

САМАРСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ДЛЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
**ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ
ПО АСТРОНОМИИ им. Ф.А. БРЕДИХИНА**
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.
СЕЗОН: 2020-2021, ТУР № 1



Самара, 2020 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 12 оригинальных задач двух уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач ее различных этапов.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 1». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/omoa-solutions>

Составитель: – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СРЦОД, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе $\text{\LaTeX}$ – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

vk.com/bredikhinolimp

3. Сроки подачи решений задач ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021 тура № 1 на проверку:

15.10.2020-30.11.2020!!!

4. Электронный ящик ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021:

samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

<https://vk.com/bredikhinolimp>

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника ОМОА им. Ф.А. Бредихина-2021, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника ОМОА им Ф.А. Бредихина-2021»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника.**

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Астрономическая зима 2020 года»

С каким феноменом отождествляется начало астрономической зимы? Какого числа и в какое (приблизительно) время (по Самарскому времени) наступит астрономическая зима в 2020 году, если в 2019 году она наступила 22 декабря в 04 часа 19 минут по всемирному времени? (5 баллов).

Задача № 2. «Съемка звезд на длительной выдержке и треки звезд»

Астроном-любитель решил сфотографировать звездные треки. Для этого в ясную ночь он ориентировал фотоаппарат в направлении Полярной звезды и выполнил съемку на длительной выдержке. Анализируя полученную фотографию, он обнаружил, что треки двух одинаковых по блеску звезд, со склонениями δ_1 и δ_2 соответственно, имеют треки разной яркости. Как это можно объяснить? У какой звезды трек на фото будет выглядеть более ярким? Во сколько раз? (5 баллов).

Задача № 3. «Радиус-вектор центра масс системы тел и его инвариантность»

Докажите, что выражение для радиуса-вектора центра масс системы небесных тел инвариантно относительно выбора системы отсчета. (5 баллов).

Задача № 4. «Лунный северный полюс мира»

В каких созвездиях может пребывать северный полюс мира Луны, если известно, что угол между плоскостью эклиптики и плоскостью лунного экватора равен $\gamma = 1.54^\circ$. (7 баллов).

Задача № 5. «Большое солнечное (лунное) гало и его наблюдения»

Определите, на каких широтах (хотя бы раз в год и даже реже) невозможно увидеть полностью над горизонтом большое а) солнечное, б) лунное гало? Угловой радиус этого вида гало составляет 46° . (8 баллов).

Задача № 6. «Григорианский календарь и его несовершенство»

Какие принципы исчисления времени заложены в Григорианский календарь? Кто и когда ввел этот календарь в эксплуатацию в большинстве развитых стран Европы? Почему? Кто был автором-разработчиком этого календаря? В каком году в России этот календарь был введен в эксплуатацию? Какие поправки сопровождали его введение в России и за рубежом? Чем они обусловлены? Какое количество циклов содержит этот календарь? Чему равны их продолжительности? Вычислите: а) среднюю продолжительность одного григорианского года; б) погрешность (в долях суток и в часах, минутах, секундах), набегавшую в этом календаре за один календарный год? в) количество лет, за которые набегает погрешность в одни сутки в данном календаре? (10 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)**Задача № 7. «Азимут точки захода Солнца за горизонт в г. Самаре»**

Определите: а) интервал возможных значений для азимута точки захода Солнца за горизонт в г. Самаре; б) скорость изменения азимута точки захода Солнца как функцию времени; в) дни года, в которые последняя функция достигает максимального и минимального значений. Свои умозаключения подкрепите строгими математическими выкладками. (11 баллов).

Задача № 8. «Телескоп им. Э. Хаббла и его "дальнобойность"»

Как известно, проникающая сила телескопа им. Э. Хаббла равна $m_T = +30^m$. Чему равно максимально возможное расстояние до звезды, подобной Солнцу, которую еще может увидеть этот телескоп в направлении на центр Галактики, если поглощение света в этом направлении составляет $\nu = 0.002^m/\text{пк}$? (12 баллов).

Задача № 9. «Перетягивание Луны»

Что притягивает сильнее Луну: Земля или Солнце? Если Солнце, то почему тогда Луна движется вокруг Земли, а не вокруг Солнца? Чему должен быть равен сидерический период обращения системы «Земля-Луна», чтобы стал возможным захват Луны Солнцем? (14 баллов).

Задача № 10. «Изменение продолжительности гражданских сумерек»

В каких точках поверхности Земли изменение продолжительности гражданских сумерек в течение года является минимальным? Чему равна а) географическая широта этих точек? б) продолжительность пребывания Солнца над горизонтом в этих точках? в) интервал возможных значений для продолжительности гражданских сумерек в этих точках? (14 баллов).

Задача № 11. «Фотоохота на астероиды Главного пояса»

Как известно, в Главном поясе астероидов (ГПА) насчитывается не менее 70 астероидов, звездная величина которых (хотя бы в противостоянии) не превосходит 10^m . Именно такие яркие астероиды можно уверенно запечатлеть в городских условиях, на зеркальную камеру с матрицей, содержащей $N = 18$ Мп, с кроп-фактором 1.6 и объективом, с фокусным расстоянием $f = 135$ мм. Считая, что данные астероиды распределены в ГПА равномерно и отстоят от эклиптики на угол не более $\pm 10^\circ$, оцените, сколько таких астероидов может зафиксировать одновременно в одном кадре такая камера, ориентированная в меридиан, в истинную полночь? На какое минимальное угловое расстояние может сблизиться пара таких астероидов, чтобы их еще смогла разрешить¹ данная камера? (14 баллов).

Задача № 12. «Если бы у Венеры был спутник...»

Как известно, многие астрономы XVII-XVIII вв неоднократно объявляли об открытии у Венеры спутников. В настоящее время установлено, что естественные спутники у Венеры отсутствуют. Давайте предположим обратное, – Венера обладает спутником. Определите, на каком минимальном расстоянии должен располагаться естественный спутник Венеры, подобный Луне, чтобы его можно было разрешить вместе с материнской планетой невооруженным глазом с поверхности Земли, в момент наибольшей элонгации. Чему был бы равен минимальный радиус спутника, если полагать, что его альбедо равно альбедо Луны? Если полагать что средняя массовая плотность спутника, такая же как у Луны, то чему будет равна его масса? Чему был бы равен период обращения такого спутника вокруг Венеры? Проверьте, может ли, в принципе, Венера иметь на такой орбите спутник? Разрешающую способность человеческого глаза принять равной $3'$, а его проникающую силу – $+6^m$. Орбиты всех рассматриваемых классических планет считать эллиптическими, а спутника – круговой. (15 баллов).

¹ Для Вас может оказаться полезной **теорема Котельникова**: для получения дискретного изображения одномерного профиля распределения интенсивности образа звезды необходимо не менее 3 пикселей.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Астрономическая зима 2020 года»

Решение. Начало астрономической зимы отождествляется с моментом зимнего солнцестояния, т.е. с моментом, когда Солнце, двигаясь по эклиптике, попадает в точку зимнего солнцестояния. Для определения наступления астрономической зимы в 2020 году, необходимо прибавить к моменту наступления данного события в 2019 году продолжительность тропического года. Согласно определению, **тропическим годом** называется промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Солнцем точки весеннего равноденствия. Сегодня продолжительность тропического года составляет 365.2421896698 сут. В расчетах также необходимо учесть, что 2020 год является *високосным*, т.е. содержит 366 дней, следовательно момент наступления астрономической зимы в данном году приходится на 21 декабря. Время наступления зимнего солнцестояния по самарскому времени будет

$$4 \text{ часа } 19 \text{ минут} + 0.2421896698 \text{ сут} + 4 \text{ часа} = 14 \text{ часов } 08 \text{ мин.}$$

Отметим, что согласно точным расчетам, учитывающим также нутацию земной оси, момент зимнего солнцестояния в 2020 году наступит в 14 часов 02 минуты по самарскому времени. (5 баллов).

Задача № 2. «Съемка звезд на длительной выдержке и треки звезд»

Решение. Рассмотрим рис. 1, соответствующий условиям задачи. Здесь, в течение некоторого промежутка времени Δt , звезда 1 описала дугу суточной параллели

$$\ell_1 = A_1 A_2 = r_1 \cdot \sigma,$$

где $\sigma = \omega_{\oplus} \Delta t$ – угол поворота небесной сферы относительно оси мира за время Δt , $\omega_{\oplus} = 2\pi/T_{\oplus}$ – угловая скорость суточного вращения Земли вокруг

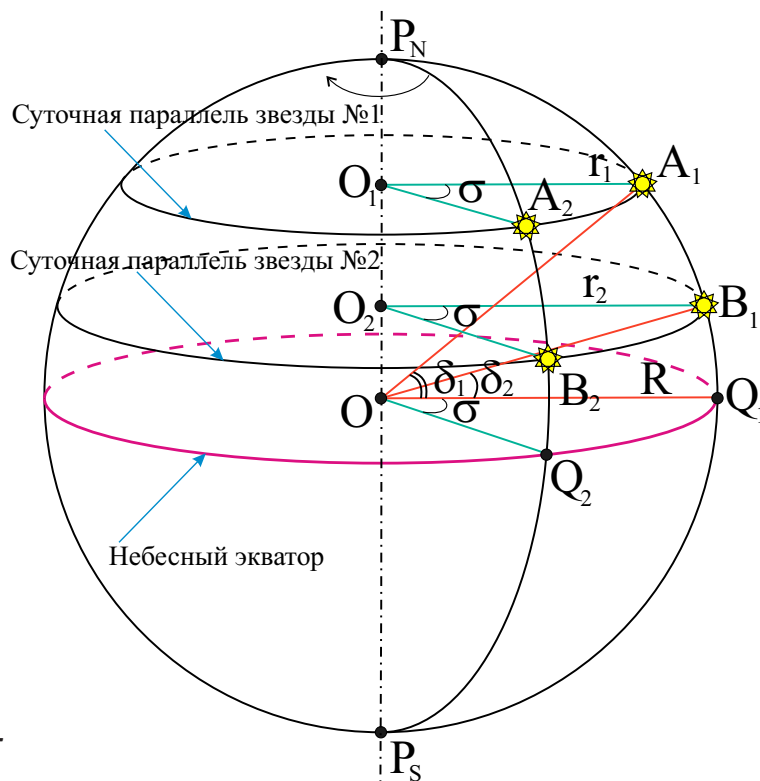


Рис. 1: к определению суточного вращения небесной сферы и треков звезд.

своей оси ($T_{\oplus}$ – сидерический период вращения Земли), r_1 – линейный радиус суточной параллели звезды 1. Последний можно выразить через радиус небесной сферы R из прямоугольного треугольника $\triangle OO_1A_1$:

$$r_1 = R \cos \delta_1.$$

В итоге длину трека звезды можно записать так:

$$\ell_1 = R \cos \delta_1 \omega_{\oplus} \Delta t. \quad (1)$$

При длительной выдержке фотоаппарата, звезда 1 на матрице камеры оставляет световой трек площадью S_1 :

$$S_1 = d \ell_1 = d R \cos \delta_1 \omega_{\oplus} \Delta t,$$

здесь d – ширина трека звезды, зависящая от яркости звезды. Будем далее полагать, что за время Δt объектив фотоаппарата собрал от звезды 1 энергию:

$$\Delta W_1 = E_1 S_{\text{об}} \Delta t,$$

здесь E_1 – освещенность, создаваемая звездой в точке, где находится астроном-любитель, $S_{\text{об}}$ – площадь рабочей поверхности объектива. Следовательно, *поверхностная плотность энергии звезды на матрице* фотокамеры может быть представлена в виде:

$$\zeta_1 = \frac{\Delta W_1}{S_1} = \frac{E_1 S_{\text{об}}}{d R \cos \delta_1 \omega_{\oplus}}. \quad (2)$$

Очевидно, что чем больше эта величина, тем больше яркость трека, оставленного звездой. Из выражения также очевидно, что чем больше склонение звезды, тем меньше его косинус и тем больше поверхностная плотность. Следовательно, чем ближе звезда к полюсу мира, тем меньше длина трека, который она описывает, и тем больше поверхностная плотность энергии звезды, и, как следствие, яркость трека больше (согласно рис. 1, яркость трека звезды 1 будет больше яркости трека звезды 2).

Найдем отношение этих величин для звезд 1 и 2 (с учетом одинаковости видимых яркостей звезд), т.е. отношение яркостей их треков:

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1}. \quad (3)$$

Ответ: к задаче представлен выражением (3). (5 баллов).

Задача № 3. «Радиус-вектор центра масс системы тел и его инвариантность»

Решение. Рассмотрим систему N небесных тел с массами $\{m_i\}_{i=1}^N$, связанных гравитационными силами. Предположим, что в системе отсчета S их

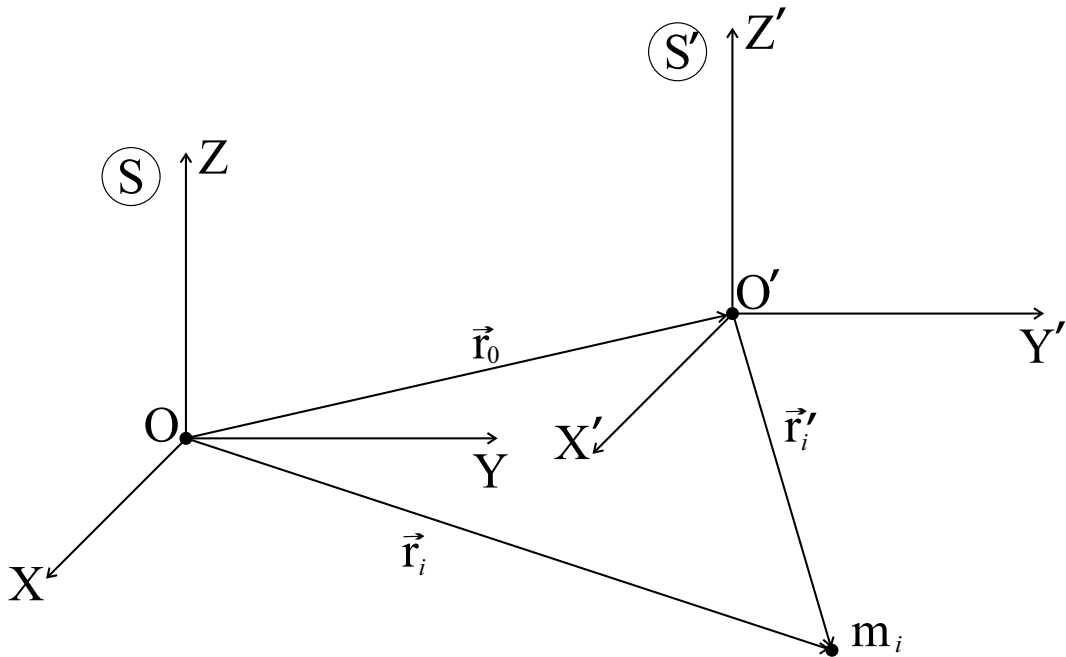


Рис. 2: к определению систем отсчета S и S' и радиусов-векторов i -го тела.

радиусы-векторы есть $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^N$. Тогда согласно определению, радиус-вектор центра масс данной системы небесных тел есть

$$\vec{R}_c = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i / \sum_{i=1}^N m_i. \quad (4)$$

Предположим, что также существует система отсчета S' , в которой данные тела имеют радиусы-векторы – $\{\vec{r}'_i\}_{i=1}^N$. Будем полагать, что начало отсчета системы S' относительно начала отсчета системы S определяется радиусом-вектором $\vec{r}_0$ (см. рис. 2). Тогда, согласно данному рисунку, связь радиусов-векторов i -го тела (или произвольной точки пространства), определенных в указанных системах отсчета, есть

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'_i. \quad (5)$$

Следовательно результат (4) можно записать так

$$\begin{aligned} \vec{R}_c &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}'_i) / \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_0 / \sum_{i=1}^N m_i + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i / \sum_{i=1}^N m_i = \\ &= \vec{r}_0 + \vec{R}'_c, \text{ где } \vec{R}'_c = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i / \sum_{i=1}^N m_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Из сопоставления последнего результата с результатами (4)-(5) следует, что вектор $\vec{R}'_c$ – радиус-вектор центра масс в системе отсчета S' и структура его выражения идентична структуре выражения для радиуса-вектора $\vec{R}_c$, что является прямым доказательством инвариантности выражения для радиуса-вектора центра масс системы небесных тел относительно выбора системы отсчета. (5 баллов).

Задача № 4. «Лунный северный полюс мира»

Решение. Согласно условию задачи, угол между плоскостью эклиптики и плоскостью лунного экватора равен $\gamma = 1.54^\circ$, следовательно такое же значение должен составлять угол между осью эклиптики и осью мира Луны.

Как известно, Луна вращается в том же направлении вокруг своей оси, что и вокруг Земли (против часовой стрелки, если смотреть с позиции северного полюса мира земного наблюдателя), следовательно ее северный полюс мира должен быть расположен вблизи северного полюса эклиптики. Как известно, северный полюс эклиптики Π_N имеет следующие экваториальные координаты: $\delta_{\Pi_N} = +66^\circ 34'$; $\alpha_{\Pi_N} = 18^h 00^m$. Следовательно, северный полюс Луны, должен располагаться

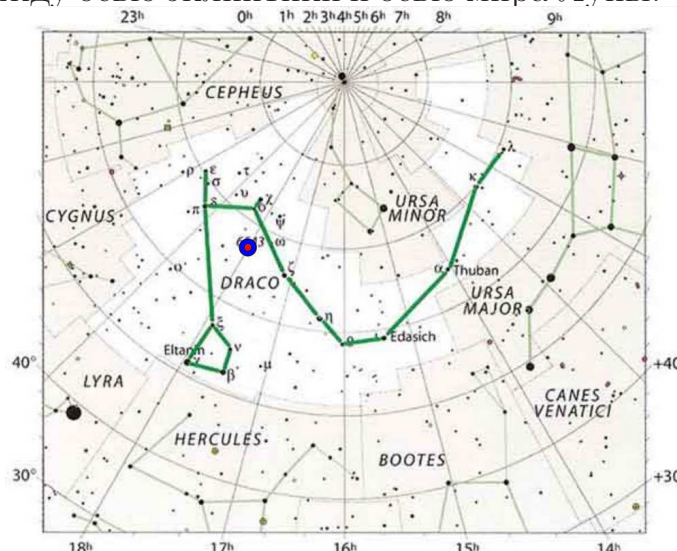


Рис. 3: к определению положения северного полюса мира Луны.

на дуге малой окружности, центр которой совпадает с точкой Π_N (отмечена малым красным кружком на рис. 3), а угловой радиус которой равен γ (см. рис. 3). Очевидно, что весь круг, заключенный внутри данной окружности (отмечен на рисунке синим кружком), полностью лежит на территории созвездия Дракон, следовательно и северный полюс Луны должен находиться в созвездии Дракона.

Ответ: в созвездии Дракона. (7 баллов).

Задача № 5. «Большое солнечное (лунное) гало и его наблюдения»

Решение. Чтобы увидеть полностью над горизонтом большое гало вокруг Солнца (Луны), необходимо чтобы высота данного светила было не меньше 46° (при высоте, равной 46° гало нижней точкой будет касаться горизонта). Следовательно, нас будут интересовать точки поверхности Земли, где высота данных светил хотя бы иногда меньше 46° . Для этого учтем, что склонение Солнца, движущегося по эклиптике, в течение года изменяется в пределах:

$$-23^\circ 26' \leq \delta_\odot \leq +23^\circ 26'. \quad (7)$$

Для точки в северном географическом полушарии высота Солнца в полдень к югу от зенита есть

$$h_\odot = 90^\circ - \varphi + \delta_\odot < 46^\circ, \Rightarrow \varphi > 44^\circ + \delta_\odot. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что при

$$\varphi > 20^\circ 34' \quad (9)$$

обязательно найдется день в году, когда большое гало (если бы оно наблюдалось) невозможно увидеть полностью над горизонтом. С учетом южного полушария имеем окончательно:

$$\varphi \in [-90^\circ, -20^\circ 34') \cup (20^\circ 34', +90^\circ]. \quad (10)$$

Учитывая, что орбита Луны составляет угол $i_\zeta = 5^\circ 09'$ с плоскостью эклиптики, то возможные значения склонения Луны принадлежат интервалу:

$$-28^\circ 35' \leq \delta_\zeta \leq +28^\circ 35'. \quad (11)$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем

$$\varphi \in [-90^\circ, -15^\circ 25') \cup (15^\circ 25', +90^\circ]. \quad (12)$$

В случае, когда Луна видна. Однако, следует вспомнить, что у Луны существует фаза новолуния, в которой она не видна, и следовательно лунное гало невозможно увидеть на любой географической широте.

Ответ: к задаче представляется выражениями (10), б) $[-90^\circ, +90^\circ]$. (8 баллов).

Задача № 6. «Григорианский календарь и его несовершенство»

Решение: *Григорианский календарь (ГК)* – календарь, разработанный германским математиком, астрономом, *Христофором Клавием* и итальянским астрономом, философом *Алоизием Лицием* по указанию римского папы Григория XIII. Данный календарь был введен Григорием XIII в большинстве европейских государств, поддерживавших католическую церковь, 4 октября 1582 года взамен прежнего юлианского календаря (ЮК), из-за его большой погрешности, и как следствие неправильного датирования Пасхи и других церковных праздников, что подрывало веру людей в религиозные каноны католической церкви. Протестантские страны отказывались от ЮК постепенно, на протяжении XVII-XVIII веков. По сути, ГК является модификацией солнечного ЮК с двумя важными дополнениями:

1. Сдвиг дат: при введении ГК, чтобы ликвидировать накопившуюся ошибку в ЮК, заключающуюся в отставании даты ЮК от даты истинного хода времени был произведен сдвиг дат на 10 суток и вместо 5 октября 1582 года наступило сразу 15 октября.

2. Введение второго цикла: год, номер которого кратен 400, следует считать високосным, другие года, номера которых кратны 100, являются невисокосными. Т.о., 1600 и 2000 годы были високосными, а 1700, 1800 и 1900 годы високосными не были. Также не будет високосным и 2100 год. По сути, данная поправка эквивалентна введению второго цикла календаря продолжительностью $N_c^{(2)} = 400$ лет, в котором 303 обычных года и 97 високосных. Эта

поправка была введена с целью уменьшить среднюю продолжительность календарного года, в сравнении с годом в ЮК, и таким образом уменьшить погрешность календаря.

В настоящее время ГК используется в большинстве государств и стран мира. В литературе также применяется его альтернативное название – «новый стиль».

Основные общие особенности ЮК и ГК. В данных календарях *определены два вида года*: обычный и високосный. *Обычный год* состоит из 365 дней и делится на 12 месяцев. В свою очередь месяцы делятся на *длинные* (продолжительностью 31 сут) и *короткие* (продолжительностью 30 сут). Исключение составлял февраль, продолжительность которого в обычный год составляла 28 суток. В данных календарях насчитывалось 7 длинных месяцев: январь, март, май, июль, август, октябрь, декабрь и 5 коротких месяцев: февраль, апрель, июнь, сентябрь, ноябрь. Раз в 4 года объявляется високосный год, в который добавляется один день – 29 февраля. Т.о., ЮК и ГК содержал один общий **цикл** (минимальный промежуток времени, через который повторяется правила исчисления времени), продолжительностью $N_c^{(1)} = 4$ года. Первым днем года может быть любой из семи дней недели с понедельника по воскресенье.

Вычислим далее

а) среднюю продолжительность одного григорианского календарного года:

$$\bar{T}_G = \frac{365 \cdot 303 + 366 \cdot 97}{N_c^{(2)}} = 365.2425 \text{ сут.} \quad (13)$$

б) погрешность (в долях суток и в часах, минутах, секундах), набегавшую в этом календаре за один календарный год. Для этого учтем, что одним из требований, выдвигаемых к любому календарю, является следующее положение: *средняя продолжительность календарного года должна быть как можно ближе к продолжительности тропического года* ($T_{\text{try}} = 365.2421896698 \text{ сут}$).

$$\Delta \bar{T}_G = |\bar{T}_G - T_{\text{try}}| = 0.0003103302 \text{ сут/год} = 26.8 \text{ сек/год.} \quad (14)$$

в) количество лет, за которые набегает погрешность в одни сутки в данном календаре:

$$\chi_G = \frac{1}{\Delta \bar{T}_G} = 3222 \text{ года.} \quad (15)$$

Т.о., погрешность в 1 сутки набегает за 3222 года, что много больше средней продолжительности жизни даже современного человека! Можно утверждать, погрешность ГК является относительно небольшой, и потому данный календарь не требует существенной корректировки на протяжении тысяч лет!

Отметим, что в Советской России ГК был введен лишь с 14 февраля 1918 года декретом Совнаркома, подписанным В.И. Лениным 26 января 1918 года. К моменту введения ГК в России уже набежала погрешность в 13 суток в ЮК и поэтому был произведен сдвиг дат сразу на указанное количество суток: вместо 1 февраля 1918 года наступило сразу 14 февраля. Дни с 1 по 13 февраля 1918 года в Советской России официально не существовали. (10 баллов).

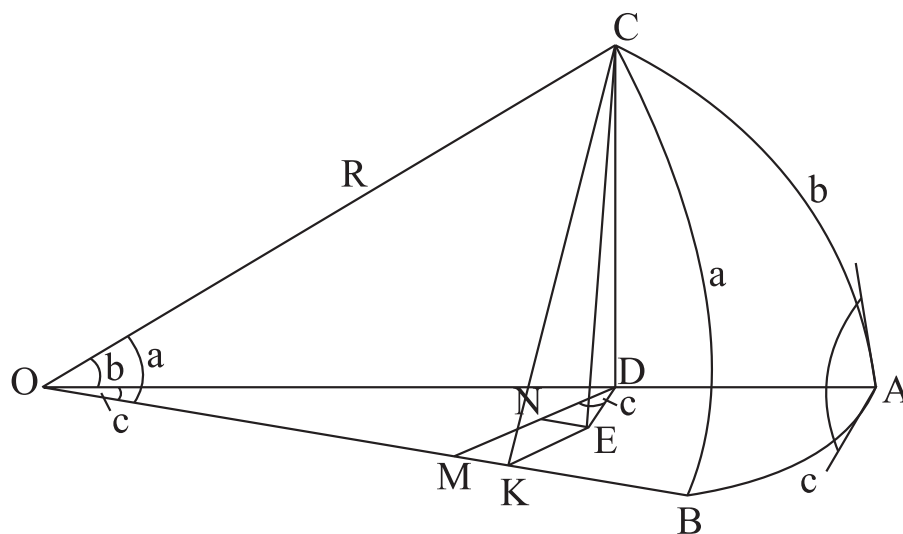
Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Азимут точки захода Солнца за горизонт в г. Самаре»

Решение. Прежде чем приступить к решению данной задачи, рассмотрим некоторые важные частные вопросы сферической астрономии, касающиеся сферических треугольников.

Как известно, через любые две точки на сфере, не лежащие на одном диаметре, можно провести только один большой круг. Дуга большого круга является кратчайшим расстоянием на сфере между двумя точками. Точка на сфере, равноудаленная от всех точек большого круга, называется **полюсом этого круга**.

Фигура на поверхности сферы, образованная тремя дугами больших кругов, соединяющими попарно три какие-либо точки на сфере, называется **сферическим треугольником**. При-



нято обозначать углы сферического треугольника большими буквами A , B и C , а противоположные им стороны соответствующими малыми буквами a , b и c (см. рис. 4). Угол сферического треугольника измеряется углом между касательными к сторонам треугольника, проведенными в вершине этого угла (см. рис. 4). Обычно рассматриваются такие сферические треугольники, у которых каждая из сторон меньше 180° . В этом случае сумма углов сферического треугольника будет удовлетворять неравенству:

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ.$$

Введем в рассмотрение понятие *взаимно полярных сферических треуголь-*

ников. Построим сферический треугольник ABC (см. рис. 5). Пусть полюсом дуги AB является точка C' , полюсом дуги AC – точка B' и полюсом дуги BC – точка A' . Если A' , B' , C' соединить дугами больших кругов на сфере, то получим сферический треугольник $A'B'C'$, который называется **взаимно полярным** с треугольником ABC . Вершины треугольника ABC , т.е. точки A , B и C , в свою очередь будут полюсами сторон $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$.

Установим связь между сторонами и углами взаимно полярных сферических треугольников. Для этого продолжим CA и CB до пересечения со стороной $A'B'$ в точках K и M . Так как A' и B' есть полюсы сторон CB и CA , то $A'M = B'K = 90^\circ$. Но точка C является полюсом $A'B'$, и следовательно, KM численно равно углу C треугольника ABC . Поэтому, так как

$$\begin{aligned} A'K + KM &= 90^\circ, \Rightarrow A'K = 90^\circ - C, \\ c' = A'B' &= A'K + KB' = 90^\circ - C + 90^\circ, \Rightarrow \\ &\Rightarrow c' + C = 180^\circ. \end{aligned}$$

По аналогии с этим выражением можно получить соотношения между остальными элементами двух взаимно полярных сферических треугольников:

$$\left. \begin{aligned} a' + A &= 180^\circ, & a + A' &= 180^\circ, \\ b' + B &= 180^\circ, & b + B' &= 180^\circ, \\ c' + C &= 180^\circ, & c + C' &= 180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Далее получим серию формул, устанавливающих связь между сторонами сферического треугольника. На сфере с центром в точке O возьмем сферический треугольник ABC (см. рис. 4) со сторонами a , b и c . Соединим вершины сферического треугольника A , B и C с центром сферы O радиусами $OA = OB = OC = R$. Опустим из вершины сферического треугольника C на плоскость AOB перпендикуляр CE . Из точки E , лежащей в плоскости AOB , опустим перпендикуляры ED и EK на радиусы сферы OA и OB . Проведем отрезки CK и CD . Построим отрезок DM , параллельный отрезку EK , и отрезок EN , параллельный отрезку KM . При таком построении получается шесть прямоугольных плоских треугольников: $\triangle COK$, $\triangle COD$, $\triangle DOM$, $\triangle EDN$, $\triangle ECK$ и $\triangle ECD$. Центральные углы $\angle COK$, $\angle COD$ и $\angle KOD$ численно равны соответствующим им дугам a , b и c . Угол A сферического треугольника ABC равен двугранному углу $\angle CDE$; точно так же

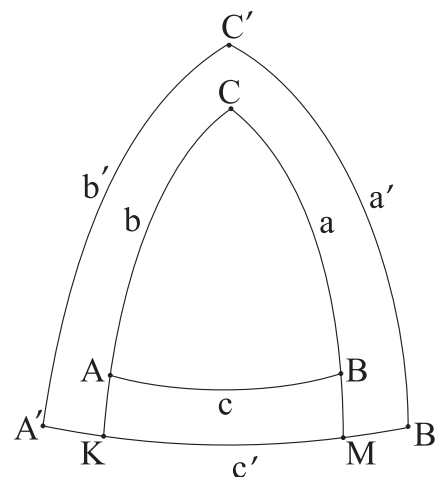


Рис. 5: к определению взаимно полярных сферических треугольников.

равны между собою угол B сферического треугольника ABC и плоский угол $\angle CKE$.

Определим длину отрезка EC из треугольников ECK и ECD :

$$EC = CK \sin B = R \sin a \sin B,$$

$$EC = CD \sin A = R \sin b \sin A.$$

Приравнивая между собой правые части этих двух выражений, можно получить первую из следующей группы формул²:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B, \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Перегруппировав члены в последних формулах, получим, что *во всяком сферическом треугольнике отношения синусов сторон равны отношениям синусов противолежащих им углов*. Формулы (17) называются **формулами синусов** для сферического треугольника.

Воспользуемся очевидным равенством (см. рис. 4):

$$OK = OM + MK.$$

Выразим отрезки OK , OM и MK через тригонометрические функции углов и сторон треугольников $\triangle KOC$, $\triangle MOD$, $\triangle DOC$, $\triangle NDE$ и $\triangle ECD$, а именно:

$$\begin{aligned} OK &= R \cos a, OM = OD \cos c = R \cos b \cos c, \\ MK &= NE = ED \sin c = CD \cos A \sin c = R \sin b \sin c \cos A. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив полученные произведения вместо OK , OM и MK , получим первую формулу группы³:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Иначе говоря, *во всяком сферическом треугольнике косинус стороны равен произведению косинусов двух других сторон плюс произведение синусов этих же сторон, умноженное на косинус угла между ними*. Формулы (19) называются **формулами косинусов сторон** сферического треугольника.

²Последние две формулы написаны по аналогии: они получаются при условии, если треугольник, подобный EDN , будет построен последовательно в плоскостях OBC и OAC .

³Здесь вторая и третья строки выводятся аналогично первой.

Если применим группу формул (19) к треугольнику, полярному с данным, имеющему, как известно, стороны $180^\circ - A$, $180^\circ - B$ и $180^\circ - C$ и углы $180^\circ - a$, $180^\circ - b$ и $180^\circ - c$, то получим **формулы косинусов углов**:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

т.е. во всяком сферическом треугольнике косинус угла равен произведению косинусов двух других углов, взятому с обратным знаком, плюс произведение синусов этих углов, умноженное на косинус стороны между ними.

Напишем еще одно очевидное равенство:

$$MN = MD - ND.$$

Так как

$$\begin{aligned} MN &= KE = KC \cos B = R \sin a \cos B, \\ MD &= OD \sin c = R \cos b \sin c, \\ ND &= ED \cos c = DC \cos A \cos c = R \sin b \cos c \cos A, \end{aligned} \quad (21)$$

то имеем

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Точно так же справедливо:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

т.е. во всяком сферическом треугольнике произведение синуса стороны на косинус прилежащего к ней угла равно произведению косинуса на синус двух других сторон, минус произведение синуса и косинуса этих же сторон, умноженное на косинус угла между ними.

На основании соотношений (16) для взаимно полярных треугольников получаем группу формул:

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a, \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b, \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b, \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c, \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Системы формул (22), (23), (24) называется **формулами пяти элементов** для сферического треугольника.

Рассмотрим сферический треугольник, у которого вершинами являются: зенит места наблюдения, полюс мира и светило. Последний традиционно называется **параллактическим треугольником**. Здесь дуга небесного меридиана между полюсом P_n и зенитом Z равна $90^\circ - \varphi$. Другая сторона – полярное расстояние светила C равна $90^\circ - \delta$, и дуга третьей стороны равна зенитному расстоянию светила z .

Если светило находится к западу от небесного меридиана, то угол при полюсе – часовой угол светила t , угол при зените – $180^\circ - A$. Угол q при светиле называется **параллактическим углом**.

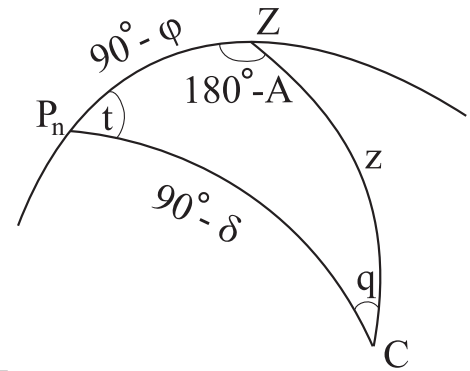


Рис. 6: к определению параллактического треугольника.

С использованием формул сферической тригонометрии (17), (19) и (22) для параллактического треугольника можно записать формулы связи горизонтальной и первой экваториальной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} a) \sin z \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ b) \cos z &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ c) \sin z \cos A &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Формулы обратной связи:

$$\left. \begin{aligned} a) \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ b) \cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A, \\ c) \sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

а. Зная $h_\odot$ (при чем $z_\odot = 90^\circ - h_\odot$) и $\delta_\odot$ светила, можно однозначно определить $A_\odot$ светила с помощью (26.с):

$$\cos A_\odot = \frac{\sin \varphi \sin h_\odot - \sin \delta_\odot}{\cos \varphi \cos h_\odot}, \text{ при } h_\odot = 0, \Rightarrow \cos A_\odot = -\frac{\sin \delta_\odot}{\cos \varphi}. \quad (27)$$

Уравнению (27) будут удовлетворять два корня $A_\odot^{(1)}$, $A_\odot^{(2)}$, удовлетворяющие условиям:

$$0 \leq A_\odot^{(1)} < 180^\circ, \quad 180^\circ \leq A_\odot^{(2)} < 360^\circ.$$

Учет явления рефракции позволяет модифицировать формулу (27) к виду:

$$\cos A_\odot = \frac{\sin \varphi \sin(h_\odot - \delta h) - \sin \delta_\odot}{\cos \varphi \cos(h_\odot - \delta h)}. \quad (28)$$

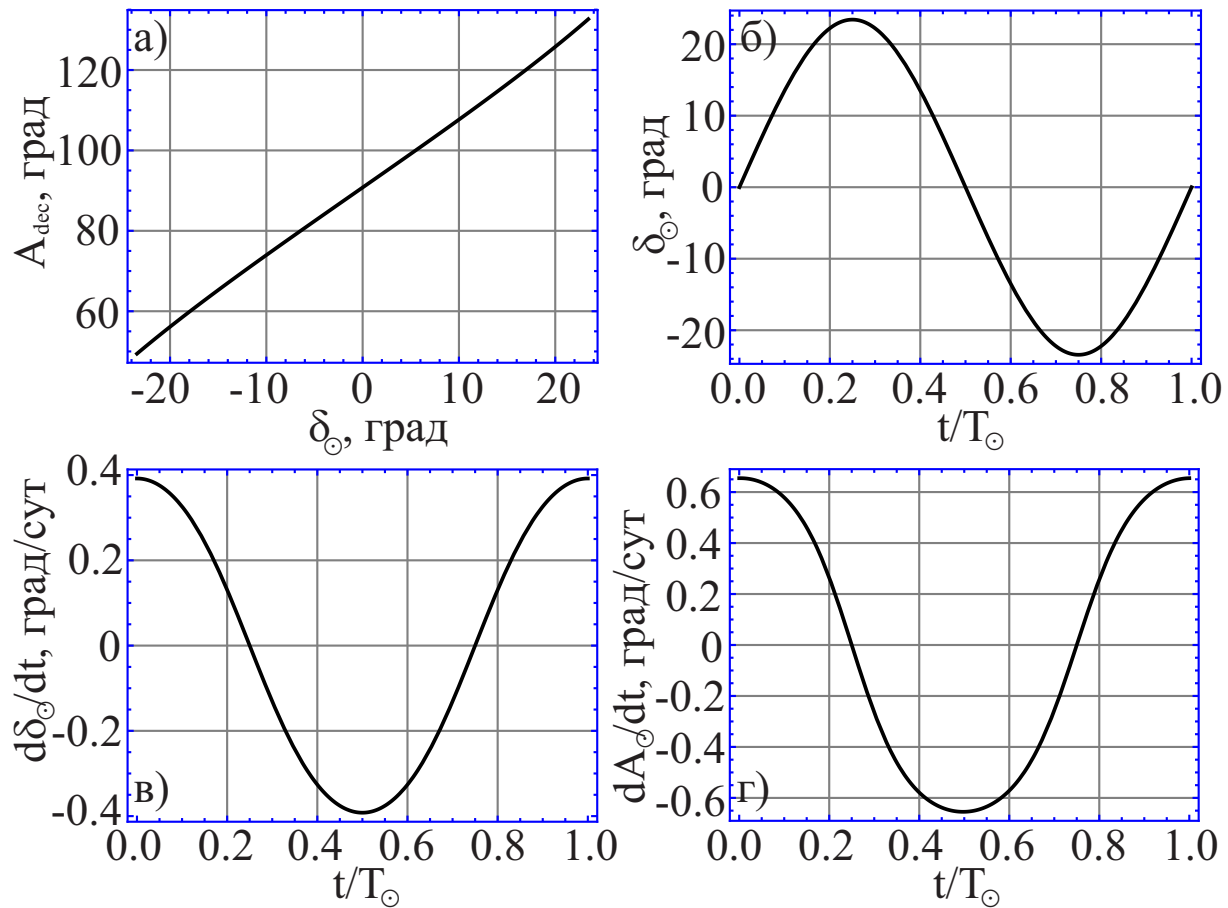


Рис. 7: к определению зависимости: а) азимута точки захода Солнца A_{dec} от его склонения $\delta_{\odot}$; б) склонения Солнца $\delta_{\odot}$ от времени (здесь и далее в долях тропического года); в) скорости изменения склонения Солнца $d\delta_{\odot}/dt$ от времени; г) скорости изменения азимута точки захода Солнца $V_A = dA_{\odot}/dt$ от времени.

Здесь учтено, что поправка за рефракцию для видимой высоты $h_{\odot} = 0^{\circ} \leftrightarrow \delta h = 35'$. С использованием формулы (28) азимуты точек восхода и захода светила:

$$A_{\text{ris}} = 360^{\circ} - A_{\text{dec}}, \quad A_{\text{dec}} = \arccos \left[-\frac{(\sin \delta + \sin 35' \sin \varphi)}{\cos 35' \cos \varphi} \right]. \quad (29)$$

Учитывая, что склонение Солнца в течении года изменяется в пределах интервала:

$$-23^{\circ}26' \leq \delta_{\odot} \leq +23^{\circ}26', \quad (30)$$

то согласно (29), получаем интервал

$$49^{\circ}26' \leq A_{\text{dec}} \leq 132^{\circ}39'. \quad (31)$$

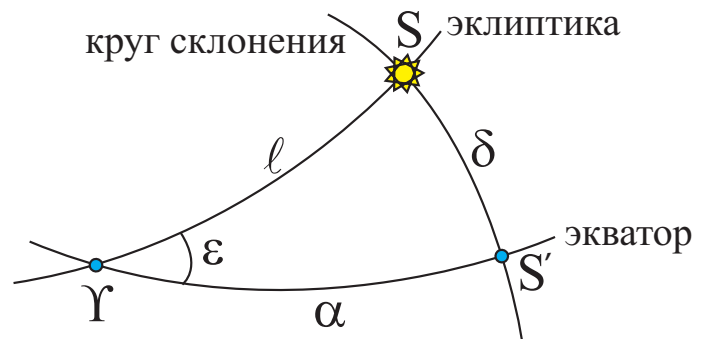


Рис. 8: к определению сферического треугольника.

На рис. 7.а) представлен график зависимости $A_{\text{dec}}(\delta_{\odot})$ на интервале (30). Очевидно, что азимут точки захода Солнца, с ростом его склонения, растет по квазилинейному закону.

б. Вычислим производную от A_{dec} по времени, с использованием (29):

$$V_A = \frac{dA_{\text{dec}}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 A_{\text{dec}}}} \left(\frac{\cos \delta_{\odot}}{\cos 35' \cos \varphi} \right) \frac{d\delta_{\odot}}{dt}. \quad (32)$$

Для определения производной $d\delta_{\odot}/dt$ рассмотрим сферический треугольник, образованный небесным экватором, эклиптической и кругом склонения Солнца (см. рис. 8). Воспользуемся теоремой синусов для этого треугольника:

$$\sin \varepsilon \cdot \sin \ell_{\odot} = \sin 90^{\circ} \cdot \sin \delta_{\odot}, \Rightarrow \delta_{\odot} = \arcsin(\sin \varepsilon \cdot \sin \ell_{\odot}), \quad (33)$$

здесь $\delta_{\odot}$ – склонение Солнца, $\varepsilon = 23^{\circ}26'$ – угол между экватором и эклиптической; ℓ – эклиптическая долгота светила, отсчитываемая относительно точки равноденствия (Υ). Можно полагать, что долгота Солнца изменяется равномерно с течением времени t , следовательно

$$\ell_{\odot} = \omega_{\odot} t, \quad \omega_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\odot}}, \quad (34)$$

здесь $T_{\odot}$ – тропический год. Для полноты анализа поведения искомых величин на рис. 7.б) представлен график зависимости склонения Солнца от времени (в долях тропического года). Из (33)-(34) следует, что

$$\frac{d\delta_{\odot}}{dt} = \frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \ell_{\odot}}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta_{\odot}}} \frac{d\ell_{\odot}}{dt} = \frac{2\pi \sin \varepsilon \cdot \cos \omega_{\odot} t}{T_{\odot} \cos \delta_{\odot}}. \quad (35)$$

На рис. 7.в) представлен график зависимости скорости изменения склонения Солнца от времени (в долях тропического года). Очевидно, что модуль искомой величины достигает максимального значения в дни равноденствий и составляет 0.4 град/сут.

В итоге скорость изменения азимута точки захода Солнца за горизонт представляется в виде:

$$V_A = \frac{2\pi}{T_{\odot}} \left(1 - \left(\frac{\sin \varepsilon \cdot \sin \omega_{\odot} t + \sin 35' \sin \varphi}{\cos 35' \cos \varphi} \right)^2 \right)^{-1/2} \left(\frac{\sin \varepsilon \cdot \cos \omega_{\odot} t}{\cos 35' \cos \varphi} \right). \quad (36)$$

в. На рис. 7.г) представлен график зависимости скорости изменения азимута точки захода Солнца от времени (в долях тропического года). Очевидно, что модуль искомой величины достигает максимального значения в дни равноденствий и составляет 0.65 град/сут. Минимальное значение модуль данной величины достигает в дни солнцестояний.

Ответ: к задаче представлен выражениями (31), (36); модуль искомой величины достигает максимального значения в дни равноденствий и составляет 0.65 град/сут. Минимальное значение модуль данной величины достигает в дни солнцестояний. (11 баллов).

Задача № 8. «Телескоп им. Э. Хаббла и его "дальнобойность"»

Решение. Пусть $L_{\odot}$ – светимость Солнца, тогда освещенность, создаваемая звездой, подобной Солнцу, на расстояние r , без учета поглощения света, согласно закону обратных квадратов, будет представляться в виде:

$$E_{*}^{(0)} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}. \quad (37)$$

Освещенность, создаваемая данной звездой, расположенной на расстоянии 10 парсек от наблюдателя, без учета поглощения света, может быть записана в виде:

$$E_0 = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_0^2}, \quad \text{где } a_0 = 10 \text{ пк}. \quad (38)$$

Учет поглощение света в межзвездной среде приводит к появлению дополнительного множителя у освещенности, обусловленного законом Бугера-Ламберта:

$$E_{*} = E_{*}^{(0)} \cdot 10^{-\kappa r} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \cdot 10^{-0.4vr}. \quad (39)$$

Найдем отношение освещенностей:

$$\frac{E_{*}}{E_0} = \left(\frac{a_0}{r}\right)^2 \cdot 10^{-0.4vr}. \quad (40)$$

Прологарифмируем последний результат и воспользуемся формулой Погсона, в результате получаем

$$\begin{aligned} m_{*} - M_{\odot} &= -2.5 \lg \left(\frac{E_{*}}{E_0} \right) = -2.5 \lg \left(\frac{a_0}{r} \right)^2 - 2.5 \lg (10^{-0.4vr}), \Rightarrow \\ m_{*} &= M_{\odot} - 5 + 5 \lg r + v \cdot r, \quad \text{где } v = 0.002^{\text{м}}/\text{пк}. \end{aligned} \quad (41)$$

Последний результат определяет видимую звездную величину звезды как функцию ее абсолютной звездной величины, расстояния, с учетом поглощения света межзвездной средой. В нашем случае $m_{*} = m_T = +30^{\text{м}}$, $M_{\odot} = 4.83^{\text{м}}$. Следовательно, необходимо решить трансцендентное уравнение вида:

$$A - v \cdot r = 5 \lg r, \quad (42)$$

$$\text{где } A = m_T - M_{\odot} + 5.$$

Последнее уравнение можно решить как численным образом так и графически. Рассмотрим последний метод решения подробнее. Будем полагать, что у нас есть две функции, зависящие от расстояния r :

$$f_1(r) = A - v \cdot r, \quad f_2(r) = 5 \lg r.$$

Найдем точку пересечения кривых данных функций (см. рис. 9). Из графика видно, что точка пересечения расположена в окрестности значения $r_0 \approx 5700$ пк. Точный численный расчет дает значение $r = 5696.1$ пк.

Ответ: $r = 5696.1$ пк. (12 баллов).

Задача № 9. «Перетягивание Луны»

Решение. Определим силы взаимодействия между Луной и Землей, Луной и Солнцем, в приближении двух материальных точек, с использованием закона всемирного тяготения Ньютона:

$$F_{\zeta-\oplus} = \frac{G m_{\zeta} m_{\oplus}}{a_{\zeta}^2}, \quad F_{\zeta-\odot} = \frac{G m_{\zeta} m_{\odot}}{a_{\oplus}^2}, \quad (43)$$

здесь G – универсальная гравитационная постоянная, $m_{\odot}, m_{\oplus}, m_{\zeta}$ – массы Солнца, Земли и Луны соответственно, a_{ζ} – сегодняшняя большая полуось лунной орбиты (относительно центра Земли), $a_{\oplus}$ – большая полуось земной орбиты (относительно центра Солнца).

Найдем отношение данных сил:

$$\eta = \frac{F_{\zeta-\odot}}{F_{\zeta-\oplus}} = \frac{m_{\odot}}{m_{\oplus}} \left(\frac{a_{\zeta}}{a_{\oplus}} \right)^2 = 2.20. \quad (44)$$

Из последнего выражения следует, что сила притяжения Луны Солнцем в 2.20 раза больше силы притяжения Луны Землей. Однако Луна движется вокруг Земли, а не вокруг Солнца. Это обусловлено тем, что Земля и Луна постоянно падают на Солнце в его почти однородном гравитационном поле. Из-за взаимного притяжения эти тела образуют связанную систему и способны двигаться вокруг общего центра масс, подобно заряженным шарикам, свободно падающим в однородном поле силы тяжести Земли, вблизи ее поверхности.

В случае захвата Луны Солнцем необходимо, чтобы под действием результирующей силы, равной векторной сумме сил притяжения со стороны данных тел, последняя должна двигаться по круговой гелиоцентрической орбите. Очевидно, вероятнее всего, такой захват сможет произойти в момент, когда Луна располагается между Солнцем и Землей. Пусть $a_{\zeta}^{(1)}$ – расстояние от Луны до Земли в момент захвата, тогда последняя начнет двигаться по гелиоцентрической орбите радиуса $a_{\oplus} - a_{\zeta}^{(1)}$. Запишем второй закон Ньютона для Луны, движущейся вокруг Солнца в проекциях на направление «Земля-

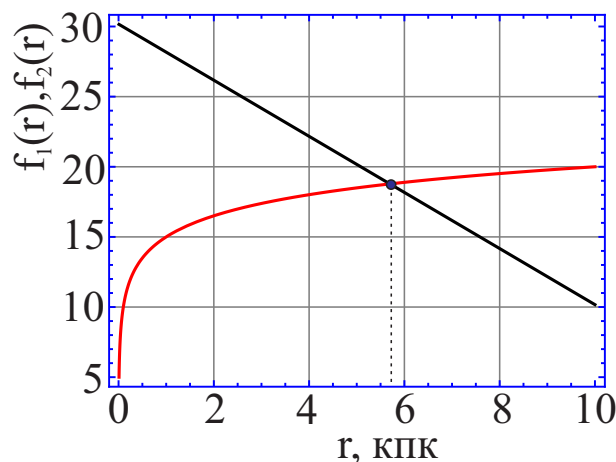


Рис. 9: к определению сферического треугольника.

Солнце»:

$$\mathfrak{M}_{\zeta} \omega_{\oplus}^2 (a_{\oplus} - a_{\zeta}^{(1)}) = \frac{G \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{M}_{\odot}}{(a_{\oplus} - a_{\zeta}^{(1)})^2} - \frac{G \mathfrak{M}_{\zeta} \mathfrak{M}_{\oplus}}{(a_{\zeta}^{(1)})^2}, \quad (45)$$

здесь учтено, что в момент захвата Луна будет двигаться вокруг Солнца с той же угловой скоростью что и Земля – $\omega_{\oplus}$. С другой стороны, можно записать второй закон Ньютона для Земли, движущейся по круговой орбите радиуса $a_{\oplus}$:

$$\mathfrak{M}_{\oplus} \omega_{\oplus}^2 a_{\oplus} = \frac{G \mathfrak{M}_{\oplus} \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}^2}, \Rightarrow \omega_{\oplus}^2 = \frac{G \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}^3}. \quad (46)$$

Подставим последний результат для угловой скорости орбитального движения Земли в уравнение (45). В результате имеем

$$\frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}^3} (a_{\oplus} - a_{\zeta}^{(1)}) = \frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{(a_{\oplus} - a_{\zeta}^{(1)})^2} - \frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{(a_{\zeta}^{(1)})^2}.$$

Пусть $\eta = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\odot}}$, $x = \frac{a_{\zeta}^{(1)}}{a_{\oplus}}$, причем очевидно, что $x \ll 1$, $\Rightarrow$

$$(1 - x)^3 = 1 - \eta \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2, \Rightarrow 1 - 3x \approx 1 - \frac{\eta}{x^2}, \Rightarrow x^3 = \frac{\eta}{3}, \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{\eta}{3}}, \Rightarrow a_{\zeta}^{(1)} = a_{\oplus} \sqrt[3]{\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\odot}}} = 1.497 \cdot 10^6 \text{ км}. \quad (47)$$

Определим далее сидерический период обращения системы «Земля-Луна», в момент захвата, с использованием третьего закона Кеплера:

$$\left(\frac{T_{\zeta}^{(1)}}{T_{\zeta}} \right)^2 = \left(\frac{a_{\zeta}^{(1)}}{a_{\zeta}} \right)^3, \Rightarrow T_{\zeta}^{(1)} = T_{\zeta} \left(\frac{a_{\zeta}^{(1)}}{a_{\zeta}} \right)^{3/2} = 209.97 \text{ сут} \approx 210 \text{ сут}. \quad (48)$$

Ответ: к задаче представляется выражением (48). (14 баллов).

Задача № 10. «Изменение продолжительности гражданских сумерек»

Решение. Как известно, *гражданскими сумерками* называется промежуток времени, в течение которого высота истинного солнца, отсчитываемая относительно горизонта, изменяется в пределах от -6° до $-51'$. Гражданские сумерки бывают утренними и вечерними. Предположим, что наблюдатель Солнца находится в северном географическом полушарии, на географической широте φ . Пусть в момент времени t_1 наступает начало вечерних гражданских сумерек, в это момент верхняя точка видимого диска Солнца скроется за горизонтом, при этом высота истинного Солнца станет равной $h_1 = -51'$ (см. рис. 10). В момент времени t_2 истинное Солнце окажется на

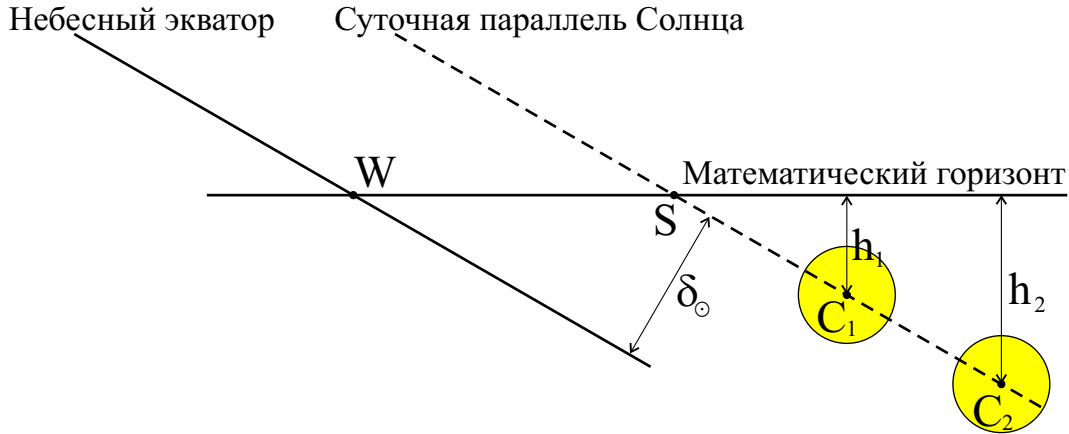


Рис. 10: к определению положения истинного Солнца на моменты начала и окончания гражданских сумерек.

высоте $h_2 = -6^\circ$ и данные сумерки завершаются. Для определения продолжительности гражданских сумерек воспользуемся формулой (25.b) из задачи №7 настоящего релиза, с учетом что $z_\odot = 90^\circ - h_\odot$:

$$\sin h_\odot = \sin \delta_\odot \sin \varphi + \cos \delta_\odot \cos \varphi \cos t_\odot, \Rightarrow$$

$$t_\odot = \arccos \left[\frac{-\sin |h_\odot| - \sin \delta_\odot \sin \varphi}{\cos \delta_\odot \cos \varphi} \right], \quad (49)$$

$$t_\odot = \omega_\oplus \tau = \frac{2\pi}{T_\oplus} \tau, \quad (50)$$

здесь $\delta_\odot$ – склонение Солнца на момент наблюдения сумерек, $\omega_\oplus$, $T_\oplus$ – угловая скорость и период вращения Земли вокруг своей оси, τ – промежуток времени, прошедшего с момента верхней кульминации светила до данного момента времени. С учетом (49)-(50), продолжительность гражданских сумерек можно представить в виде:

$$\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{T_\oplus}{2\pi} \left[\arccos \left[\frac{-\sin |h_{\odot 2}| - \sin \delta_\odot \sin \varphi}{\cos \delta_\odot \cos \varphi} \right] - \right.$$

$$\left. - \arccos \left[\frac{-\sin |h_{\odot 1}| - \sin \delta_\odot \sin \varphi}{\cos \delta_\odot \cos \varphi} \right] \right]. \quad (51)$$

Если склонение Солнца есть небольшой угол, то угол между горизонтом и его суточной параллелью равен $90^\circ - \varphi$. Дугу параллели $\ell = C_1 C_2$ можно представить в виде:

$$\ell = \omega_\odot \Delta \tau = \omega_\oplus \cos \delta_\odot \Delta \tau, \Rightarrow$$

$$\text{иначе } \ell = \frac{|h_{\odot 2}| - |h_{\odot 1}|}{\sin(90^\circ - \varphi)}, \Rightarrow \Delta \tau = \frac{T_\oplus}{2\pi} \frac{|\Delta h|}{\cos \varphi \cos \delta_\odot}, \quad (52)$$

здесь $\omega_\odot = \omega_\oplus \cos \delta_\odot$ – угловая скорость видимого движения Солнца по суточной параллели со склонением $\delta_\odot$. Нетрудно доказать, что выражение (52) является частным случаем точного результата (51). Учтем далее, что склонение Солнца в течение года принимает значения из интервала (30). Очевидно,

с ростом широты местности и склонения Солнца знаменатель (52) уменьшается, а продолжительность сумерек возрастает. Следовательно, наименьшая продолжительность суток достигается на экваторе, $\varphi = 0^\circ$. Очевидно, здесь же будет достигаться минимум изменения продолжительности суток:

$$\delta(\Delta\tau) = \frac{T_{\oplus}}{2\pi} |\Delta h| \left(\frac{1}{\cos \delta_{\odot}^{(\max)}} - 1 \right). \quad (53)$$

б) Продолжительность пребывания Солнца над горизонтом на экваторе составляет $T_{\oplus}/2 = 11$ часов 58 минут (без учета рефракции света и конечности размеров диска Солнца) или $T_{\oplus}/2 + 2 \cdot 51'/\omega_{\odot} = 12$ часов 05 минут (с учетом данных факторов).

в) Продолжительность данного вида сумерек на экваторе, с учетом (51), будет определяться интервалом:

$$20.54 \text{ мин} \leq \Delta\tau \leq 22.40 \text{ мин}. \quad (54)$$

Рассмотрим другой важный случай: изменение продолжительности суток на географических полюсах. С использованием формулы (33) можно определить продолжительность гражданских сумерек на полюсах:

$$\sin \varepsilon \cdot \sin \ell_{\odot} = \sin 90^\circ \cdot \sin \delta_{\odot}, \Rightarrow \ell_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\odot}} t = \arcsin \left[\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon} \right]. \quad (55)$$

Откуда продолжительность (при условии что склонение Солнца равно его высоте) есть

$$\tau = \frac{T_{\odot}}{2\pi} \left[\arcsin \left[\frac{\sin |h_{\odot 2}|}{\sin \varepsilon} \right] - \arcsin \left[\frac{\sin |h_{\odot 1}|}{\sin \varepsilon} \right] \right], \quad (56)$$

здесь $T_{\odot}$ – продолжительность тропического года. Очевидно, что изменение величины τ при переходе от осенних к весенним сумеркам на полюсе (как известно, сумерки случаются на полюсах лишь 2 раза в год!) может быть обусловлено лишь изменением продолжительности тропического года $T_{\odot}$ или величины угла ε .

Изменение продолжительности тропического года на больших временных интервалах можно описать формулой:

$$T_{\odot} = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3, \text{ где } a_0 = 365.2421896698, \quad (57)$$

$$a_1 = -6.15359 \cdot 10^{-6}, \quad a_2 = 7.29 \cdot 10^{-10}, \quad a_3 = 2.64 \cdot 10^{-10},$$

здесь T – количество юлианских столетий (1 юлианское столетие равно в точности 36 525 дней), отсчитываемых от полудня 1 января 2000 года. Угол ε изменяется главным образом в результате прецессии и нутации земной оси.

Зависимость ε от времени, обусловленная прецессией можно определить формулой:

$$\varepsilon = b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3 + b_4 T^4 + b_5 T^5, \quad \text{где} \quad (58)$$

$$b_0 = 23^\circ 26' 21.406'', \quad b_1 = -46.836769'', \quad b_2 = -0.0001831'',$$

$$b_3 = 0.00200340'', \quad b_4 = -0.576'' \cdot 10^{-6}, \quad b_5 = -4.34'' \cdot 10^{-8}.$$

Численный анализ показывает, что за полгода 2020 года тропический год увеличился всего лишь на $2.66 \cdot 10^{-3}$ с, а угол ε уменьшился на $\Delta\varepsilon_p = 0.23''$. Оценим изменение угла ε "сверху" в случае нутации. Как известно, полюс мира в результате нутации за 18.6 лет описывает кривую, которую в низшем приближении можно аппроксимировать эллипсом с осями $18'' \times 16''$. Будем полагать, что полюс описывает прямоугольник с указанными размерами, следовательно, максимальное годовое изменение угла

$$\Delta\varepsilon_n = \frac{2(18'' + 16'')}{18.6 \text{ лет}} = 3.66''.$$

Тогда полное годовое изменение угла не может быть больше $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_p + \Delta\varepsilon_n = 3.89''$. В настоящее время $\varepsilon = 23^\circ 26' 12''$.

$$\tau(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \tau(\varepsilon) = 51.36 \text{ сек}, \quad (59)$$

Следовательно, на полюсах изменение продолжительности гражданских сумерек в течение года будет меньше, чем на экваторе, и составляет

$$\tau(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \tau(\varepsilon) = 51.36 \text{ сек}, \quad (60)$$

Искомый интервал возможных значений продолжительности сумерек на 2020 год составляет

$$13 \text{ сут } 6 \text{ час } 56 \text{ мин } 44 \text{ сек} \leq \Delta\tau \leq 13 \text{ сут } 6 \text{ час } 57 \text{ мин } 36 \text{ сек}. \quad (61)$$

Время пребывания Солнца над горизонтом с учетом конечности размеров его диска и рефракции света составляет 182.658 сут.

Ответ: а) $\varphi = \pm 90^\circ$, б) 182.658 сут, в) представляется выражением (61). $\varphi = 0^\circ$. (14 баллов).

Задача № 11. «Фотоохота на астероиды Главного пояса»**Дано:**

$$\begin{aligned}
 N &= 70, \\
 m_{\max} &= 10^m, \\
 N &= 18 \text{ Мп}, \\
 k &= 1.6, \\
 f &= 135 \text{ мм}, \\
 -10^\circ &\leq \beta \leq 10^\circ.
 \end{aligned}$$

Найти:

$$\begin{aligned}
 N_a &- ? \\
 d''_{\min} &- ?
 \end{aligned}$$

Решение:

Прежде всего, вычислим поверхностную концентрацию n_Ω астероидов, в области небосвода, занимаемой Главным поясом астероидов, то есть определим количество астероидов, приходящихся на единицу телесного угла, в области пояса:

$$n_\Omega = \frac{N}{\Omega_\pi}, \quad (62)$$

здесь учтено, что общее количество астероидов N равномерно распределено по эклиптике и ее окрестностях, в полосе с эклиптической широтой β , принадлежащей ука-

занному в разделе «дано» интервалу. Ω_π – телесный угол, соответствующий данной полосе. Определим данный телесный угол. Для этого учтем, что данную полосу на небесной сфере можно представить как разницу между поверхностью всей небесной сферы и двух одинаковых областей, заключенных внутри конусов, с вершиной, расположенной в центре небесной сферы, углом раствора $90^\circ - \beta_{\max}$ (где $\beta_{\max} = 10^\circ$), осью симметрии которых является ось эклиптики. Тогда искомый телесный угол можно представить в виде:

$$\Omega_\pi = \Omega_{\text{сф}} - 2\Omega_k = 4\pi - 2 \cdot 2\pi (1 - \cos(90^\circ - \beta_{\max})) = 4\pi \sin \beta_{\max}, \quad (63)$$

здесь учтено, что телесный угол для конуса с углом раствора α , выраженный в стереорадианах, представляется в виде:

$$\Omega_k = 2\pi (1 - \cos \alpha).$$

Из выражений (62) и (63) следует, что

$$n_\Omega = \frac{N}{4\pi \sin \beta_{\max}} = 32.08 \text{ астероида/срад} = 9.77 \cdot 10^{-3} \text{ астероида/град}^2. \quad (64)$$

Далее вычислим телесный угол, соответствующий полю зрения камеры. Поскольку через геометрический центр линзы световые лучи проходят без преломления, то искомый телесный угол равен телесному углу, под которым видна матрица фотоаппарата с позиции геометрического центра линзы. Последний можно представить следующим приближенным выражением (оно справедливо, поскольку фокусное расстояние объектива f существенно больше размеров кроп-матрицы фотоаппарата):

$$\Omega_{\text{пз}} \approx \frac{a \times b}{f^2} = \frac{a_0 \times b_0}{k^2 f^2} = 1.85 \cdot 10^{-2} \text{ срад} = 60.8 \text{ град}^2, \quad (65)$$

здесь $a_0 = 36$ мм, $b_0 = 24$ мм – размеры полнокадровой матрицы, a, b – размеры кроп-матрицы данного фотоаппарата, связанные с размерами полнокадровой матрицы выражениями вида:

$$a = \frac{a_0}{k}, \quad b = \frac{b_0}{k}.$$

Следовательно искомое количество астероидов, которое может зафиксировать одновременно в одном кадре такая камера, ориентированная в меридиан, в истинную полночь есть

$$N_a = n_\Omega \cdot \Omega_{\text{из}} = 0.59 \text{ астероида.} \quad (66)$$

Т.о., в пределы одного кадра, полученного таким фотоаппаратом, попадает меньше одного астероида! Поэтому необходимо снимать несколько кадров для большего охвата небосвода и отлова данных тел.

При ответе на последний вопрос задачи необходимо учесть, что разрешающая способность фотокамеры определяется разрешающей способностью ее матрицы, поскольку у объектива эта характеристика всегда существенно выше. Воспользуемся теоремой Котельникова и построим, приблизительно, профиль распределения интенсивности света для двойной звезды, формирующегося на ПЗС-матрице (см. рис. 11). Очевидно, что центры изображений (кружков) звезд должны быть расположены на 4ℓ друг от друга (здесь ℓ – размер пикселя). Поскольку картина формируется в фокальной плоскости, то разрешающую способность β_M можно записать так

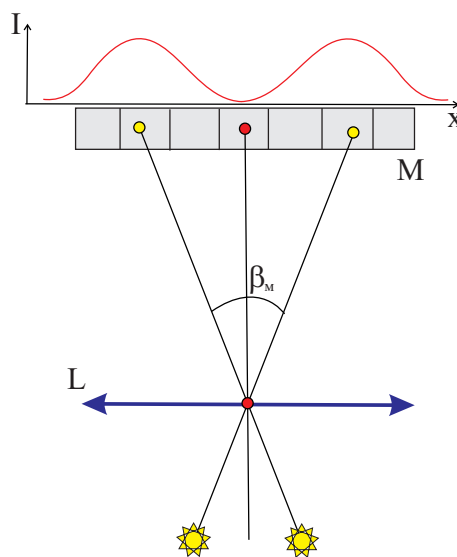


Рис. 11: к определению искомой величины.

$$d''_{\min} = \left(\frac{4\ell}{f} \right) \times 206265'' = 4\sqrt{a_0 \times b_0} \frac{1}{k f \sqrt{N}} \times 206265'' = 26.5''. \quad (67)$$

Ответ: к задаче представлен результатами (66)-(67). (14 баллов).

Задача № 12. «Если бы у Венеры был спутник...»

Дано:

$$\beta_y = 3',$$

$$m_{\max} = +6^m.$$

Найти:

$$r_s^{\min}, \mathfrak{R}_s^{(\min)} - ?$$

$$\mathfrak{M}_s, T_s - ?$$

Решение:

Прежде всего заметим, что в момент наибольшей элонгации Венеры, последняя вместе с Землей и Солнцем образует прямоугольный треугольник, прямой угол которого должен лежать при Венере. Пусть $r_\oplus$, r_φ – гелиоцентрические расстояния Земли и Венеры на указанный момент, а Δ_φ – геоцентрическое расстояние Венеры. Тогда последний параметр можно

представить в виде:

$$\Delta_{\varphi} = \sqrt{r_{\oplus}^2 - r_{\varphi}^2}. \quad (68)$$

С учетом того, что интервалы допустимых значений (ИДЗ) для величин $r_{\oplus}$, r_{φ} есть

$$a_{\varphi}(1 - \varepsilon_{\varphi}) \leq r_{\varphi} \leq a_{\varphi}(1 + \varepsilon_{\varphi}), \Rightarrow 0.7184 \text{ а.е.} \leq r_{\varphi} \leq 0.7282 \text{ а.е.}, \quad (69)$$

$$a_{\oplus}(1 - \varepsilon_{\oplus}) \leq r_{\oplus} \leq a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus}), \Rightarrow 0.9833 \text{ а.е.} \leq r_{\oplus} \leq 1.0167 \text{ а.е.}, \quad (70)$$

здесь $a_{\oplus}, \varepsilon_{\oplus}$ – большая полуось и эксцентриситет земной орбиты, $a_{\varphi}, \varepsilon_{\varphi}$ – большая полуось и эксцентриситет орбиты Венеры.

Тогда возможные геоцентрические расстояния принадлежат интервалу:

$$\begin{aligned} \sqrt{(r_{\oplus}^{\min})^2 - (r_{\varphi}^{\max})^2} \leq \Delta_{\varphi} \leq \sqrt{(r_{\oplus}^{\max})^2 - (r_{\varphi}^{\min})^2}, \Rightarrow \\ 0.6608 \text{ а.е.} \leq \Delta_{\varphi} \leq 0.7194 \text{ а.е.} \end{aligned} \quad (71)$$

Минимальный радиус орбиты спутника Венеры и его ИДЗ есть

$$r_s^{\min} = \Delta_{\varphi} \left(\frac{\beta_y}{3438'} \right), \Rightarrow 86260 \text{ км} \leq r_s^{\min} \leq 93910 \text{ км}. \quad (72)$$

Для определения минимального радиуса спутника Венеры учтем, что его звездная величина в наибольшей элонгации этой планеты должна быть не больше $m_{\max}$. В предельном случае имеем

$$\begin{aligned} m_{\max} - m_{\odot} = -2.5 \lg \left(\frac{E_{\min}}{f_{\odot}} \right), \Rightarrow \\ E_{\min} = f_{\odot} 10^{-0.4(m_{\max} - m_{\odot})} = 1.03 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/м}^2, \end{aligned} \quad (73)$$

здесь $f_{\odot} = L_{\odot} / (4\pi a_{\oplus}^2) = 1361 \text{ Вт/м}^2$ – солнечная постоянная, $L_{\odot}$ – светимость Солнца, $m_{\odot} = -26.80^{\text{м}}$ – видимая болометрическая звездная величина Солнца; $E_{\min}$ – освещенность у поверхности Земли (без учета атмосферного поглощения), создавая спутником Венеры.

Как известно, освещенность, создаваемая Солнцем на гелиоцентрическом расстоянии r_{φ} , определяется как

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r_{\varphi}^2} = f_{\odot} \left(\frac{a_{\oplus}}{r_{\varphi}} \right)^2, \quad (74)$$

здесь $L_{\odot}$ – светимость Солнца, $a_{\oplus}$ – большая полуось земной орбиты. Поток излучения, падающий на спутник Венеры, есть

$$\Phi_0 = E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_s^2. \quad (75)$$

Поток отраженного света его поверхностью можно записать так

$$\Phi_{\text{ref}} = A_s \Phi_0 \mathcal{F}_s, \quad (76)$$

здесь $A_s = A_{\zeta} = 0.12$ – альбеда спутника, $\mathcal{F}_s = 0.5$ – его фаза в наибольшей элонгации. Далее полагая, что отраженный свет распространяется по всем направлениям одинаково (приближение изотропного источника света), определим освещенность, создаваемую спутником на расстоянии Δ_{φ} :

$$E_s = \frac{\Phi_{\text{ref}}}{4\pi\Delta_{\varphi}^2} = \frac{A_s \pi \mathfrak{R}_s^2 \mathcal{F}_s}{4\pi \Delta_{\varphi}^2} f_{\odot} \left(\frac{a_{\oplus}}{r_{\varphi}} \right)^2 = \frac{1}{4} A_s f_{\odot} \mathcal{F}_s \left(\frac{a_{\oplus}}{r_{\varphi}} \right)^2 \left(\frac{\mathfrak{R}_s}{\Delta_{\varphi}} \right)^2. \quad (77)$$

Приравнявая освещенности E_s и $E_{\min}$ и выражая $\mathfrak{R}_s$, в результате получаем

$$\mathfrak{R}_s^{\min} = 2\Delta_{\varphi} \left(\frac{r_{\varphi}}{a_{\oplus}} \right) \sqrt{\frac{E_{\min}}{A_s f_{\odot} \mathcal{F}_s}} = 2\Delta_{\varphi} \left(\frac{r_{\varphi}}{a_{\oplus}} \right) \sqrt{\frac{1}{A_s \mathcal{F}_s}} 10^{-0.2(m_{\max} - m_{\odot})}. \quad (78)$$

Очевидно, для параметра $\mathfrak{R}_s^{\min}$ характерен следующий ИДЗ:

$$2.249 \cdot 10^{-6} \Delta_{\varphi}^{(\min)} \left(\frac{r_{\varphi}^{(\min)}}{a_{\oplus}} \right) \leq \mathfrak{R}_s^{\min} \leq 2.249 \cdot 10^{-6} \Delta_{\varphi}^{(\max)} \left(\frac{r_{\varphi}^{(\max)}}{a_{\oplus}} \right), \Rightarrow$$

$$159.7 \text{ км} \leq \mathfrak{R}_s^{\min} \leq 249.1 \text{ км}. \quad (79)$$

Массу спутника определим выражением вида:

$$\mathfrak{M}_s = \rho_{\zeta} \frac{4}{3} \pi (\mathfrak{R}_s^{\min})^3, \Rightarrow 5.70 \cdot 10^{19} \text{ кг} \leq \mathfrak{M}_s \leq 2.16 \cdot 10^{20} \text{ кг}. \quad (80)$$

Из последнего результата следует, что допустимая минимальная масса такого спутника меньше массы центральной планеты более чем в 20 тысяч раз!

Запишем третий обобщенный закон Кеплера для двух пар «Венера-спутник» и «Солнце-Земля»:

$$\frac{(\mathfrak{M}_{\varphi} + \mathfrak{M}_s) T_s^2}{(\mathfrak{M}_{\odot} + \mathfrak{M}_{\oplus}) T_{\oplus}^2} = \frac{r_s^3}{a_{\oplus}^3}, \Rightarrow T_s \approx T_{\oplus} \left(\frac{r_s}{a_{\oplus}} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{\mathfrak{M}_{\varphi}}}. \quad (81)$$

При записи последнего учтено, что $\mathfrak{M}_{\varphi} \gg \mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{M}_{\odot} \gg \mathfrak{M}_{\oplus}$. В результате получаем следующий ИДЗ для сидерического периода обращения спутника:

$$3.23 \text{ сут} \leq T_s \leq 3.67 \text{ сут}. \quad (82)$$

Проверим, может ли, в принципе, Венера иметь на такой орбите спутник. Чтобы спутник мог пребывать на такой орбите, последняя должна целиком

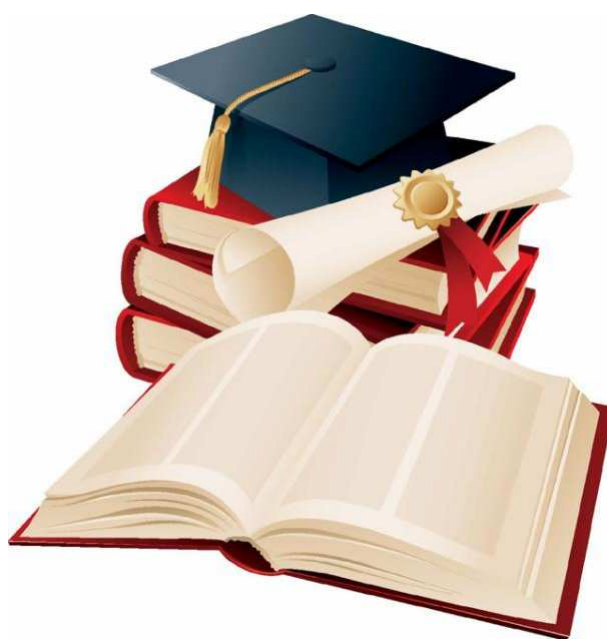
лежать в пределах **сферы Хилла** – гравитационной сферы, в пределах которой любое небесное тело, движущееся вокруг данного, является его стабильным спутником. Радиус последней определяется, главным образом, гравитационным влиянием Солнца и представляется в виде:

$$R_{\text{Hill}} = r_{\varphi} \sqrt[3]{\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_{\varphi}}{\mathfrak{M}_{\odot}}}, \Rightarrow 1.00 \cdot 10^6 \text{ км} \leq R_{\text{Hill}} \leq 1.02 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

Очевидно, что сфера Хилла гораздо больше возможных значений радиуса орбиты спутника, значит Венера может иметь спутник на расстояниях (72).

Ответ: к задаче представлен выражениями (72), (79), (80), (82); может. (\$_{\text{max}} = 15\$ баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Экс- цен- триси- тет	Наклон к плоскости эклипти- ки	Период обраще- ния	Синоди- ческий период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плот- ность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плос- кости орбиты	Гео- мет- рич. альбе- до	Вид. звезд- ная вели- чина*
	кг	массы Земли	км	ради- усы Зем- ли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

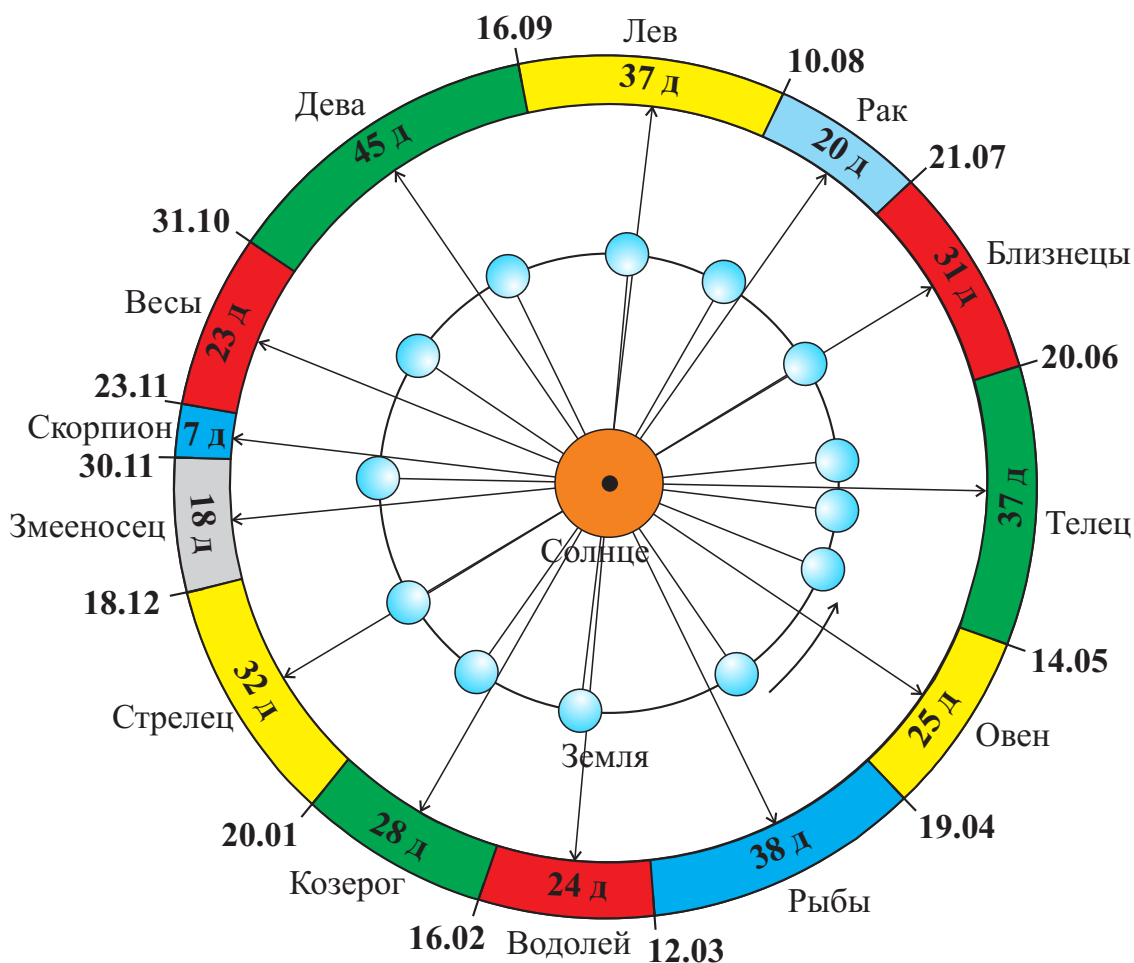


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

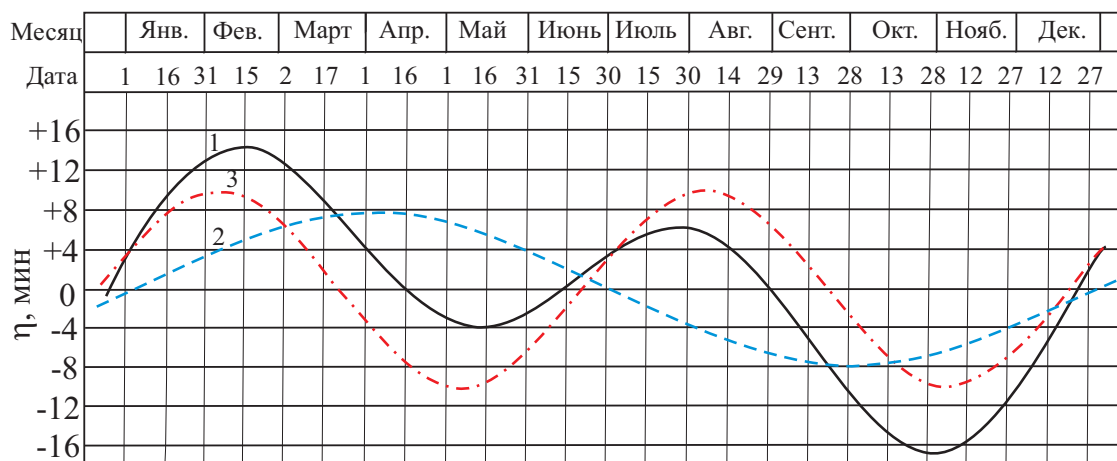


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

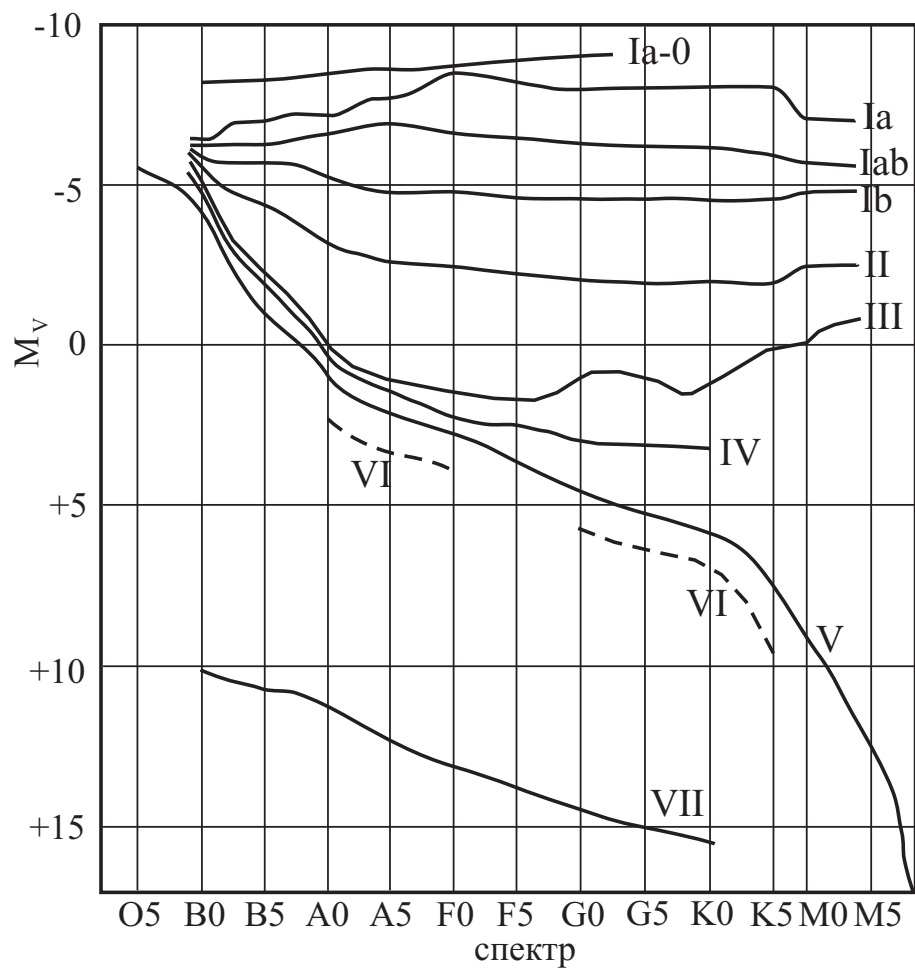


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ПЕРИОДЫ	A	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	(H)												
2	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne					
3	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar					
4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe					
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru					
6	Cs	Ba	La*	Hf	Ta	W	Re	Os					
7	Fr	Ra	Ac**	Rf	Db	Sg	Bh	Hs					
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													
31													
32													
33													
34													
35													
36													
37													
38													
39													
40													
41													
42													
43													
44													
45													
46													
47													
48													
49													
50													
51													
52													
53													
54													
55													
56													
57													
58													
59													
60													
61													
62													
63													
64													
65													
66													
67													
68													
69													
70													
71													
72													
73													
74													
75													
76													
77													
78													
79													
80													
81													
82													
83													
84													
85													
86													
87													
88													
89													
90													
91													
92													
93													
94													
95													
96													
97													
98													
99													
100													
101													
102													
103													
104													
105													
106													
107													
108													
109													
110													
111													
112													
113													
114													
115													
116													
117													
118													
119													
120													
121													
122													
123													
124													
125													
126													
127													
128													
129													
130													
131													
132													
133													
134													
135													
136													
137													
138													
139													
140													
141													
142													
143													
144													
145													
146													
147													
148													
149													
150													
151													
152													
153													
154													
155													
156													
157													
158													
159													
160													
161													
162													
163													
164													
165													
166													
167													
168													
169													
170													
171													
172													
173													
174													
175													
176													
177													
178													
179													
180													
181													
182													
183													
184				</									