

Решения задач

Открытой межрегиональной олимпиады

по астрономии имени Ф.А. Бредихина

10-11 класс

№ 1. «Вега и Капелла»

Условие. Определите долю части поверхности Земли, с любой точки которой Вега ($\alpha_V = 18^h 37^m$, $\delta_V = 38^\circ 47'$) видна лишь в верхней кульминации, а Капелла ($\alpha_K = 05^h 17^m$, $\delta_K = 46^\circ 00'$) – видна в двух кульминациях? В качестве формы Земли принять шар.

Решение. Для того чтобы Вега была видна лишь в верхней кульминации, необходимо чтобы она была *восходящим и заходящим светилом* в этих точках поверхности Земли (2 балла). Следовательно, высота Веги в нижней кульминации должна быть меньше нуля, т.е.

$$\varphi + \delta_V - 90^\circ < 0, \Rightarrow \varphi < 90^\circ - \delta_V = 51^\circ 13'. \quad (2 \text{ балла})$$

С другой стороны, на широтах южного полушария Веги будет кульминировать к северу от зенита, причем ее высота должна быть положительной:

$$90^\circ - \delta + \varphi > 0, \Rightarrow \varphi > \delta - 90^\circ = -51^\circ 13'. \quad (2 \text{ балла})$$

Т.о, Вега видна лишь в верхней кульминации на широтах

$$-51^\circ 13' \leq \varphi_V \leq 51^\circ 13'. \quad (2 \text{ балла}) \quad (1)$$

Чтобы Капелла была видна в верхней и нижней кульминации, она *должна быть незаходящей звездой в данном месте*, тогда ее высота в нижней кульминации должна быть неотрицательной (2 балла):

$$\varphi + \delta_K - 90^\circ \geq 0, \Rightarrow \varphi \geq 90^\circ - \delta_K = 44^\circ 00'.$$

Т.о, на широтах

$$44^\circ 00' \leq \varphi_K \leq 90^\circ 00'. \quad (2 \text{ балла}) \quad (2)$$

Капелла является незаходящей звездой. Из (1) и (2) следует, что оба условия выполняются на широтах из интервала:

$$44^\circ 00' \leq \varphi \leq 51^\circ 13'. \quad (3 \text{ балла}) \quad (3)$$

Для определения доли поверхности Земли, соответствующей данной полосе широт, воспользуемся известной формулой для площади поверхности шарового сегмента с углом раствора α для шара радиуса R (см. рис. 1.а):

$$S_{\text{ш.с.}} = 2\pi R^2(1 - \cos \alpha). \quad (4)$$

Тогда площадь поверхности Земли, заключенной между географическими параллелями пограничных широт (см. рис. 1.б) есть

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_{\text{ш.с.}}(\varphi_{\min}) - S_{\text{ш.с.}}(\varphi_{\max}) = 2\pi R^2 \cdot (-\cos(90^\circ - \varphi_{\min}) + \cos(90^\circ - \varphi_{\max})) = \\ &= 2\pi R^2(\sin \varphi_{\max} - \sin \varphi_{\min}), \quad (2 \text{ балла}) \end{aligned} \quad (5)$$

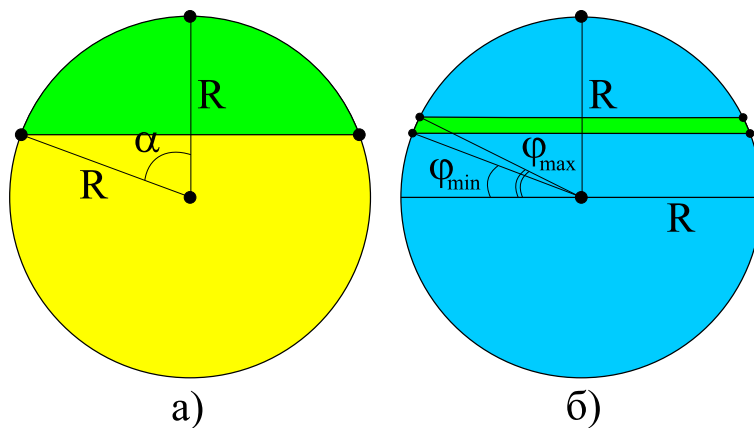


Рис. 1: к определению а) шарового сегмента с углом раствора α , б) полосы искомых широт и доли поверхности Земли.

где $\varphi_{\max} = 51^{\circ}13'$, $\varphi_{\min} = 44^{\circ}00'$. Возможен также приближенный расчет площади узкой полосы на поверхности шара по формуле:

$$\Delta S \approx R \frac{(\varphi_{\max} - \varphi_{\min})\pi}{180^{\circ}} \times 2\pi R \cos\left(\frac{\varphi_{\max} + \varphi_{\min}}{2}\right).$$

Тогда искомая доля есть

$$\eta = \frac{\Delta S}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}(\sin \varphi_{\max} - \sin \varphi_{\min}) = 0.042 \text{ или } 4.2\%. \quad (3 \text{ балла}) \quad (6)$$

Аналогичное значение получается при использовании приближенной формулы для ΔS .

Ответ: к задаче представляется выражением (6).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Определение интервала широт, где Вега является восходящей и заходящей звездой	8
Определение интервала широт, где Капелла является незаходящей звездой	4
Определение интервала широт, где выполняются оба условия задачи	3
Расчет площади поверхности Земли, соответствующей найденному интервалу широт по точной или приближенной формуле	2
Определение искомой доли η	3

№ 2. «Взгляд на систему «Земля-Луна» из окрестностей Красной планеты»

Условие. На рис. 2 представлена фотография системы «Земля-Луна», полученная космическим аппаратом Mars Reconnaissance Orbiter (MRO), пребывающим в окрестности Красной планеты. В какой конфигурации находилась система относительно MRO? В какой конфигурации располагалась Красная планета для земного наблюдателя в этот момент? Оцените с использованием данной фотографии а) расстояние от КА до данной системы (в а.е.) в момент съемки; б) угловые диаметры Земли и Луны в этом положении (в угл. сек.), в) максимально возможное угловое расстояние между телами системы (в угл. мин.) с позиции Красной планеты в этот момент. Следует полагать орбиты всех рассматриваемых планет круговыми и лежащими в одной плоскости.

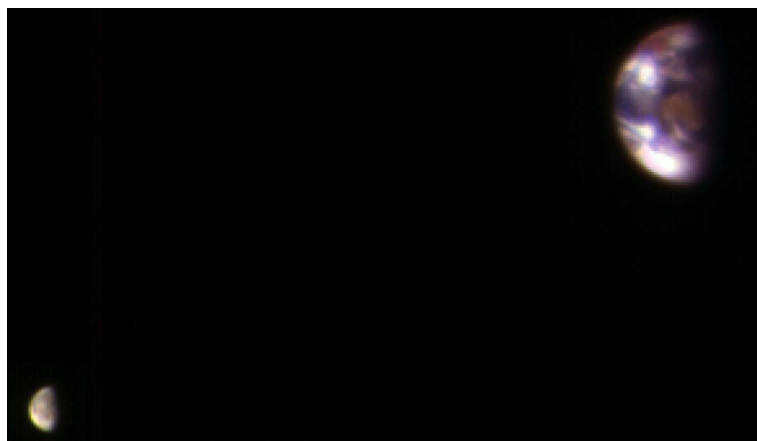


Рис. 2: фотография системы «Земля-Луна», полученная КА MRO.

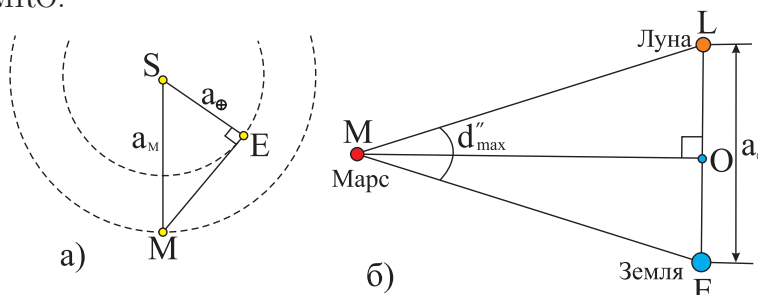


Рис. 3: к определению а) взаимного расположения планет, б) максимального углового расстояния $d''_{\max}$ между телами системы.

Решение.

1. Очевидно, что фазы Земли и Луны близки к 0.5, следовательно фотография получена вблизи их наибольшей элонгации с позиции Красной планеты (MRO) (3 балла). Сказать какая именно элонгация невозможно, поскольку в условиях задачи отсутствует описание условий съемки.

2. С точки зрения земного наблюдателя (см. рис. 3.а) Марс будет находиться в квадратуре (2 балла).

3. Расстояние от АМС до системы "Земля-Луна" есть отрезок ME (здесь точка M определяет положение Марса, E – Земли, S – Солнца). С использованием теоремы Пифагора получаем

$$ME = \Delta = \sqrt{a_M^2 - a_\oplus^2} = 1.150 \text{ а.е.} = 171983016 \text{ км. (3 балла)} \quad (7)$$

4. Определим угловые диаметры Земли и Луны в этой конфигурации:

$$D_\oplus'' = \frac{2\Re_\oplus}{\Delta} \cdot 206265'' = 15.3'', \quad (3 \text{ балла}) \quad D_\zeta'' = \frac{2\Re_\zeta}{\Delta} \cdot 206265'' = 4.2''. \quad (3 \text{ балла}) \quad (8)$$

5. Максимальное угловое расстояние между Луной и Землей будет достигаться, когда большая полуось (радиус) орбиты относительного движения Луны (см. рис. 3.б) будет перпендикулярна направлению на Марс (2 балла). Из данного рисунка следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{d_{\max}}{2} = \frac{a_\zeta}{2\Delta}, \Rightarrow d_{\max} = \frac{a_\zeta}{\Delta} \cdot 206265'' = 461'' = 7.68'. \quad (4 \text{ балла}) \quad (9)$$

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректно определены конфигурации системы «Земля-Луна»+ Марса	3+2
Правильное определение расстояния от КА до данной системы	3
Корректно определены угловые диаметры Земли и Луны в этой конфигурации	3+3
Определение ситуации с максимальным значением $d_{\max}''$ + расчет величины	2+4

№ 3. «Блеск космопоезда Starlink»

Условие. 18 марта 2020 года компания Space X запустила новую серию спутников Starlink-5 на промежуточную, почти круговую околоземную орбиту высотой 300 км и наклоном $i = 53^\circ$. В ночь на 20 марта 2020 года 59 спутников данной серии, расположившись цепочкой на данной орбите, на приблизительно одинаковом расстоянии друг от друга, прошли на минимально возможном расстоянии от зенита г. Самары ($\varphi = 53^\circ 12'$) вблизи местной истинной полуночи. Определите интегральный блеск 59 спутников Starlink-5 в тот момент, когда 30-й спутник прошел через меридиан? В этот момент его звездная величина составила $m_{30} = +3.0^m$, а блеск остальных спутников равномерно возрастал на одну и ту же величину (при переходе между соседними спутниками) в направлении к первому и 59-му спутникам. Блеск последних составил $m_1 = m_{59} = +5.0^m$. Определите также фазовый угол и зенитное расстояние 30-го спутника в этот момент для жителя Самары?

Решение.

1. Определим изменение (шаг) звездной величины при переходе между соседними спутниками:

$$\Delta m_0 = \frac{m_1 - m_{30}}{(N - 1)/2} = 0.0690^m. \quad (2 \text{ балла}) \quad (10)$$

Следовательно, звездная величина $(30 \pm i)$ -го спутника составляет

$$m_{30 \pm i} = m_{30} + i \Delta m_0.$$

Воспользуемся формулой Погсона для освещенности, создаваемой $(30 \pm i)$ -м спутником:

$$\frac{E_{30 \pm i}}{E_{30}} = 10^{-0.4(m_{30 \pm i} - m_{30})}, \Rightarrow E_{30 \pm i} = E_{30} 10^{-0.4 i \Delta m_0}. \quad (2 \text{ балла}) \quad (11)$$

Определим суммарную освещенность, создаваемую всеми ($N = 59$) спутниками у поверхности Земли в указанный момент:

$$E_{\text{tot}} = E_{30} + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} (E_{30-i} + E_{30+i}) = E_{30} \left(1 + 2 \cdot 10^{-0.4 \Delta m_0} \sum_{i=1}^{(N-1)/2} 10^{-0.4(i-1)\Delta m_0} \right). \quad (2 \text{ балла}) \quad (12)$$

Рекомендации для жюри (продолжение).

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильное определение параметров прогрессии в терминах параметров задачи	2
Корректный расчет интегральной звездной величины всех спутников	2
Правильное определение направления распространения солнечного света по отношению к экватору + ориентации орбиты спутников	1+1
Корректный расчет вспомогательного параметра β	2
Корректный расчет фазового угла + зенитного расстояния 30-го спутника	2+2

№ 4. «Где Луна не восходит сутки?»

Условие. Определите значения географической широты точек поверхности Земли, где Луна полностью находится за горизонтом, хотя бы в течение одних средних солнечных суток? В расчетах необходимо учесть конечность размеров видимого диска Луны и атмосферную рефракцию. Орбиту Луны считать круговой.

Решение.

1. Согласно условию задачи необходимо, чтобы в течение как минимум, одних средних солнечных суток Луна находилась под горизонтом. Следовательно, даже в верхней кульминации, с учетом рефракции и конечности угловых размеров ее видимого диска видимая высота верхней точки ее диска должна быть меньше нуля (т.е., $h_{\text{вр}} < 0$) (2 балла).

2. Высота центра видимого диска Луны меньше $h_{\text{вр}}$ на величину $\rho_{\zeta} = 16'$ углового радиуса Луны. Благодаря явлению рефракции центр видимого диска приподнимается у горизонта на величину $\delta z = 35'$, следовательно истинная высота центра диска спутника Земли должна быть

$$h_{\zeta} = h_{\text{вр}} - \rho_{\zeta} - \delta z < -\rho_{\zeta} - \delta z. \quad (2 \text{ балла}) \quad (19)$$

С другой стороны данную высоту в верхней кульминации (к югу от зенита) можно записать так

$$h_{\zeta} = 90^{\circ} - \varphi + \delta_{\zeta} < -\rho_{\zeta} - \delta z, \Rightarrow \varphi > 90^{\circ} + \delta_{\zeta} + \rho_{\zeta} + \delta z. \quad (3 \text{ балла}) \quad (20)$$

Очевидно, нижняя граница для φ определяется минимально возможным значением склонения δ_{ζ} Луны.

3. Определим последний параметр. Для этого рассмотрим рис. 5.а). Чтобы склонение Луны было минимальным, необходимо чтобы Луна в течение этих суток находилась в окрестности точки зимнего солнцестояния (E_W) эклиптики (2 балла), при этом здесь же орбита Луны отстояла от эклиптики на максимальный угол – наклонение орбиты $i_{\zeta} = 5^{\circ}09'$ (2 балла).

Пусть M_1 и M_2 – точки, определяющие положение Луны через одни сутки. Очевидно, эти точки должны располагаться симметрично относительно точки D – самой далекой от экватора точки орбиты Луны южной полушария (при этом ее склонение $\delta_D = -(\varepsilon + i_{\zeta}) = -28^{\circ}35'$). Поскольку орбита Луны круговая, то за одни сутки Луна перемещается по орбите на угол

$$\angle M_1 O M_2 = \alpha = \frac{360^{\circ}}{T_{\zeta}} = 13.18^{\circ}, \quad (2 \text{ балла}) \quad (21)$$

здесь T_{ζ} – сидерический период обращения Луны. Следовательно, точки M_1 и M_2 отстоят от точки D на угол $\alpha/2$. Рассмотрим сферический прямоугольный треугольник $\Delta_S W M_1 Q$ (см. рис. 5.б). Запишем для него формулу синусов (3 балла):

$$\sin(\varepsilon + i_{\zeta}) \cdot \sin\left(90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin|\delta_{\zeta}| \cdot \sin 90^{\circ}, \Rightarrow \sin|\delta_{\zeta}| = \sin(\varepsilon + i_{\zeta}) \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \Rightarrow \delta_{\zeta} = -28^{\circ}23'. \quad (22)$$

Во всех точках дуги $M_1 \overset{\curvearrowright}{DM}_2$ склонение Луны будет еще меньше, и она точно не появится над горизонтом. С использованием (25) и (27) получаем выражение для φ :

$$62^{\circ}28' < \varphi \leq 90^{\circ}. \quad (2 \text{ балла})$$

С учетом южного полушария имеем окончательно:

$$\varphi \in [-90^{\circ}, -62^{\circ}28'] \cup (62^{\circ}28', 90^{\circ}]. \quad (2 \text{ балла}) \quad (23)$$

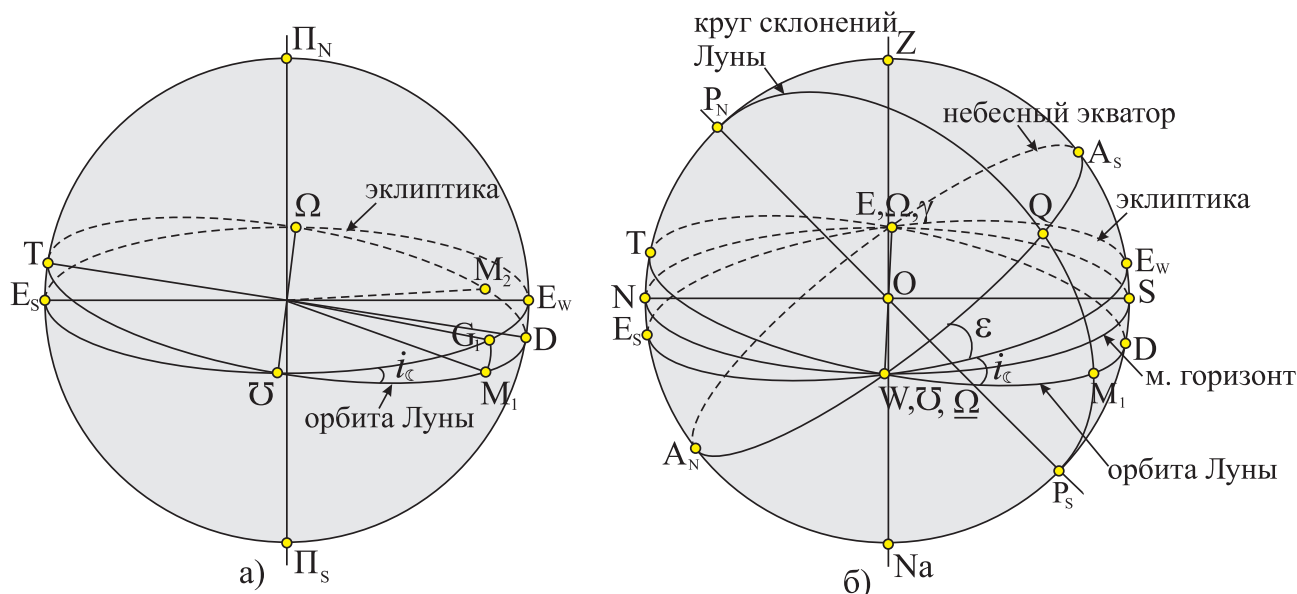


Рис. 5: к определению а) взаимного расположения эклиптики и орбиты Луны, б) положения орбиты Луны по отношению к другим большим кругам.

Ответ: к задаче представляется интервалами (28).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильно сформулированные условия для $h_{\text{ур}} + h_{\text{с}}$	2+2
Корректно сформулированное условие для широты местности (в северном полушарии)	3
Правильно указаны условия для положения Луны + ориентации ее орбиты относительно эклиптики	2+2
Определено среднее движение Луны (α)	2
Корректно рассчитано минимальное значение склонения Луны	3
Правильно определен искомый интервал северных широт (отклонение $\pm 5'$) иначе	2 (1) 0
Учет южных широт и определение полного интервала	2

№ 5. «Вероятность детектирования экзопланеты»

Условие. Вокруг звезды спектрального класса G2 главной последовательности движется по круговой орбите экзопланета с температурой поверхности, равной $T = 350$ К, альбедо $A = 0.47$ и радиусом, подобным радиусу Земли. Оцените вероятность обнаружения такой экзопланеты транзитным методом с Земли в случае длительных наблюдений.

Решение.

1. Рассмотрим систему «звезда-планета» см. рис. 6. Предположим, что земной наблюдатель (в точке G) ведет наблюдения указанной звезды с расстояния, много большего размеров указанной системы. Для того чтобы он мог наблюдать полный транзит экзопланеты по диску материнской звезды необходимо, чтобы планета оказалась "зажатой" между лучами J_1GB_2 и J_2GA_2 , а сам наблюдатель оказался внутри телесного угла с углом раствора $\angle J_1GJ_2 = \beta$.

Для наблюдения частного транзита экзопланеты по диску звезды необходимо, чтобы она была "зажата" между лучами K_1CB_1 и J_1GB_2 или K_2CA_1 и J_2GB_2 , а сам наблюдатель находился внутри телесного угла с углами раствора $\alpha - \beta$. Определим указанные углы. Для определения угла β рассмотрим треугольники $\triangle GSA_2$ и $\triangle GED_2$, которые, очевидно, подобны друг другу (например, по двум одинаковым углам). Из подобия треугольников следует, что

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{ED_2}{EG} = \frac{SA_2}{SG}, \Rightarrow \frac{\Re_p}{x} = \frac{\Re_*}{x + a_p}, \Rightarrow \gamma = \frac{\Re_p}{\Re_*} = \frac{x}{x + a_p}, \Rightarrow$$

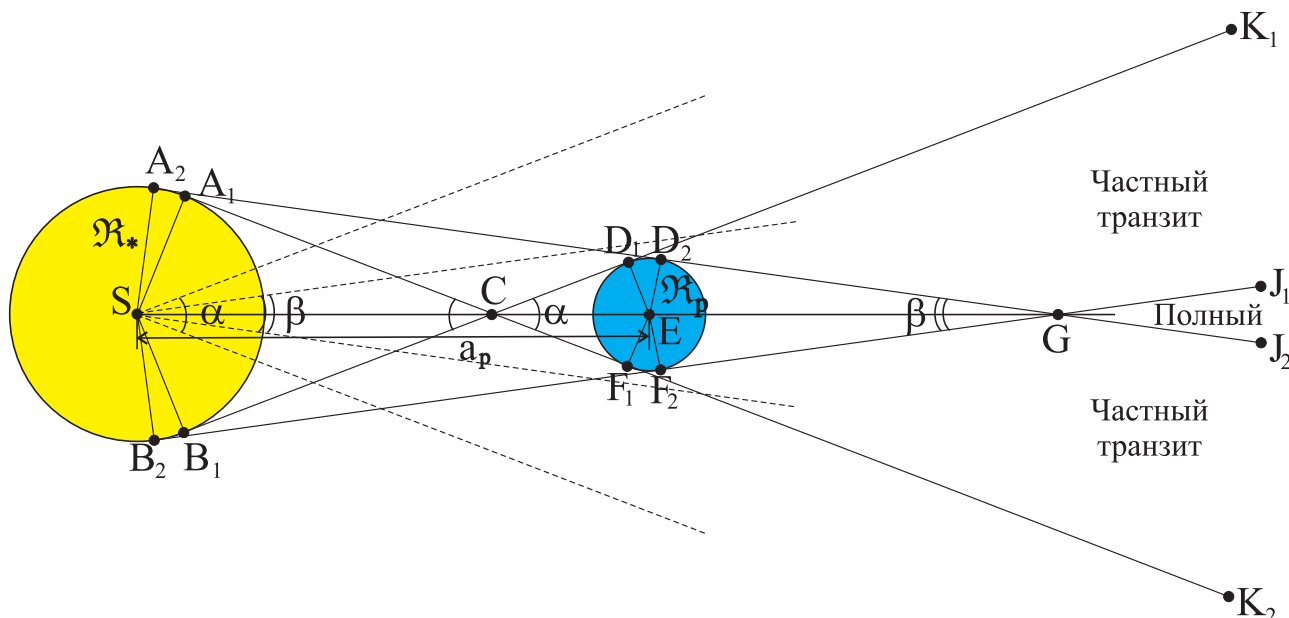


Рис. 6: к определению телесных углов полного и частного транзита Земли по диску Солнца.

$$x = \frac{\gamma a_p}{1 - \gamma}, \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2} = \frac{R_*}{a_p}(1 - \gamma), \Rightarrow \beta = \frac{2R_*}{a_p}(1 - \gamma). \quad (24) \quad (2 \text{ балла})$$

Далее заметим, что также как и Солнце, эта звезда относится к спектральному классу G2 и главной последовательности, следовательно, ее характеристики должны быть подобными характеристикам Солнца: тогда $R_* \approx R_\odot = 695500 \text{ км}$ – радиус Солнца, при этом $R_p \approx R_\oplus = 6371 \text{ км}$ – радиус Земли. Тогда $\gamma \approx 9 \cdot 10^{-3} \ll 1$, поэтому последним слагаемым в скобках (24) можно пренебречь. В итоге $\beta \approx 2R_*/a_p$ (2 балла).

Аналогично рассуждая, можно получить явное выражение для угла α :

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} = \frac{R_*}{a_p}(1 + \gamma), \Rightarrow \alpha \approx \frac{2R_*}{a_p}.$$

Т.о., в низшем приближении углы полного и полного+частного транзитов совпадают! Поэтому далее будем говорить лишь о полном транзите (2 балла).

2. Область полного транзита экзопланеты по диску материнской звезды представляет собой узкую полосу ширины β , которой соответствует телесный угол Ω_{tot} (см. рис. 7), представляющийся в виде:

$$\Omega_{\text{tot}} \approx 2\pi \beta = \frac{4\pi R_*}{a_p}. \quad (25) \quad (3 \text{ балла})$$

3. Тогда вероятность (P) обнаружения такой экзопланеты транзитным методом с Земли в случае длительных наблюдений можно определить отношением телесного угла Ω_{tot} , отвечающего области на небесной сфере (если смотреть из центра звезды), из точек которой можно будет наблюдать указанный феномен к полному телесному углу всей сферы (равному 4π):

$$P = \frac{\Omega_{\text{tot}}}{4\pi} = \frac{R_*}{a_p}. \quad (26) \quad (3 \text{ балла})$$

Т.о., для определения искомой вероятности необходимо определить отношение R_*/a_p .

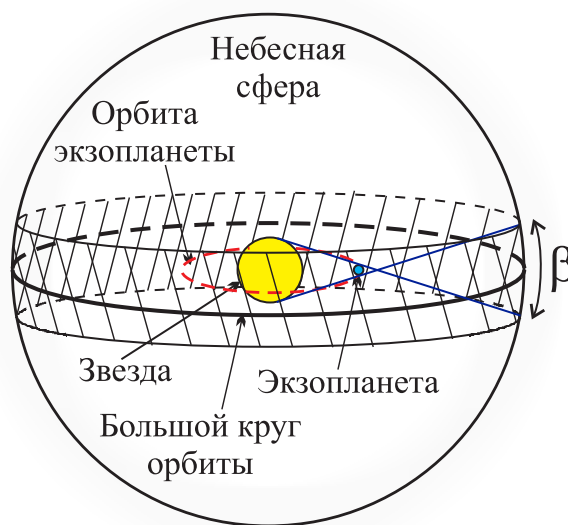


Рис. 7: к определению телесного угла, соответствующего части небесной сферы, с которой можно наблюдать (полный) транзит экзопланеты по диску звезды.

4. Далее определим полный поток, который приходит от звезды и падает на экзопланету:

$$\Phi_{\text{fall}} = \frac{L_*}{4\pi a_p^2} \pi \mathfrak{R}_p^2, \text{ где } L_* = 4\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_*^4, \quad (1 \text{ балл}) \quad (27)$$

здесь L_*, T_* – светимость и эффективная температура поверхности звезды. Часть этого потока поглощается

$$\Phi_{\text{abs}} = (1 - A_p) \Phi_{\text{fall}}. \quad (1 \text{ балл}) \quad (28)$$

С другой стороны, экзопланета со своей поверхности излучает поток:

$$\Phi_{\text{rad}} = 4\pi \mathfrak{R}_p^2 \sigma T_p^4. \quad (1 \text{ балл}) \quad (29)$$

В состоянии термодинамического равновесия: $\Phi_{\text{abs}} = \Phi_{\text{rad}}$, тогда

$$(1 - A_p) \frac{4\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_*^4}{4\pi a_p^2} \pi \mathfrak{R}_p^2 = 4\pi \mathfrak{R}_p^2 \sigma T_p^4, \Rightarrow \frac{\mathfrak{R}_*}{a_p} = \frac{2}{\sqrt{1 - A_p}} \left(\frac{T_p}{T_*} \right)^2. \quad (3 \text{ балла}) \quad (30)$$

5. Из выражений (26) и (30) следует окончательное выражение для вероятности детектирования транзита в виде:

$$P = \frac{2}{\sqrt{1 - A_p}} \left(\frac{T_p}{T_*} \right)^2 = 0.01 = 1\%, \quad (2 \text{ балла}) \quad (31)$$

здесь учтено, что $T_* = T_{\oplus} = 5800 \text{ K}$.

Ответ: к задаче представляется выражением (31).

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Корректное выражение для угла β полного транзита	6
Определение телесного угла Ω_{tot}	3
Определение вероятности в виде отношения (26)	3
Корректный расчет отношения $\mathfrak{R}_*/a_p$ в терминах термодинамических параметров	6
Построение итогового выражения для P и численный расчет	2

№ 6. «Сатурн и его спутник»

На рис. 8 представлена фотография Сатурна и его спутника (обладающего атмосферой, более плотной чем земная), которая получена автоматической межпланетной станцией (АМС) «Кассини». Какой именно спутник Сатурна изображен на фото? Определите по фотографии: а) угол падения солнечного света на кольца Сатурна, если экваториальный и полярный радиусы Сатурна равны $\mathfrak{R}_e = 60268 \text{ км}$, $\mathfrak{R}_p = 54364 \text{ км}$, а внутренний радиус кольца $C - r = 74500 \text{ км}$; б) значения ширины колец А, В, С планеты, тени от которых отчетливо видны на диске планеты, в) ширину щели Кассини между кольцами А и В, г) расстояние от центра планеты до АМС на момент съемки.

Решение.

1. На фото запечатлен Титан – крупнейший спутник Сатурна, обладающий плотной атмосферой (2 балла).

2. Заметим далее, что на фото фаза Сатурна больше $1/2$. Следовательно, угол (фазовый) между направлением на Солнце и на АМС в момент съемки, если смотреть из центра планеты, меньше 90° . Если внимательно рассмотреть тени колец, то можно заметить, что их ширина наиболее узкая и почти плоская непосредственно под Титаном. Следовательно, свет падает по прямой "Титан – центр Сатурна" (2 балла).

3. Как известно, плоскости колец всех классических планет лежат в экваториальной плоскости материнской планеты. Кольца планеты на фотографии видны с ребра, значит в момент съемки АМС пересекала экваториальную плоскость Сатурна (1 балл).

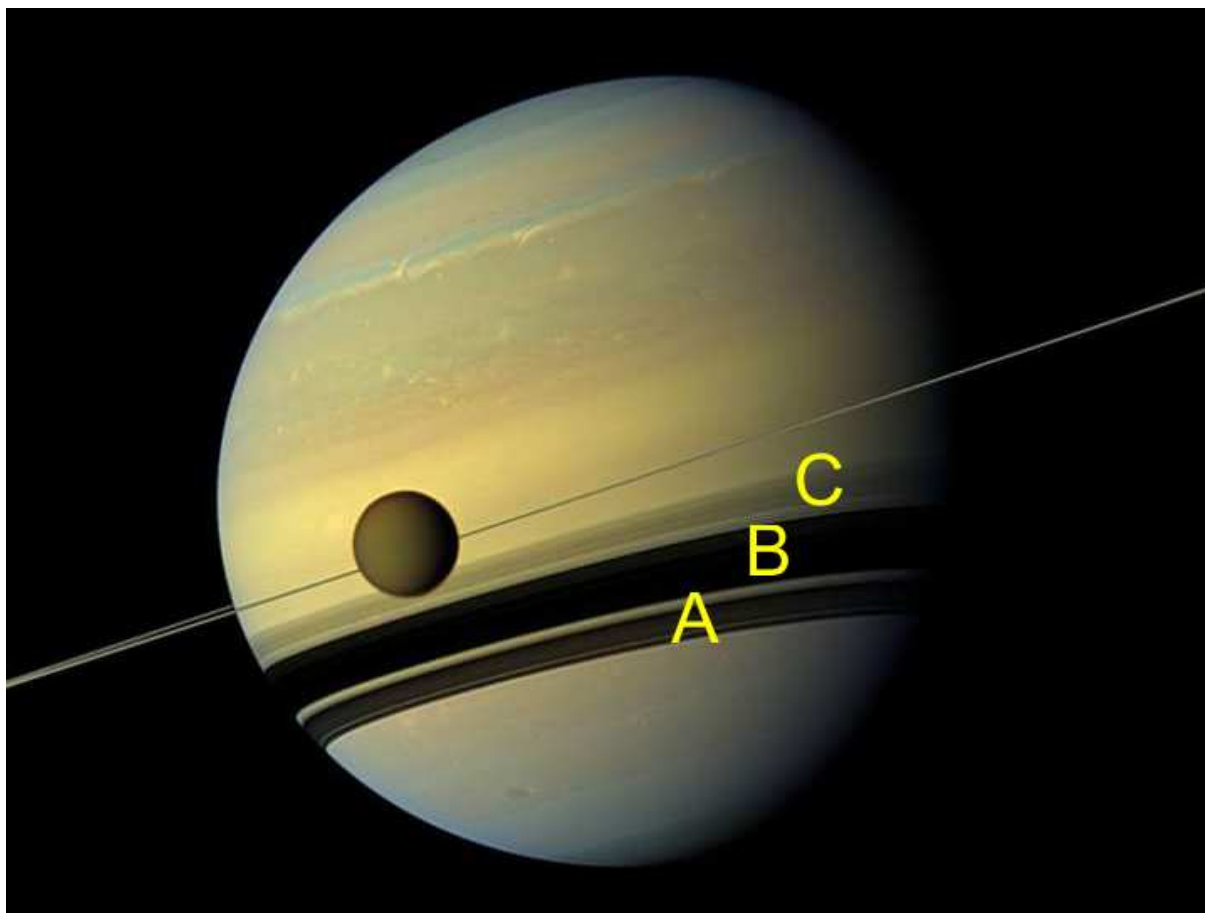


Рис. 8: фотография Сатурна и его спутника, полученная с борта АМС "Кассини".

4. По фотографии определим ее линейный масштаб. Для этого измерим полярный радиус Сатурна – $R_{\text{п}}=45$ мм (здесь и далее Ваши значения могут отличаться от указанных при использовании фотографии в ином масштабе!), тогда искомый линейный масштаб снимка

$$\mu_{\ell} = \frac{\mathfrak{R}_p}{R_{\text{п}}} = 1208 \text{ км/мм.} \quad (32)$$

Определим по фотографии (см. рис. 8) расстояние $h=3$ мм от плоскости колец до верхней границы тени кольца C в окрестности Титана. Этому значению соответствует высота H_C (согласно рис. 9):

$$H_C = \mu_{\ell} \cdot h = 3624 \text{ км.} \quad (33)$$

Согласно рис. 9, из $\triangle DEF$, следует явное выражения для угла падения световых лучей на кольца:

$$\text{ctg } \alpha = \frac{H}{r - \mathfrak{R}_e} = 0.255, \Rightarrow \alpha = 75.7^\circ. \text{ (3 балла)} \quad (34)$$

5. Рассмотрим $\triangle JHG$, здесь HG – истинная ширина тени от кольца A . Применим к нему теорему синусов:

$$\frac{JH}{\sin \angle G} = \frac{HG}{\sin \angle J}, \Rightarrow JH = \frac{\sin \angle G}{\sin \angle J} HG. \quad (35)$$

Поскольку АМС снимала с большого расстояния систему "Сатурн", то на ее кадре запечатлена проекция тени HK на картинную плоскость. Поскольку в пустоте свет распространяется прямолинейно, то, очевидно, $JH = \Delta R_A$ – ширина кольца A . Отрезок HK можно связать с истинной шириной тени HG через соотношение

$$HK = HG \cdot \cos \beta, \quad (36)$$

здесь β – планетоцентрическая широта середины геометрической тени на поверхности планеты. Угол $\angle J$ в $\triangle JHG$ есть $90^\circ - \alpha$, а угол $\angle G$:

$$\angle G = 180^\circ - \angle J - \angle H = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ + \beta) = \alpha - \beta. \quad (37)$$

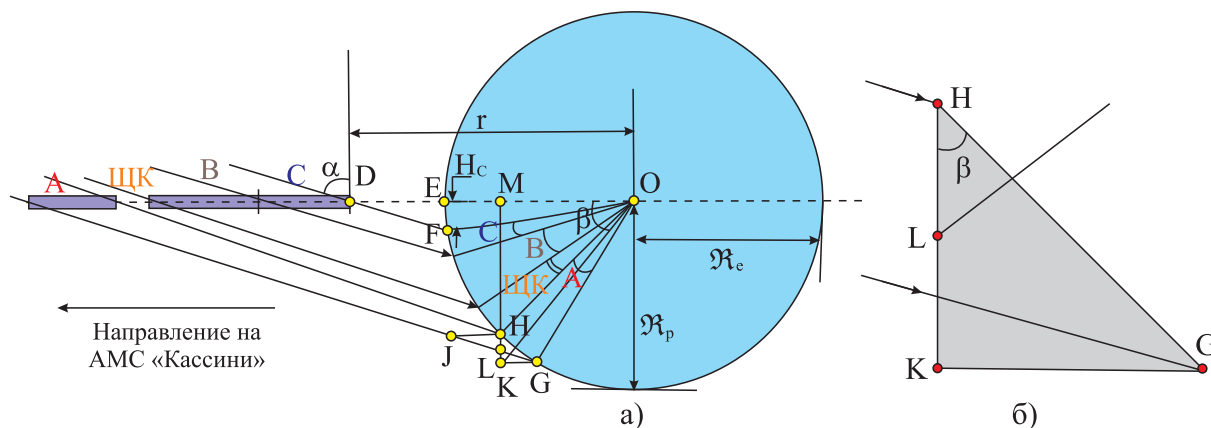


Рис. 9: к определению положений теней колец и их размеров.

Из (35)-(37) следует, что

$$\Delta R_A = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} \cdot \frac{HK}{\cos \beta} = \Delta r_A (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta), \quad (38)$$

здесь Δr_A – ширина тени кольца, определяемая по рис. 9 в км. Из ΔLMO находим

$$\sin \beta = \frac{LM}{\Re_S} = \frac{H_A}{\Re_S}, \quad \Re_S = \frac{\Re_e + \Re_p}{2}, \quad (39)$$

здесь $H_A = LM$ – расстояние от плоскости колец (экваториальной) до тени кольца A в км, $\Re_S$ – средний радиус планеты, определенный через экваториальный $\Re_e$ и полярный $\Re_p$ радиусы планеты. Тогда

$$\Delta R_A = \Delta r_A \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{H_A}{\sqrt{\Re_S^2 - H_A^2}} \right) = \mu_\ell \Delta r'_A \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{\mu_\ell H'_A}{\sqrt{\Re_S^2 - (\mu_\ell H'_A)^2}} \right), \quad (5 \text{ баллов}) \quad (40)$$

здесь $\Delta r'_A, H'_A$ – ширина кольца A Сатурна и его расстояние от плоскости экватора планеты (в окрестности Титана), определенные по фотографии в мм. Аналогичные рассуждения справедливы в случае других колец и щели Кассини. Численные результаты измерений представлены в табл. 1.

Поскольку погрешность измерения линейкой составляет 1 мм, что соответствует величине 1208 км, то в пределах ошибки полученные значения (шестой столбец в табл. 1) уверенно согласуются с наиболее точными оценками, полученными профессионалами (седьмой столбец в табл. 1).

6. Определим расстояние до центра планеты. Заметим, что Титан, Сатурн и АМС фактически расположены на одной прямой. Следовательно, Титан ближе расположен к АМС на величину $a_T = 1221850$ км – большая полуось орбиты Титана. Определим диаметр Титана по фотографии $D_T = 7$ мм на поверхности Сатурна этому значению соответствует величина $x = D_T \cdot \mu = 8456$ км. С другой стороны с расстояния $\Delta - a_T$ под таким углом виден диаметр Титана $D_T = 5150$ км. Следовательно, можно составить пропорцию для равных углов с точки зрения АМС:

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{D_T}{\Delta - a_T}, \Rightarrow \Delta = \frac{a_T \cdot x}{x - D_T} = 3.125 \cdot 10^6 \text{ км.} \quad (3 \text{ балла}) \quad (41)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (34), (40), (41); табл. 1, Титан.

Объект	H' , мм	H , км	$\Delta r'$, мм	Δr , км	$\Delta R_{\text{наш}}$, км	$\Delta R_{\text{про}}$, км
Кольцо А	15	18120	3.5	3624	15178	14600
Кольцо В	10	12080	5.5	6644	24632	25500
Кольцо С	5	6040	4.0	4832	18444	17500
Щель Кассини	12	14496	1.0	1812	4423	4700

Таблица 1: численные значения, измеряемых по рис. 8 геометрических параметров колец и щели Кассини, а также вычисленные значения их ширины. (4 балла)

Рекомендации для жюри.

Выполненная часть решения задачи	Балл
Правильно назван спутник Сатурна (Титан)	2
Корректно определено направление распространения света	2
Правильно сделан вывод о положении АМС в момент съемки относительно плоскости колец (экваториальной плоскости)	1
Корректный расчет угла падения света на кольца (при отклонении $> 1^\circ$, $> 3^\circ$, $> 5^\circ$)	3 (2, 1, 0)
Корректный вывод формулы для ширины кольца	5
Численный расчет значений ширины колец А,Б,С и щели Кассини (при выпадении из окна шириной ± 1208 км -не зачет!)	4 (0)
Правильное определение расстояния от АМС до центра планеты (при отклонении $> \pm 10^5$ км, $> \pm 2 \cdot 10^5$ км, $> \pm 3 \cdot 10^5$ км)	3 (2, 1, 0)

На решение задач данного этапа Олимпиады участникам отводится 4 часа.

Основные справочные данные

§1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Световой год – $1 \text{ св. г.} = 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

§2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Интегральный поток энергии на расстоянии Земли – 1360 Вт/м^2
- Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

§3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$
- Экваториальный радиус – 6378.14 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

§4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут

- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или 1/81.3 массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли	$\text{г}\cdot\text{см}^{-3}$		градусы		
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	–0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

[†] – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.