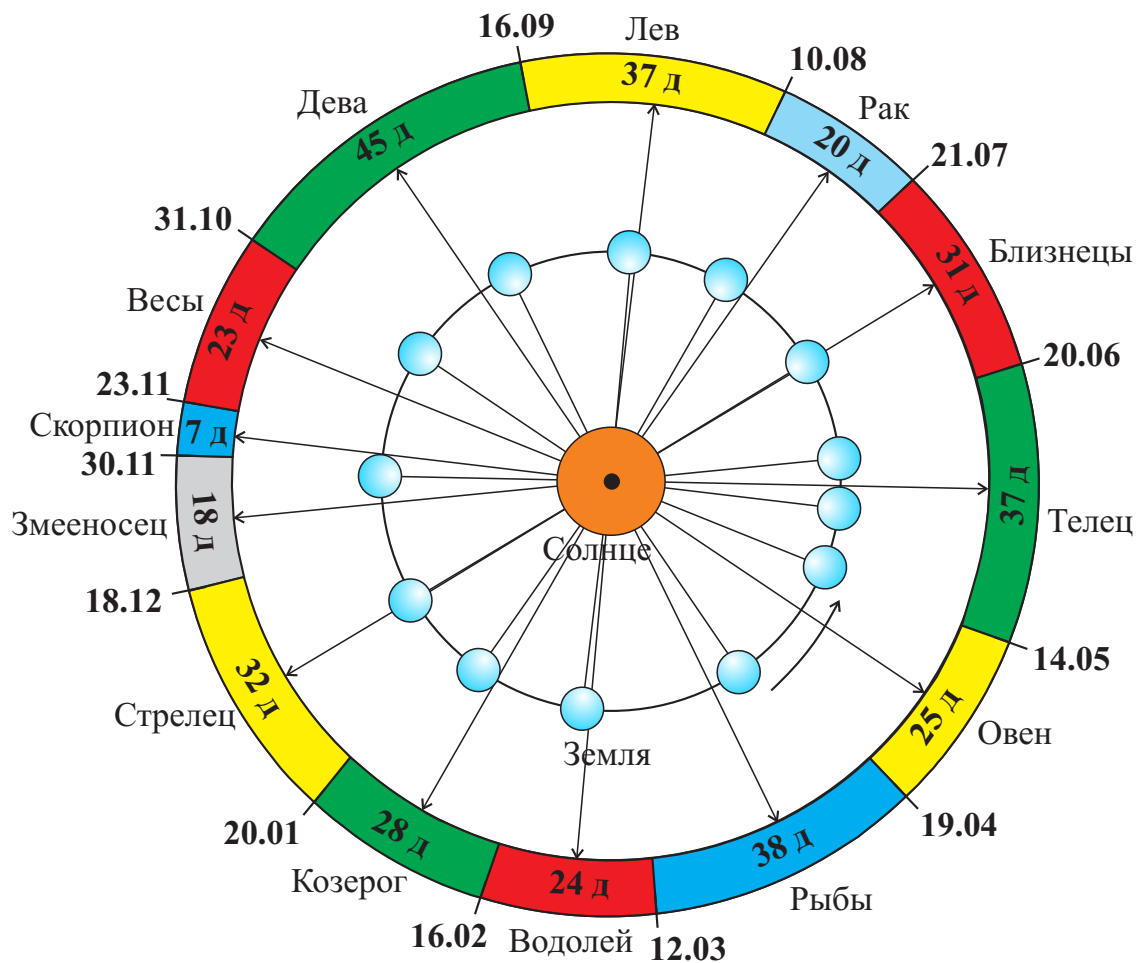


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

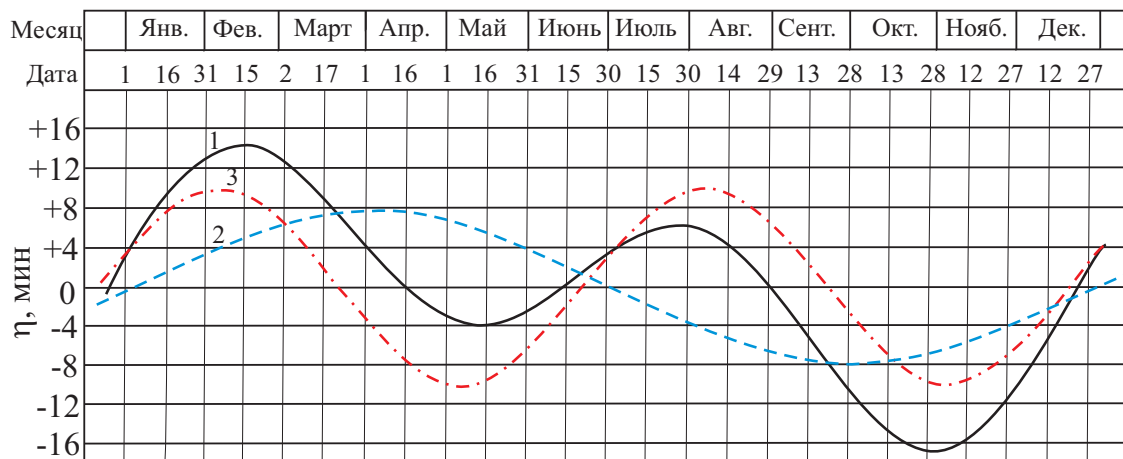


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

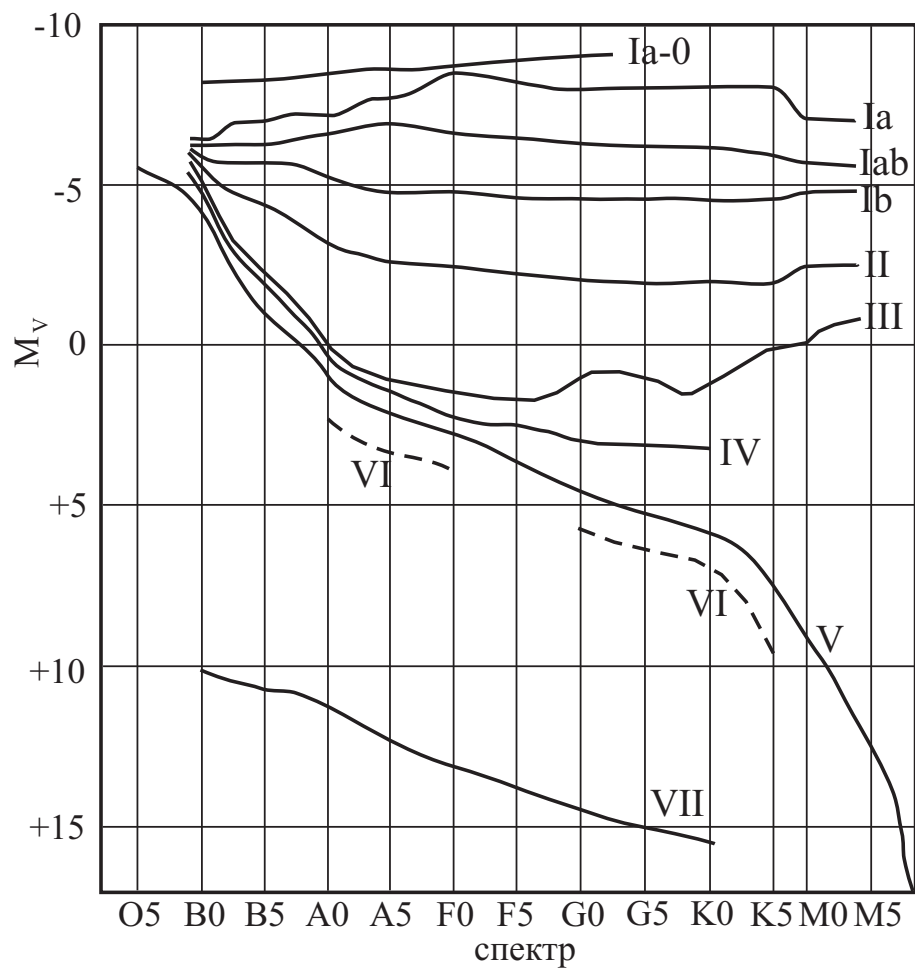


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

периоды	A I	II A	III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A	B
1	(H)								
2	Li Литий	Be Бериллий	B Бор	C Углерод	N Азот	O Кислород	F Фтор	Ne Неон	He Гелий
3	Na Натрий	Mg Магний	Al Алюминий	Si Кремний	P Фосфор	S Сера	Cl Хлор	Ar Аргон	Ar Аргон
4	K Калий	Ca Кальций	Sc Скандий	Ti Титан	V Ванадий	Cr Хром	Mn Марганец	Fe Железо	Co Кобальт
5	Rb Рубидий	Sr Стронций	Y Иттрий	Zr Цирконий	Nb Ниобий	Mo Молибден	Tc Технеций	Ru Рутений	Rh Родий
6	Cs Цезий	Ba Барий	La* Лантан	Hf Гафний	Ta Тантал	W Вольфрам	Re Рений	Os Осий	Ir Иридий
7	Fr Франций	Ra Радий	Ac** Актиний	Rf Ферзберфордий	Db Дубний	Sg Сиборгий	Bh Борий	Hs Хассий	Mt Мейтнерий
формулы высших оксидов	R ₂ O	RO	R ₂ O ₃	RO ₂	R ₂ O ₅	RO ₃	R ₂ O ₇	RO ₄	
формулы летучих соединений				RH ₄	RH ₃	RH ₂	RH		
лантаноиды*	Ce Церий	Pr Празеодим	Pm Прометий	Sm Самарий	Eu Европий	Gd Гадолиний	Dy Диспрозий	Ho Гольмий	Er Эрбий
актиноиды**	Th Торий	Pa Просак	U Уран	Np Нептуний	Am Америкий	Cm Курчатовий	Bk Берклиевий	Cf Калифорний	Fm Фермиум

Рис. А.4. Таблица Менделеева.