

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2020
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ.
ТУР № 1



Самара, 2020 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 18 оригинальных задач трех уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В) и «Профи» (уровень С). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 8-9 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2020 среди обучающихся 8-9 классов. Тур № 1». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/solutions>

Автор задач – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СДДЮТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе $\text{\LaTeX}$ – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника SamRAS-2020

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

<http://vk.com/samrasolimp>

3. Сроки подачи работ SamRAS-2020 тура № 1 на проверку:

15.10.2019-15.01.2020!!!

4. Электронный ящик SamRAS-2020:

samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2020:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

https://vk.com/doc-57032141_451699934

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2020, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2020»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника**.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Полностью незаходящие созвездия г. Самары»

Какие созвездия являются полностью незаходящими за горизонт в г. Самаре, если широта города составляет $\varphi = 53^\circ 12'$? (1 балл за каждое созвездие).

Задача № 2. «Отсутствие восходящих и заходящих светил»

В каких точках поверхности Земли не существует восходящих и заходящих небесных тел? Чему здесь равны а) зенитное расстояние ближайшего к зениту полюса мира, б) высота ближайшего к зениту полюса эклиптики? (3 балла).



Задача № 3. «Спутник с самой плотной атмосферой»

Спутник какой классической планеты обладает самой плотной атмосферой? Чему равно атмосферное давление у его поверхности? Какие химические соединения являются ее главными составляющими? (3 балла).

Задача № 4. «Фотография с просторов Рунета»

На одном из сайтов астрономической направленности появилась фотография неизвестного автора, представленная на рис. 1. При каких условиях эта

Рис. 1: фотография с просторов Рунета (автор не известен).

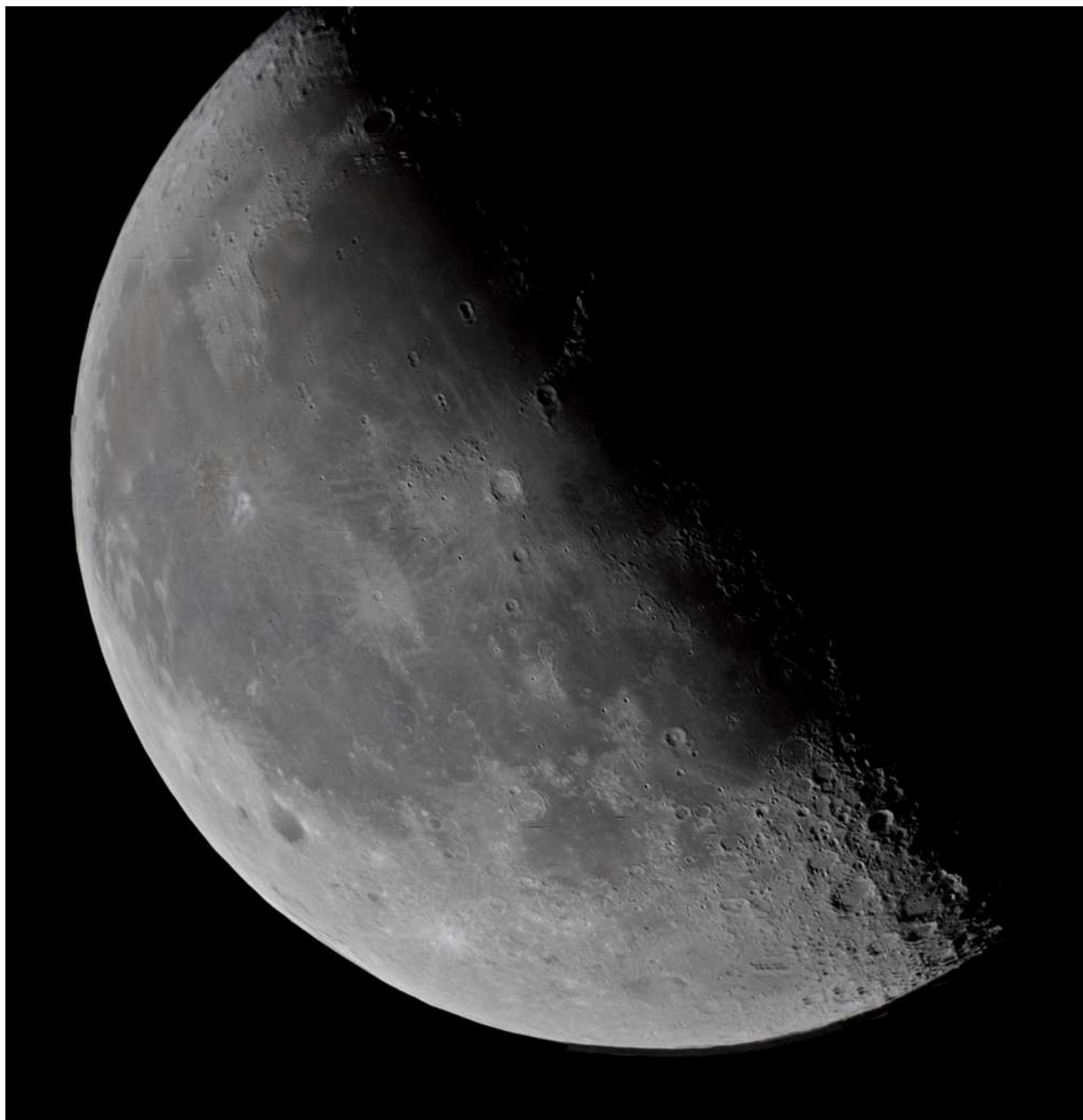


Рис. 2: фотография Луны (автор – Филиппов Ю.П.).

фотография могла быть получена? Свой ответ поясните. (4 балла).

Задача № 5. «Луна и кратер Коперник»

На рис. 2 представлена фотография Луны с достопримечательностями ее рельефа. Определите в а) какой фазе была получена фотография, если нижняя кромка кадра в момент съемки была параллельна горизонту, а изображение является прямым? б) в какое время суток была получена эта фотография? в) оцените по фотографии диаметр кратера Коперник? (4 балла).

Задача № 6. «Луна, Венера и их световые потоки»

Как известно, Луна в полнолуние имеет звездную величину $m_{\text{л}} = -12.7^{\text{m}}$, а Венера – в наибольшей элонгации $m_{\text{в}} = -4.7^{\text{m}}$. Какое количество таких планет как Венера, смогут создать световой поток, равный потоку света от полной Луны? (5 баллов).

№	Название	m	δ	α
1	Денебола (β Льва)	+2.14	+14°34'19"	11 ^h 49 ^m 03 ^s
2	Фомальгаут (α Южной Рыбы)	+1,16	−29°37'20"	22 ^h 57 ^m 39 ^s
3	Спика (α Девы)	+1.04	−11°09'41"	13 ^h 25 ^m 12 ^s
4	Антарес (α Скорпиона)	+0.91	−26°25'55"	16 ^h 29 ^m 24 ^s
5	Мирах (β Андромеды)	+2.07	+35°37'14"	01 ^h 09 ^m 43.9 ^s

Примечание: здесь m - видимая звездная величина звезды, δ , α – ее склонение и прямое восхождение.

Таблица 1: Примечательные звезды небосвода и их некоторые свойства.

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Солнечное затмение и корона Солнца»

На рис. 3 представлена фотография полного солнечного затмения, полученная 2 июля 2019 года. На фотографии отчетливо просматривается внешняя часть атмосферы Солнца, корона. Определите по данной фотографии: 1) степень солнечной активности на момент съемки, 2) положение солнечного экватора (укажите его положение на бумажной копии фотографии), 3) положение оси вращения Солнца (укажите ее положение там же). Свой ответ обоснуйте. (6 баллов).



Задача № 8. «Примечательные звезды небосвода и их некоторые свойства»

Вашему вниманию представлен список некоторых примечательных звезд небосвода (см. табл. 1). Определите, какая из указанных звезд

Рис. 3: фотография солнечного затмения, произошедшего 2 июля 2019 года (автор – Александр Обухов).

1. Самая яркая? Самая тусклая? (1 балл)
2. Принадлежит северной, а какая – южной полусфере? (1 балл)
3. Дальше других находится над горизонтом в г. Самаре ($\varphi_S = 53^\circ 12'$)? (1 балла)
4. Первой взойдет после восхода точки весеннего равноденствия? (1 балл)
5. Последней взойдет после восхода точки весеннего равноденствия? (1 балл)
6. Какие из указанных звезд не видны, в принципе, в г. Самаре? (2 балла)

Задача № 9. «Метеороиды, упавшие на Землю»

Как известно, масса метеоритного вещества, выпадающего ежесуточно на поверхность Земли, составляет около 100 тонн. Согласно современным оценкам, до Земли долетает лишь 1% от всей массы метеороидов, с которыми встречается наша планета. Определите массу метеороидного вещества, которое ежесуточно выпадало бы на Землю, если бы у нашей планеты не было атмосферы? Оцените толщину слоя этой массы вещества, если его равномерно распределить по поверхности планеты? Следует полагать его среднюю массовую плотность равной плотности свободного реголита Луны – $\rho_p = 0.8 \text{ г/см}^3$. (8 баллов).

Задача № 10. «Либрации Луны и взгляд за горизонт»

Как известно, Луна в своем орбитальном движении вокруг Земли испытывает покачивания, называемые *либрациями*. Выделяют 4 вида либраций: а) *либрацию по долготы*, имеет амплитуду $A_1 = 7^\circ 54'$, 2) *либрацию по широте* с амплитудой $A_2 = 6^\circ 50'$, 3) *суточную либрацию* с амплитудой $A_3 = 57'$ и 4) *физическую либрацию* с амплитудой $A_4 = 2'$. Чем обусловлен каждый вид либрации? Определите для каждого вида либрации долю той части поверхности спутника, которую мы способны увидеть с Земли лишь благодаря этому виду либрации? (8 баллов).

Задача № 11. «"Цифровой" масштаб фотографии»

Определите "цифровой" масштаб фотографии Луны (км на пиксель матрицы), полученной с помощью оптической системы, включающей в себя телескоп с фокусным расстоянием 1250 мм, диаметром 90 мм, и фотоаппарата с матрицей $N = 18 \text{ Мп}$, и кроп-фактором 1.6. (9 баллов).

Задача № 12. «Метеороиды, упавшие на Луну»

Опираясь на данные и результаты задачи № 9 настоящего релиза и полагая, что все возможные направления движения спорадических метеороидов в околоземном пространстве являются равновероятными, определите массу метеороидного вещества, выпадающего на поверхность Луны за один тропический год. Определите соответствующую толщину метеороидного вещества, если его равномерно распределить по поверхности спутника? (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)**Задача № 13. «ИВЗ для геоцентрического расстояния до центра масс системы "Земля-Луна"»**

С использованием справочных данных, представленных в приложении, определите интервал возможных значений (ИВЗ) для расстояния, определенного от центра масс системы «Земля-Луна» до центра Земли? (11 баллов).

Задача № 14. «ИВЗ для скорости центра Земли»

С использованием справочных данных и результатов решения предыдущей задачи, определите интервал возможных значений (ИВЗ) для орбитальной скорости центра масс Земли, относительно центра масс системы «Земля-Луна»? (12 баллов).

Задача № 15. «Объем и масса водяного льда в лунном кратере»

Предположим, что на селеноцентрической широте φ (аналог географической широты) поверхности Луны наблюдается кратер, имеющий форму параллелепипеда (это всего лишь упрощение для вычислений) с квадратным основанием, с размерами $a \times a$ и глубиной H . Определите, долю χ объема этого кратера, как функцию широты φ , в которую не будут попадать лучи солнечного света в момент верхней кульминации центрального светила. Считая, что в этой "области тени" может присутствовать водяной лед, оцените максимальную возможную массу $M_{\max}^{(\text{ice})}$ запасов водяного льда в данном кратере, как функцию широты φ . Постройте график зависимости $M_{\max}^{(\text{ice})}(\varphi)$ для кратера с размерами $a = 1$ км, $H = 0.3$ км и массовой плотностью льда $\rho_{\text{ice}} = 920$ кг/м³. Для каких значений φ данная функция достигает максимума? Чему равно соответствующее значение? (13 баллов).

Задача № 16. «Рефракция света и изменения статуса звезды»

Как известно, атмосферная рефракция света порождает множество интересных астрономических феноменов. Рассмотрим один из них. Некоторая звезда наблюдается в некотором пункте поверхности Земли. Именно благодаря рефракции она оказалась незаходящей в данном месте, а могла быть невозходящей, если бы не было атмосферы. На каких географических широтах возможен такой необычный феномен? Следует полагать, что угол рефракции достигает максимального значения у горизонта и составляет $\delta z = 35'$. (13 баллов).

Задача № 17. «Спутник связи в зените Самары»

Для обеспечения бесперебойной связи г. Самары с другими городами мира была предложена модель запуска искусственного спутника Земли, который находился бы максимально возможное время вблизи зенита г. Самары ($\varphi_S = 53^\circ 12'$). Какой должна быть орбита этого спутника? (14 баллов).

Задача № 18. «Аналемма и годичное движение Солнца»

На рис. 4 представлена **аналемма** – последовательность положений Солнца над горизонтом, зафиксированных в одном и том же месте наблюдения, в одно и тоже время суток, в течение года. Здесь указано положение математического горизонта. С использованием данной фотографии, определите:

1. Момент времени суток, в который производилась съемка (1 балл);
2. Положение небесного экватора (указать на бумажной копии фотогра-



Рис. 4: Аналемма (автор – Soronyai Gyorgy, 2018-2019).

- фии) (1 балл);
3. Угловой масштаб фотографии (2 балла);
 4. Причину асимметрии аналеммы. Не прибегая к расчетам, определите полушарие, из которого была выполнена съемка (2 балла);

5. Широту места съемки (3 балла);
 6. Минимальную и максимальную высоту Солнца в данном месте над горизонтом (2 балла);
 7. Направление годичного перемещения Солнца вдоль аналеммы (2 балла);
 8. Даты, в которые Солнце прошло "узел восьмерки" (2 балла).
-
-

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Полностью незаходящие созвездия г. Самары»

Решение. С использованием карты звездного неба или виртуального компьютерного планетария (например, Stellarium) легко убедиться в том, что существует всего пять созвездий, полностью располагающихся над горизонтом в течении суток: Малая Медведица, Дракон, Цефей, Кассиопея, Жираф.

Ответ: Малая Медведица, Дракон, Цефей, Кассиопея, Жираф. (5 баллов).

Задача № 2. «Отсутствие восходящих и заходящих светил»

Решение. Если в каком-либо месте поверхности Земли не существует восходящих и заходящих светил, значит, здесь могут быть лишь незаходящие и невосходящие светила.

Следовательно, их суточные параллели должны быть параллельны горизонту, значит в этих точках поверхности Земли небесный экватор должен совпадать с горизонтом, а отвесная линия с осью мира. Тогда в зените должен находиться один из полюсов мира и его высота равна 90° , тогда по теореме о связи географических координат имеем

$$|\varphi| = h_P = 90^\circ, \Rightarrow \varphi = \pm 90^\circ. \quad (1)$$

Т.е., широта этих точек равна $\pm 90^\circ$, значит, речь идет о географических полюсах.

Зенитное расстояние ближайшего к зениту полюса мира будет равно нулю (ибо они совпадают!). Как известно, полюс эклиптики отстоит от ближайшего полюса мира на угол $\varepsilon = 23^\circ 26'$, что в данном случае есть также зенитное расстояние, т.е. $z = \varepsilon$, тогда высота будет равна

$$h_{\Pi} = 90^\circ - z = 90^\circ - \varepsilon = 66^\circ 34'. \quad (2)$$

Ответ: геополюса, ($\varphi = \pm 90^\circ$); $z_p = 0^\circ$, $h_{\Pi} = 66^\circ 34'$. (3 балла).

Задача № 3. «Спутник с самой плотной атмосферой»

Решение. Среди спутников всех классических планет самой плотной атмосферой обладает Титан – самый крупный спутник Сатурна. Согласно данным наблюдений, давление у его поверхности составляет 146.7 кПа. Основными химическими соединениями атмосферы являются азот (N_2 , 98.4%), метан (CH_4 , 1.6%). (3 балла).

Задача № 4. «Фотография с просторов Рунета»

Решение. На данной фотографии на одной отвесной линии располагаются полный диск Солнца и Луны. Полный диск Луны можно наблюдать лишь в полнолунии, когда Луна располагается в стороне, противоположной Солнцу, относительно земного наблюдателя. Следовательно, данную фотографию

невозможно получить в принципе, это лишь коллаж – результат манипуляций графическими образами небесных тел в рамках какой-либо графической программы, по усмотрению автора.

Ответ: такую фотографию невозможно получить в принципе, это лишь коллаж. (4 балла).

Задача № 5. «Луна и кратер Коперник»

Решение. а. Данная фотография была получена в фазе третьей четверти, поскольку изображение является прямым.

б. Наблюдать Луну в третьей четверти можно с полуночи и до рассвета.

в. Для оценки диаметра кратера Коперник, который располагается по середине кадра, определим с помощью линейки его диаметр $d_k = 9$ мм, а затем измерим диаметр диска Луны $d_\zeta = 324$ мм (Ваши значения могут отличаться от указанных, при использовании фотографии в ином масштабе).

Отношение размеров данных объектов на фотографии равно отношению их действительных размеров, т.е.

$$\frac{d_k}{d_\zeta} = \frac{D_k}{D_\zeta}, \Rightarrow D_k = D_\zeta \left(\frac{d_k}{d_\zeta} \right) = 96.6 \text{ км}, \quad (3)$$

здесь $D_\zeta = 3476$ км – диаметр Луны, согласно справочным данным. Полученный результат (3) близок к точной оценке (96.1 км) профессионалов.

Ответ: а) в последней четверти; б) с полуночи и до рассвета; в) $D_k = 96.6$ км. (4 балла).

Задача № 6. «Луна, Венера и их световые потоки»

Дано:	Решение:
$m_\zeta = -12.7^m$, $m_\varphi = -4.7^m$.	Как известно, световой поток определяется как
Найти:	
$N = ?$	$\Phi = E S_0, \quad (4)$

здесь E – освещенность, создаваемая небесным телом на площадке величины S_0 (например, на сетчатке глаза наблюдателя).

Пусть E_φ – освещенность, создаваемая Венерой на данной площадке, тогда освещенность, создаваемая Луной, есть

$$E_\zeta = N E_\varphi. \quad (5)$$

Тогда отношение потоков света от данных тел есть

$$\frac{\Phi_\zeta}{\Phi_\varphi} = \frac{E_\zeta}{E_\varphi} = N = 2.512^{(m_\varphi - m_\zeta)} = 2.512^8 = 1585. \quad (6)$$

При вычислении последнего результата была использована формула Погсона.

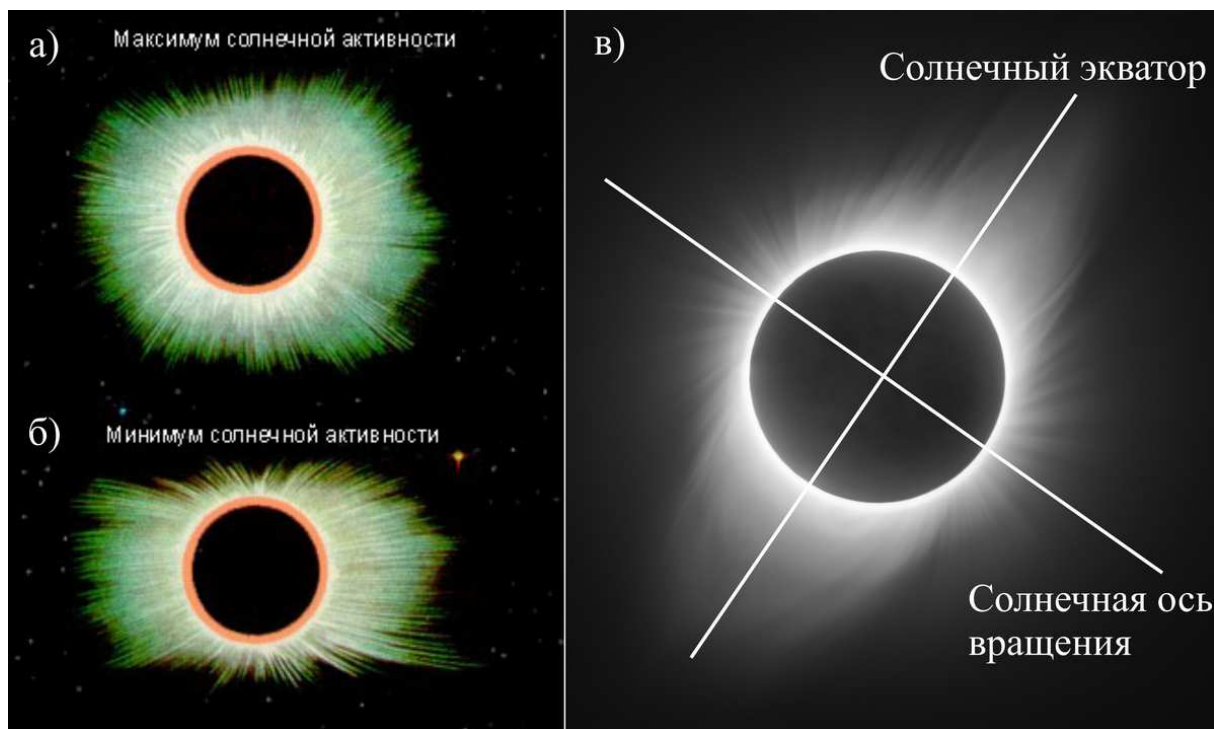


Рис. 5: к определению внешнего вида короны Солнца в момент а) минимума солнечной активности, б) максимума солнечной активности; в) положения экватора и оси вращения Солнца в момент съемки.

Ответ: к задаче представляется выражением (6). (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Солнечное затмение и корона Солнца»

Решение. На рисунке 5.а) представлено корона Солнца в момент солнечного затмения, в максимуме солнечной активности, а на рис.1.б) – в минимуме активности. Очевидно, что в случае максимума активности корона имеет аксиально симметричную форму относительно центра диска Солнца. В случае минимума – наибольшая протяженность короны достигается вдоль солнечного экватора, а наименьшая вдоль его оси вращения. Из сопоставления 5.а)-б) и 3 следует, что автор фотографии запечатлел Солнце в момент минимума солнечной активности, а положение экватора и оси вращения Солнца указаны на рис. 5.в).

Ответ: 1) минимум солнечной активности; б)-в) - указаны на рис. 5.в). (6 баллов).

Задача № 8. «Примечательные звезды небосвода и их некоторые свойства»

Решение.

1. Самой яркой звездой из списка является Антарес, поскольку его блеск минимален ($+0.91^m$); самой тусклой является Денебола, поскольку ее блеск максимален ($+2.14^m$).

2. Северной полусфере принадлежат Денебола и Мирах, поскольку их

склонения положительны. Оставшиеся звезды (Фомальгаут, Спика, Антарес) принадлежат южной полусфере, поскольку их склонения отрицательны.

3. Дольше других над горизонтом г. Самары находится та звезда, у которой наибольшее положительное скопление, т.е. – это Мирах.

4. Первой взойдет после точки весны та звезда, у которой прямое восхождение ближе других к нулю, поскольку прямое восхождение точки весны равно нулю. Т.е., и в этом случае – это Мирах.

5. В данном случае, ситуация противоположная предыдущей, когда необходимо выбрать звезду с наибольшим прямым восхождением – это Фомальгаут.

6. Невосходящими в городе Самаре являются те звезды, у которых высота в верхней кульминации (к югу от зенита) меньше нуля, т.е.

$$h_* = 90^\circ - \varphi + \delta < 0, \quad \delta < \varphi - 90^\circ, \Rightarrow \delta < -36^\circ 48'. \quad (7)$$

Однако, среди представленных звезд нет таких, склонение которых удовлетворяло бы условию (7). Т.о, все указанные звезды видны в принципе, с территории г. Самары. (7 баллов).

Задача № 9. «Метеороиды, упавшие на Землю»

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$m_0 = 10^5 \text{ кг},$ $\eta = 1\% = 10^{-2},$ $\rho = 0.8 \text{ г/см}^3.$	До поверхности Земли долетает лишь доля η метеоритного вещества из-за интенсивного его взаимодействия с атмосферой Земли. Если бы у Земли не было атмосферы, до его поверхности долетало бы вещество массы m_{tot} , определяемой в виде:
<u>Найти:</u>	
$m_{\text{tot}}, h - ?$	

$$m_{\text{tot}} = \frac{m_0}{\eta} = 10^7 \text{ кг} = 10^4 \text{ тонн}. \quad (8)$$

Определим объем данного вещества:

$$V_{\text{tot}} = \frac{m_{\text{tot}}}{\rho} = 12500 \text{ м}^3. \quad (9)$$

Если данное вещество равномерно распределить по поверхности Земли, то оно примет форму тонкого сферического слоя, объем которого можно представить в виде:

$$V_{\text{cc}} = S_{\oplus} \cdot h, \quad \text{где } S_{\oplus} = 4\pi\bar{\mathcal{R}}_{\oplus}^2, \quad (10)$$

здесь $S_{\oplus}$ – площадь поверхности Земли-шара; $\bar{\mathcal{R}}_{\oplus}$ – средний радиус Земли ($\bar{\mathcal{R}}_{\oplus}=6371 \text{ км}$). Из равенства объемов V_{tot} и V_{cc} получаем

$$h = \frac{V_{\text{tot}}}{S_{\oplus}} = \frac{m_0}{\eta \rho 4\pi\bar{\mathcal{R}}_{\oplus}^2} = 2.45 \cdot 10^{-11} \text{ м}. \quad (11)$$

Последняя величина меньше характерного размера атома (10^{-10} м). Т.о., это вещество не может покрыть всю поверхность Земли толщиной даже в один атомный слой.

Ответ: к задаче представлен выражениями (8) и (11); этого количества вещества не хватит, чтобы равномерно покрыть всю поверхность Земли толщиной даже в один атомный слой! (8 баллов).

Задача № 10. «Либрации Луны и взгляд за горизонт»

Решение. а) *Либрация по долготе* обусловлена тем, что орбита движения Луны вокруг Земли есть эллипс. Согласно второму закону Кеплера, скорость движения Луны по орбите не постоянна, тогда как ее вращение вокруг своей оси происходит с почти постоянной скоростью. В результате, видимое земному наблюдателю вращение Луны неравномерно, и наблюдатель может немного «заглядывать» в отвернутое от Земли полушарие поочередно с восточного и с западного края. Период либрации по долготе называется **аномалистическим месяцем**.

б) *Либрации по широте* происходит вследствие наклона оси вращения Луны к плоскости орбиты ее движения вокруг Земли. При движении Луны вокруг Земли мы наблюдаем то южный, то северный полюс Луны. Период либрации по широте называется **драконическим месяцем**.

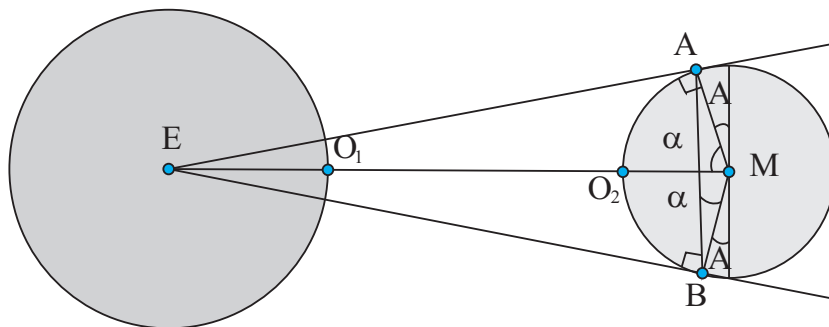


Рис. 6: к определению искомой величины.

в) *Суточная либрация* обусловлена относительной близостью Луны к Земле и параллаксом, порожденным вращением Земли. В результате суточного вращения наблюдателю становятся доступными сначала западные области Луны, затем восточные. Период данной либрации равен одним суткам.

г) *Физическая либрация* обусловлена приливными силами со стороны Земли и проявляется в небольшом изменении периода вращения Луны вокруг своей оси. Физическая либрация происходит по сложному закону.

Для определения искомой доли рассмотрим рис. 6 (вид со стороны северного полюса орбиты Луны на систему «Земля-Луна»). Определим долю поверхности Луны, которую можно обзирать в данный момент с среднего расстояния EM между телами. Поверхность, обзриваемая наблюдателем из точки E , есть шаровой сегмент AO_2B , площадь которого есть

$$S_{\text{ис}} = 2\pi R_{\text{л}}^2 (1 - \cos \alpha), \quad (12)$$

где α – угол между радиусом Луны $MA = R_{\text{л}}$ и направлением на центр

№	Либрации	Амплитуда	$\Delta\eta$	η
0	без либрации	89.741°	–	49.8
1	по долготе	$7^\circ 54'$	4.4%	54.2%
2	по широте	$6^\circ 50'$	3.8%	53.6%
3	суточная	$57'$	0.5%	50.3%
4	физическая	$2'$	0.019%	49.8%

Таблица 2: амплитуды либраций Луны и значения искомой доли ее поверхности.

Земли (из центра Луны). Из прямоугольного треугольника $\triangle AEM$ следует

$$\cos \alpha = \frac{\mathfrak{R}_\zeta}{\Delta_\zeta}, \quad \alpha = \arccos \left(\frac{\mathfrak{R}_\zeta}{\Delta_\zeta} \right) = 89.741^\circ, \quad (13)$$

здесь $EM = \Delta_\zeta$. Учитывая также, что площадь всей поверхности Луны есть

$$S_\zeta = 4\pi \mathfrak{R}_\zeta^2,$$

тогда искомая доля есть

$$\eta_0 = \left(\frac{S_{\text{шс}}}{S_\zeta} \right) \cdot 100\% = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_\zeta}{\Delta_\zeta} \right) \cdot 100\% = 49.8\%. \quad (14)$$

Вычислим теперь долю поверхности Луны, которую можно видеть с учетом либрации. За счет либрации открываются взору два сферических двугольника с углом раствора A . (см. рис. 6). Значит полную площадь можно записать так

$$S_{\text{tot}} = S_{\text{шс}} + 2S_{\text{д}} = S_{\text{шс}} + 4A\mathfrak{R}_\zeta^2. \quad (15)$$

Здесь мы учли, что площадь двугольника есть

$$S = 2\alpha\mathfrak{R}^2.$$

Тогда искомая доля всей видимой поверхности Луны есть

$$\eta = \frac{S_{\text{tot}}}{4\pi\mathfrak{R}^2} \cdot 100\% = \eta_0 + \Delta\eta, \quad \text{где } \Delta\eta = \frac{A}{\pi} \cdot 100\% \quad (16)$$

здесь A выражено в радианах, а $\Delta\eta$ определяет долю той части поверхности спутника, которую мы способны увидеть с Земли лишь благодаря этому виду либрации. Проводя численные расчеты для четырех либраций, в результате получаем значения представленные в таблице 2.

Ответ: к задаче представлен в таблице 2. (8 баллов).

Задача № 11. «"Цифровой" масштаб фотографии»**Дано:**

$$f = 1250 \text{ мм},$$

$$D = 9 \text{ мм},$$

$$N = 18 \text{ Мп},$$

$$k = 1.6.$$

Найти:

$$\mu_0 - ?$$

Решение:

Рассмотрим рис. 7, соответствующий условиям задачи. Здесь свет, пришедший от Луны, проходит через геометрический центр объектива (линзы), не преломляясь, и падает на матрицу фотоаппарата. В результате, на матрице формируется изображение Луны радиуса r_{ζ} , которое можно определить из прямоугольного $\triangle OAC$:

$$r_{\zeta} = f \cdot \operatorname{tg} \rho_{\zeta} \approx f \cdot \frac{\rho_{\zeta}''}{3438'}, \quad (17)$$

здесь ρ_{ζ} – угловой радиус Луны, выраженный в радианах, ρ_{ζ}'' – тот же параметр, выраженный в угловых единицах (минутах или секундах).

С другой стороны, из $\triangle OMB$, что

$$\sin \rho_{\zeta} \approx \frac{\rho_{\zeta}''}{3438'} = \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\Delta_{\zeta}}, \quad (18)$$

здесь и выше мы учли малость угла ρ_{ζ} и воспользовались формулами приближенных вычислений:

$$\sin \rho_{\zeta} \approx \operatorname{tg} \rho_{\zeta} \approx \rho_{\zeta} = \frac{\rho_{\zeta}''}{3438'}, \quad (19)$$

$3438'$ – количество минут в одном радиане. Из (17) и (18) следует, что

$$r_{\zeta} = f \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\Delta_{\zeta}}, \Rightarrow \mu_{\ell} = \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{r_{\zeta}} = \frac{\Delta_{\zeta}}{f}, \quad (20)$$

здесь μ_{ℓ} – линейный масштаб фотографии, показывающий какое количество километров приходится на единицу длины образа.

Далее определим **линейную плотность пикселей** – количество пикселей, приходящихся на единицу длины матрицы. Как известно, полнокадровая матрица фотоаппарата имеет размеры – $a_0 \times b_0 = 36 \times 24$ мм. Поскольку использовалась камера, матрица которой имеет кроп-фактор k , то размеры матрицы есть

$$a = \frac{a_0}{k}, \quad b = \frac{b_0}{k}. \quad (21)$$

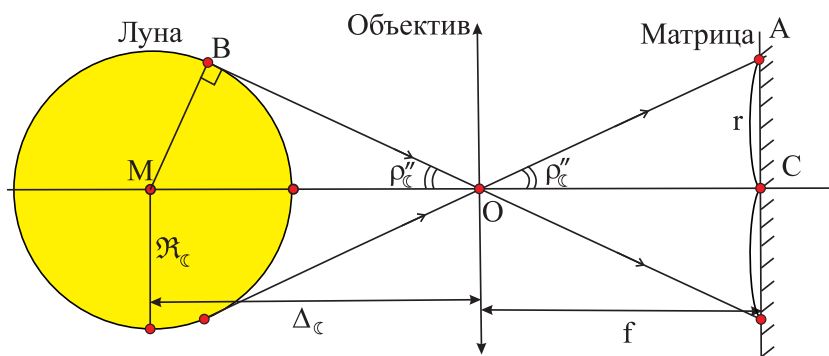


Рис. 7: к определению "цифрового" масштаба фотографии.

Тогда размер одного пикселя есть

$$\ell_0 = \sqrt{\frac{S}{N}} = \sqrt{\frac{a_0 \cdot b_0}{k^2 \cdot N}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{a_0 \cdot b_0}{N}} = 4.3 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 4.3 \cdot 10^{-3} \text{ мм.} \quad (22)$$

Тогда линейная плотность есть

$$\lambda = \frac{N'}{r_{\zeta}} = \frac{1}{\ell_0} = 230.9 \text{ п/мм.} \quad (23)$$

В итоге "цифровой" масштаб есть

$$\mu_D = \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{N'} = \left(\frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{r_{\zeta}} \right) \left(\frac{r_{\zeta}}{N'} \right) = \frac{\mu_{\ell}}{\lambda} = \frac{\Delta_{\zeta}}{f} \cdot \frac{1}{k} \sqrt{\frac{a_0 \cdot b_0}{N}} = 1.33 \text{ км/п.} \quad (24)$$

Ответ: к задаче представлен выражением (24). (9 баллов).

Задача № 12. «Метеороиды, упавшие на Луну»

Решение. Согласно решению задачи № 9 настоящего релиза, полный поток массы метеороидного вещества, налетающего за сутки на поверхность Земли есть $j_{\oplus} = 10^4$ тонн/сут. Как известно, поток массы всегда прямо пропорционален площади поперечного сечения мишени (в нашем случае – Земли):

$$j_{\oplus} \sim S_{\oplus} = \pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2. \quad (25)$$

Аналогичная связь справедлива для Луны. Найдем отношение этих потоков:

$$\frac{j_{\oplus}}{j_{\zeta}} = \left(\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\zeta}} \right)^2, \Rightarrow j_{\zeta} = j_{\oplus} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \right)^2. \quad (26)$$

Следовательно, искомая масса вещества есть

$$m_{\zeta} = j_{\zeta} \cdot T_{\text{тр}} = j_{\oplus} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \right)^2 \cdot T_{\text{тр}} = 2.72 \cdot 10^8 \text{ кг.} \quad (27)$$

Определим толщину слоя вещества, по аналогии с задачей № 9:

$$h_{\zeta} = \frac{m_{\zeta}}{4 \pi \rho \mathfrak{R}_{\zeta}^2} = 8.95 \cdot 10^{-9} \text{ м} \approx 9 \text{ нм.} \quad (28)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (27) и (28). (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «ИВЗ для геоцентрического расстояния до центра масс системы "Земля-Луна"»

Решение. Как известно, тела гравитационно связанной системы "Земля-Луна" движутся вокруг общего центра масс по эллиптическим траекториям. Значит, центры этих тел, относительно их центра масс, отстоят на разных

расстояниях в разные моменты времени. Учтем, что радиус-вектор центра масс есть

$$\vec{\mathfrak{R}}_c = \frac{\mathfrak{M}_\oplus \vec{r}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta \vec{r}_\zeta}{\mathfrak{M}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta}. \quad (29)$$

Если начало отсчета совместить с центром масс данной системы, то $\vec{\mathfrak{R}}_c = 0$, тогда из (29) следует, что

$$\mathfrak{M}_\oplus \vec{r}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta \vec{r}_\zeta = 0, \quad \mathfrak{M}_\oplus r_\oplus = \mathfrak{M}_\zeta r_\zeta. \quad (30)$$

Иначе расстояние (r) между Землей и Луной можно записать так:

$$r = r_\oplus + r_\zeta. \quad (31)$$

Из (30) и (31) следует, что

$$r_\oplus = \frac{\mathfrak{M}_\zeta}{\mathfrak{M}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta} r, \quad r_\zeta = \frac{\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{M}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta} r. \quad (32)$$

Расстояние между телами, очевидно, изменяется в пределах:

$$a_\zeta (1 - \varepsilon_\zeta) \leq r \leq a_\zeta (1 + \varepsilon_\zeta), \quad (33)$$

здесь a_ζ , ε_ζ – большая полуось и эксцентриситет орбиты Луны относительно Земли (представлены в разделе "Справочные данные").

Следовательно, искомый интервал есть

$$\frac{\mathfrak{M}_\zeta a_\zeta (1 - \varepsilon_\zeta)}{\mathfrak{M}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta} \leq r_\oplus \leq \frac{\mathfrak{M}_\zeta a_\zeta (1 + \varepsilon_\zeta)}{\mathfrak{M}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta}, \quad \text{или} \quad 4414 \text{ км} \leq r_\oplus \leq 4928 \text{ км}. \quad (34)$$

Ответ: к задаче представлен интервалом (34). (11 баллов).

Задача № 14. «ИВЗ для скорости центра Земли»

Решение. Вновь воспользуемся выражением для радиуса-вектора центра масс (29). Запишем аналогичное выражение для приращения вектора

$$\Delta \vec{\mathfrak{R}}_c = \frac{\mathfrak{M}_\oplus \Delta \vec{r}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta \Delta \vec{r}_\zeta}{\mathfrak{M}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta}. \quad (35)$$

Поделим последний результат на Δt – промежуток времени, в течение которого векторы испытали указанные приращения; воспользуемся определением вектора скорости, тогда

$$\vec{V}_c = \frac{\mathfrak{M}_\oplus \vec{V}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta \vec{V}_\zeta}{\mathfrak{M}_\oplus + \mathfrak{M}_\zeta}. \quad (36)$$

В системе отсчета, связанной с центром масс $\vec{V}_c = 0$, тогда

$$\mathfrak{M}_\oplus V_\oplus = \mathfrak{M}_\zeta V_\zeta, \quad \Rightarrow \quad V_\zeta = \frac{\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{M}_\zeta} V_\oplus, \quad (37)$$

здесь $V_{\oplus}, V_{\zeta}$ – скорости Земли и Луны относительно их центра масс. С другой стороны скорость Луны (V_0) относительно центра Земли можно представить как

$$V_0 = V_{\zeta} + V_{\oplus} = \frac{m_{\oplus} + m_{\zeta}}{m_{\zeta}} V_{\oplus}, \Rightarrow V_{\oplus} = \frac{m_{\zeta}}{(m_{\oplus} + m_{\zeta})} V_0. \quad (38)$$

Учитывая, что (V_0) изменяется в пределах:

$$V_Q^{(0)} \leq V_0 \leq V_q^{(0)}, \quad V_Q^{(0)} = \sqrt{\frac{Gm_{\oplus}}{a_0} \left(\frac{1 - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} \right)}, \quad V_q^{(0)} = \sqrt{\frac{Gm_{\oplus}}{a_0} \left(\frac{1 + \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \right)}. \quad (39)$$

В итоге ИДЗ для орбитальной скорости Земли есть

$$V_{\oplus}^{(Q)} \leq V_{\oplus} \leq V_{\oplus}^{(q)}, \quad V_{\oplus}^{(Q)} = \frac{m_{\zeta}}{m_{\oplus} + m_{\zeta}} \sqrt{\frac{Gm_{\oplus}}{a_0} \left(\frac{1 - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} \right)},$$

$$V_{\oplus}^{(q)} = \frac{m_{\zeta}}{m_{\oplus} + m_{\zeta}} \sqrt{\frac{Gm_{\oplus}}{a_0} \left(\frac{1 + \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \right)}. \quad (40)$$

С использованием справочных данных для $a_0 = 384399$ км и $\varepsilon_0 = 0.055$, получаем в итоге:

$$11.7 \text{ м/с} \leq V_{\oplus} \leq 13.1 \text{ м/с}. \quad (41)$$

Ответ: к задаче представлен интервалом (41). (12 баллов).

Задача № 15. «Объем и масса водяного льда в лунном кратере»

Решение. 1. Рассмотрим процесс падения солнечных лучей на кратер (см. рис. 8). Как известно, солнечный свет распространяется вдоль прямой "Солнце-Луна" в виде параллельных лучей. Солнечный свет несет с собой энергию, которая при поглощении ее веществом тратится на нагрев тела, плавление и сублимацию его вещества. Как известно возраст Луны и Солнца составляет не мене 4.5 млрд. лет. В течение такого большого промежутка времени вода должна испариться полностью со всех площадок поверхности Луны, открытых для солнечных лучей. Следовательно, лед может сохраниться лишь в неосвещенной части лунного кратера. Определим минимальное значение угла падения (α) световых лучей на кратер, находящийся на освещенной Солнцем стороне Луны, на селеноцентрической широте φ (см. рис. 8). Для этого учтем также, что угол между плоскостью эклиптики (большим кругом небосвода, которое описывает Солнце в своем годичном движении относительно далеких звезд) и лунным экватором является малым и составляет 1.5° . Поэтому, далее будем пренебрегать данным значением и полагать, что плоскости эклиптики и лунного экватора совпадают, а солнечные лучи распространяются параллельно данным плоскостям.

Согласно рис. 8 угол падения α образован падающим лучом ОК и продолжением радиуса планеты СК. Заметим также, что прямая QQ' параллельна ОК.

Следовательно, к данным прямым прямая СК является секущей. Из курса геометрии известно, углы при параллельных прямых и секущей должны быть одинаковыми. Следовательно, угол $\alpha = \varphi$, то есть, *селеноцентрическая широта местности равна углу падения световых лучей от Солнца в полдень*. Далее определим долю от полного объема ударного кратера, которая будет находиться в

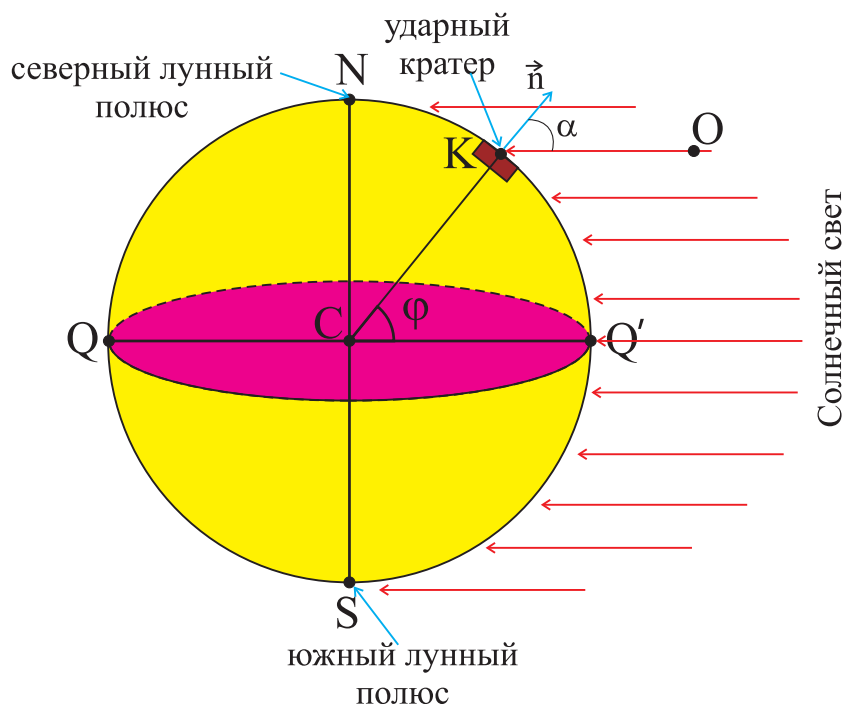


Рис. 8: к определению положения лунного кратера.

тени от солнечных лучей. К сожалению, решить эту задачу для круглого цилиндра не представляется возможным, поскольку решение данной проблемы связано с процедурой интегрирования. Чтобы решить поставленную задачу, перейдем к рассмотрению кратера в форме параллелепипеда со сторонами $a \times a \times H$. Основанием параллелепипеда является квадрат со стороной a . Определим сторону основания a . Как известно, объем параллелепипеда с квадратным основанием a и высотой H представляется выражением вида:

$$V_{\pi} = a^2 H. \quad (42)$$

Рассмотрим данный параллелепипед, находящийся на селеноцентрической широте φ . Световые лучи от Солнца будут падать на верхнюю границу кратера под углом φ (см. рис. 9). Часть объема кратера будет находиться в тени, следовательно, в этой области может находиться лед. Определим долю от полного объема кратера, которую может составлять объем области,

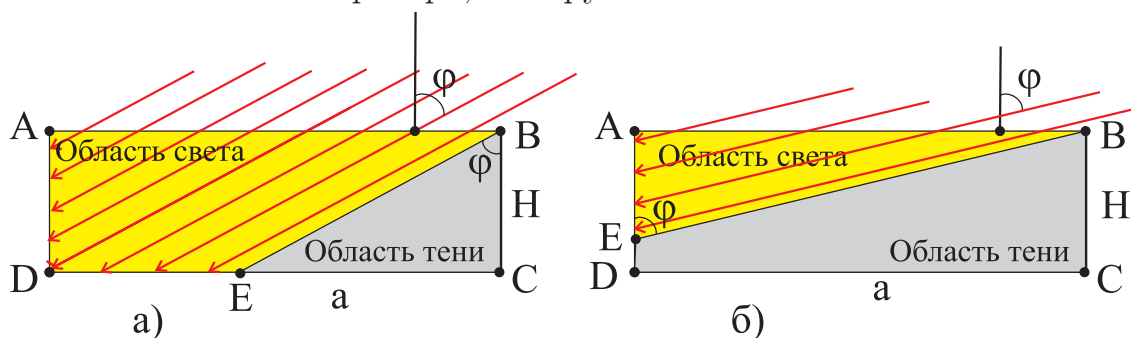


Рис. 9: к определению области тени кратера.

находящейся в тени. Для этого заметим, что возможны две ситуации: когда дно кратера частично освещается (см. рис. 9.а); частично освещаются лишь боковые стенки кратера, дно остается в тени (см. рис. 9.б).

Рассмотрим подробнее первую ситуацию. В этом случае область тени, заключенная внутри кратера – параллелепипеда, является треугольной призмой (геометрической фигурой, у которой есть два одинаковых основания, являющихся треугольниками, а боковые грани – прямоугольники, плоскости которых перпендикулярны основаниям, см. рис. 9.а). Объем данной фигуры представляется в виде:

$$V_T = S_T a, \quad (43)$$

где S_T – это площадь прямоугольного треугольника, находящегося в основании призмы. Согласно рис. 9.а) данную площадь можно представить в виде:

$$S_T = \frac{1}{2} EC \cdot CB = \frac{1}{2} (H \operatorname{tg} \varphi) H. \quad (44)$$

здесь мы учли, что $EC = H \operatorname{tg} \varphi$, $CB = H$. В итоге объем V_T представляется выражением:

$$V_T = \frac{1}{2} H^2 a \operatorname{tg} \varphi. \quad (45)$$

Найдем искомую долю χ_1 :

$$\chi_1 = \frac{V_T}{V_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{a} \right) \operatorname{tg} \varphi. \quad (46)$$

Рассмотрим вторую ситуацию. В данном случае область, заполняемая солнечным светом, представляет собой треугольную призму, площадь основания которой есть

$$S_l = \frac{1}{2} f a. \quad (47)$$

Здесь мы учли, что $AE = f$. Кроме того, из треугольника АВЕ следует, что

$$f = \frac{AB}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Определим объем части кратера, заполненной светом:

$$V_l = S_l a = \frac{1}{2} \frac{a^3}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (48)$$

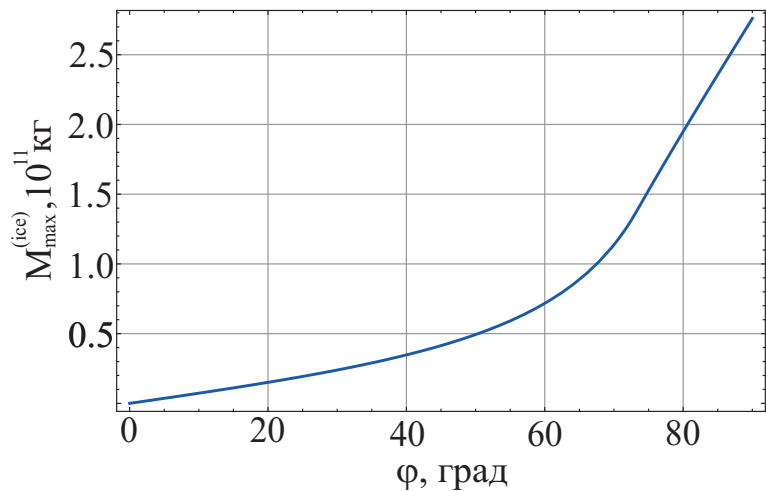


Рис. 10: зависимость максимальной массы водяного льда (с плотностью $\rho_{\text{ice}} = 920 \text{ кг/м}^3$) кратера (параллелепипеда со стороны $a \times a \times H = 1 \times 1 \times 0.3 \text{ км}$) от селеноцентрической широты φ местоположения кратера.

Следовательно, часть кратера, приходящаяся на тень, есть призма, в основании которой находится трапеция, объем которой

$$V_{\text{тн}} = V_{\text{п}} - V_l = a^2 \left(H - \frac{1}{2} \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} \right). \quad (49)$$

Найдем искомую долю χ_2 :

$$\chi_2 = \frac{V_{\text{тн}}}{V_{\text{п}}} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{H \operatorname{tg} \alpha} \right). \quad (50)$$

Пограничное состояние между указанными ситуациями достигается при условии $\varphi = \varphi_0$. Последний параметр должен удовлетворять условию:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a}{H}, \Rightarrow \varphi_0 = \arctg \left(\frac{a}{H} \right). \quad (51)$$

В итоге искомую долю χ можно представить в виде:

$$\chi = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \left(\frac{H}{a} \right) \operatorname{tg} \varphi, & \text{при } \varphi \leq \varphi_0, \\ \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{H \operatorname{tg} \alpha} \right), & \text{при } \varphi > \varphi_0. \end{array} \right\} \quad (52)$$

Далее нетрудно определить максимальную возможную массу водяного льда в кратере:

$$M_{\text{max}}^{(\text{ice})} = \rho_{\text{ice}} V_{\text{sh}} = \rho_{\text{ice}} a^2 H \chi, \quad (53)$$

где χ определяется выражением (52). На рис. 10 представлен график зависимости полной максимальной массы водяного льда кратера от селеноцентрической широты φ , для кратера с размерами $a = 1$ км, $H = 0.3$ км и массовой плотностью льда $\rho_{\text{ice}} = 920$ кг/м³. Из рисунка видно, что функция $M_{\text{max}}^{(\text{ice})}(\varphi)$ достигает максимального значения $2.2 \cdot 10^{11}$ кг при $\varphi = 90^\circ$ (т.е., на лунных полюсах). При этом темпы изменения искомой массы больше при значениях $\varphi > \varphi_0 = 73.3^\circ$.

Ответ: к задаче представлен результатами (52)-(53) и графиком 10. (13 баллов).

Задача № 16. «Рефракция света и изменения статуса звезды»

Решение. Такая необычная ситуация вполне может иметь место, если весь суточный путь небесного светила располагается на небольшой глубине (не более $35'$) под горизонтом. Это может быть в двух случаях: или суточный путь небесного светила имеет небольшие размеры, или он располагается практически параллельно горизонту. Рассмотрим эти два случая отдельно.

Ситуация 1. Небольшие угловые размеры суточного пути светила означают, что оно находится вблизи Северного или Южного полюса мира. Раз суточный путь (имеющий вид окружности с малым радиусом) располагается

вблизи горизонта, то наблюдения должны проводиться из окрестностей экватора. На самом экваторе условия задачи формально не выполняются, так как там не бывает невосходящих светил даже в отсутствие рефракции. Но при незначительном удалении от экватора, например, к северу, Южный полюс мира должен опуститься под горизонт, но до широты $\delta z = +0^\circ 35'$ он будет постоянно виден над горизонтом благодаря рефракции. Светило (например, какая-нибудь слабая звезда), находящееся в этой точке неба, отвечает условию задачи. Аналогично, светило, находящееся очень близко от Северного полюса мира, окажется незаходящим вплоть до широты $-\delta z$. Итак, в первом случае условие задачи выполняется в узкой полосе по обе стороны от экватора, исключая сам экватор.

Ситуация 2. Суточный путь светила, практически, параллелен горизонту – может наблюдаться около Северного или Южного полюса Земли. Очевидно, что сам Северный полюс удовлетворяет условию задачи, благодаря рефракции там все время над горизонтом будут находиться светила со склонением от 0° до $-0^\circ 35'$. Однако, условие задачи может выполняться и на некотором удалении от полюса. Рассмотрим предельную для этого условия ситуацию – светило находится на высоте 0° в верхней кульминации и на высоте $-0^\circ 35'$ в нижней кульминации (см. рис. 11 в проекции на плоскость небесного меридиана).

Точки верхней и нижней кульминации светила равноудалены от Северного полюса мира. Обозначив широту места через φ запишем равенство:

$$180^\circ - \varphi = \varphi + \delta z, \Rightarrow \varphi = 90^\circ - (\delta z/2) = 89^\circ 42.5'.$$

Из рисунка очевидно, что склонение светила будет равно $\delta_* = -\delta z/2 = -0^\circ 17.5'$. При дальнейшем удалении от полюса разность высот светила в верхней и нижней кульминации будет больше $35'$, и условие задачи выполняться не будет. Аналогичные рассуждения можно провести для окрестности Южного полюса Земли.

Ответ: описанная в условии задачи ситуация может наблюдаться на широтах $(-90^\circ, -89^\circ 42.5')$, $(-0^\circ 35', 0^\circ)$, $(0^\circ, +0^\circ 35')$, $(+89^\circ 42.5', +90^\circ)$. (13 баллов).

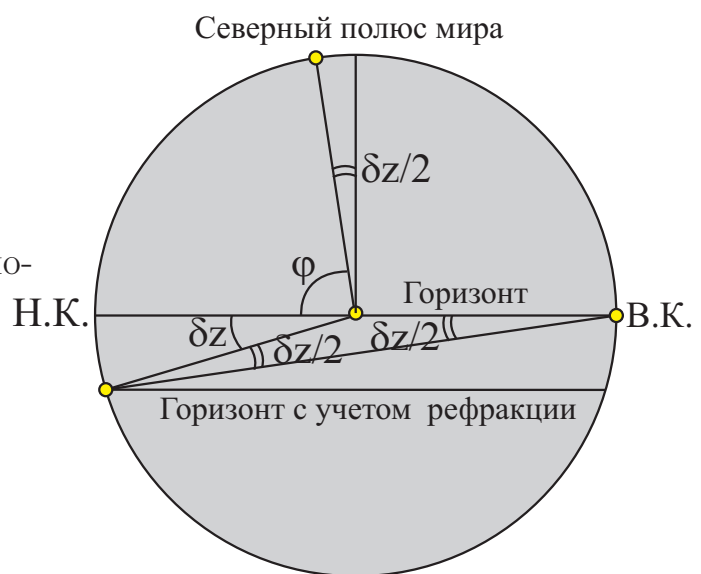


Рис. 11: к определению интервала возможных значений для широты местности.

Задача № 17. «Спутник связи в зените Самары»

Решение. Как известно, искусственный спутник Земли может постоянно находиться в зените только на экваторе, если этот спутник – *геостационарный*. Для того чтобы спутник мог оказаться в зените на самарском небе, наклонение его орбиты к плоскости экватора должно быть не меньше широты Самары $\varphi_S = 53^\circ 12'$, а лучше – в точности совпадать с ним. В этом случае склонение спутника будет близко к данной величине, в течение продолжительного времени. Чтобы спутник, оказавшись в зените в Самаре, вновь попал туда в свой следующий оборот, его период T должен быть кратным звездным суткам $P_\oplus = 23^h 56^m$. Максимальное время вблизи зенита спутник проведет в случае равенства его периода обращения и звездных суток. С использованием третьего обобщенного закона Кеплера большая полуось орбиты спутника будет равна

$$a = \left(\frac{G \mathfrak{M}_\oplus P_\oplus^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42170 \text{ км}, \quad (54)$$

последнее значение есть радиус геостационарной орбиты. Однако, вариант круговой орбиты, отличающийся от геостационарной лишь своим наклоном, не является оптимальным.

Для того чтобы спутник на какое-то время практически останавливался на самарском небе в зените, нужно, чтобы в этот момент его угловая скорость сравнялась с геоцентрической угловой скоростью самарских наблюдателей на вращающейся Земле (см. рис. 12). Данная угловая скорость равна

$$\omega_S = \frac{V_S}{\mathfrak{R}_\oplus} = \frac{2\pi}{P_\oplus} \cos \varphi_S, \quad (55)$$

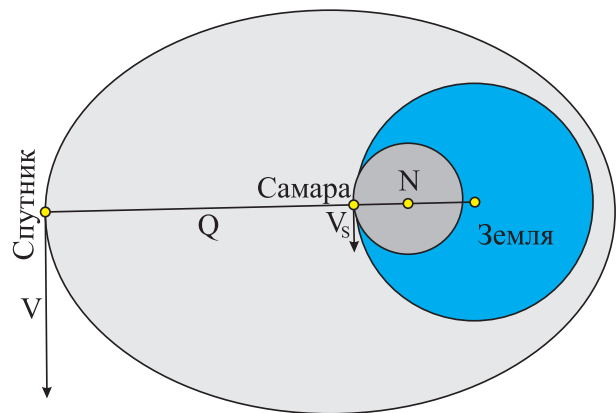


Рис. 12: к определению орбиты спутника.

что отличается от угловой скорости вращения геостационарного спутника на множитель $\cos \varphi_S$. Поэтому для выполнения условия задачи спутник нужно вывести на эллиптическую орбиту с большой полуосью a и наклонением $i = \varphi_S$, точка апогея которой находилась бы над самарской параллелью.

Далее найдем эксцентриситет орбиты ε . В точке апогея спутник находится на расстоянии Q от центра Земли:

$$Q = a(1 + \varepsilon). \quad (56)$$

Из второго закона Кеплера и закона сохранения энергии можно получить

формулу для скорости спутника в апогее:

$$V_Q = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{a} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)}. \quad (57)$$

Скорость в апогее направлена перпендикулярно радиусу-вектору. Угловая скорость спутника будет равна

$$\omega = \frac{V_Q}{Q} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{a^3} \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^3}} = \frac{2\pi}{P_{\oplus}} \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^3}}. \quad (58)$$

При записи последнего выражения был учтен результат (54). Приравнивая ее к угловой скорости наблюдателей в Самаре, получаем

$$\frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon)^3} = \cos^2 \varphi_S, \Rightarrow 1 - \varepsilon = \xi(1 + \varepsilon)^3, \text{ где } \xi = \cos^2 \varphi_S = 0.3588. \quad (59)$$

Т.о., здесь получено кубическое уравнение относительно переменной ε . Данное уравнение можно решить методом подбора или графически. Рассмотрим последний метод подробнее. Согласно (59), мы имеем равенство двух функций:

$$f_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon, \quad f_2(\varepsilon) = \xi(1 + \varepsilon)^3.$$

Построим данные функции над одним графике (см. рис. 13) и найдем их точку пересечения – $\varepsilon = 0.2682$. При этом расстояние до апогея составит $Q = 53.48$ тыс. км., а от Самары, когда он находится в зените – 47.11 тыс. км.

Ответ: орбита эллиптическая, с наклоном $i = \varphi_S$, большой полуосью $a = 42170$ км и эксцентриситетом $\varepsilon = 0.2682$, причем апогей его орбиты должен быть вблизи зенита Самары. (14 баллов).

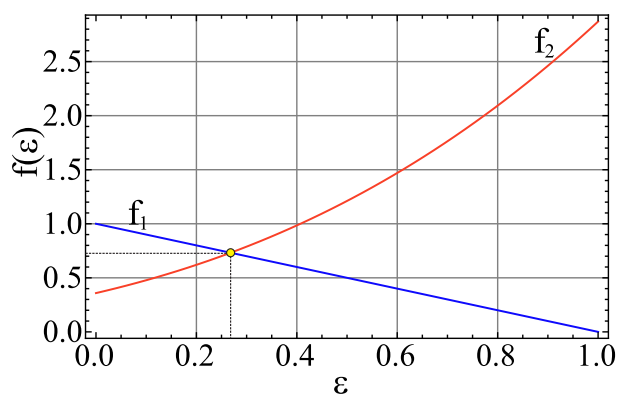


Рис. 13: к определению эксцентриситета орбиты спутника.

Задача № 18. «Аналемма и годичное движение Солнца»

Решение. 1. Поскольку аналемма занимает фактически вертикальное положение, то съемка велась в районе местного полудня, в частности, в дни солнцестояний уравнение времени близко к нулю (см. рис. А.2, приложение А.9) и тогда местное среднее и солнечное время равны, а значит равны и часовые углы Солнца в эти дни.

2. В течение года склонение Солнца изменяется в пределах:

$$-\varepsilon_{\odot} \leq \delta_{\odot} \leq \varepsilon_{\odot}, \quad (60)$$

где $\varepsilon_{\odot} = 23^{\circ}26'$ – угол между экватором и эклиптической, самая нижняя и верхняя точки аналеммы отвечают положению солнцестояний. Следовательно, общая высота аналеммы равна $2\varepsilon_{\odot}$, а экватор должен делить ее ровно пополам (параллельно горизонту, см. рис. 14).

3. Для определения углового масштаба фотографии измеряем по фотографии высоту аналеммы $\ell_0 = 127$ мм, предварительно, достроив ее нижнюю часть. В итоге искомый масштаб есть

$$\mu_a = \frac{2\varepsilon_{\odot}}{\ell_0} = 0.369^{\circ}/\text{мм}. \quad (61)$$

4. Ассиметрия аналеммы обусловлена эллиптичностью орбиты Земли и большими вариациями уравнения времени вблизи зимнего солнцестояния, что делает один ее "лепесток" значительно шире другого.

Поскольку более широкий лепесток находится внизу, значит наинизшее положение Солнца соответствует моменту зимнего солнцестояния, а наивысшая точка аналеммы – летнему солнцестоянию, значит съемка была выполнена из северного полушария.

5. Определим по фотографии расстояние от экватора до горизонта (на уровне оси симметрии аналеммы) – $\ell_1 = 101$ мм. Определим угол Ψ между экватором и горизонтом вблизи меридиана:

$$\Psi = \mu_a \cdot \ell_1 = 37.27^{\circ}. \quad (62)$$

С другой стороны, угол Ψ равен

$$\Psi = 90^{\circ} - \varphi, \Rightarrow \varphi = 90^{\circ} - \Psi = 52^{\circ}44'. \quad (63)$$

6. Минимальное и максимальное значения высоты Солнца в полдень достигаются в дни зимнего и летнего солнцестояний:

$$h_{\min} = 90^{\circ} - \varphi - \varepsilon_{\odot} = 13^{\circ}50' \quad (64)$$

$$h_{\max} = 90^{\circ} - \varphi + \varepsilon_{\odot} = 60^{\circ}42'. \quad (65)$$

7. Поскольку до дня зимнего солнцестояния уравнение времени отрицательно, то местное время меньше истинного солнечного, то местный средний полдень наступает позже истинного, следовательно Солнце должно занимать положение справа от меридиана если автор снимка ориентировал свой фотоаппарат в южную часть небосвода, тогда направление движения Солнца по аналемме должны быть таким, как показано на рис. 14.

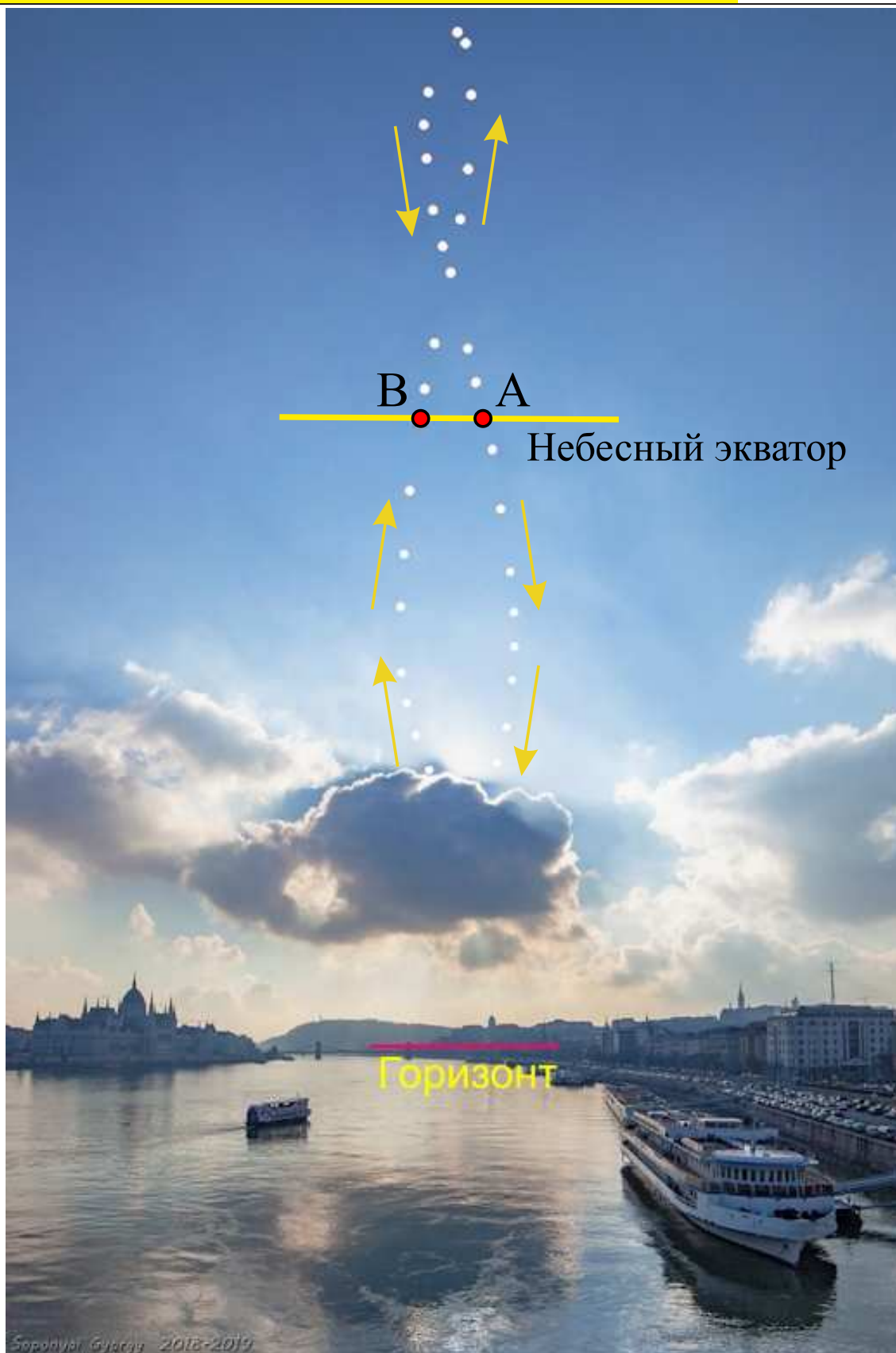


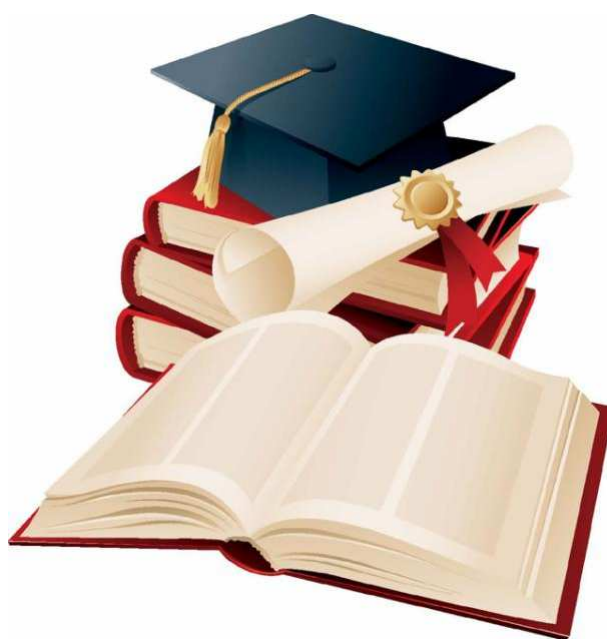
Рис. 14: К определению искомых величин по аналемме.

8. Заметим, что узел "восьмерки" фактически находится на одной отвесной линии с самой верхней и нижней точками аналеммы. Значит часовые углы Солнца в этих точках были одинаковыми, моменты по шкале истинного солнечного времени одинаковыми, а значит и уравнение времени во всех этих точках одно и тоже. Как было показано выше в момент солнцестояний

уравнение времени, приблизительно, равно нулю, значит и в моменты времени, соответствующие "узлу восьмерки" также эта величина равна нулю. Согласно рис. А.2. (приложение А.9) данные моменты времени соответствуют 16 апреля и 29 августа.

Ответ: 1) полдень; 2) указан на рис. 14; 3) $\mu_a = 0.363^\circ/\text{мм}$; 4) эллиптичность орбиты Земли, северное; 5) $\varphi = 52^\circ 44'$; 6) $h_{\min} = 13^\circ 50'$, $h_{\max} = 60^\circ 42'$; 7) указана на рис. 14; 8) 16.04 и 29.08. (15 баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Экс- цен- триси- тет	Наклон к плоскости эклипти- ки	Период обраще- ния	Синоди- ческий период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плот- ность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плос- кости орбиты	Гео- мет- рич. альбе- до	Вид. звезд- ная вели- чина*
	кг	массы Земли	км	ради- усы Зем- ли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

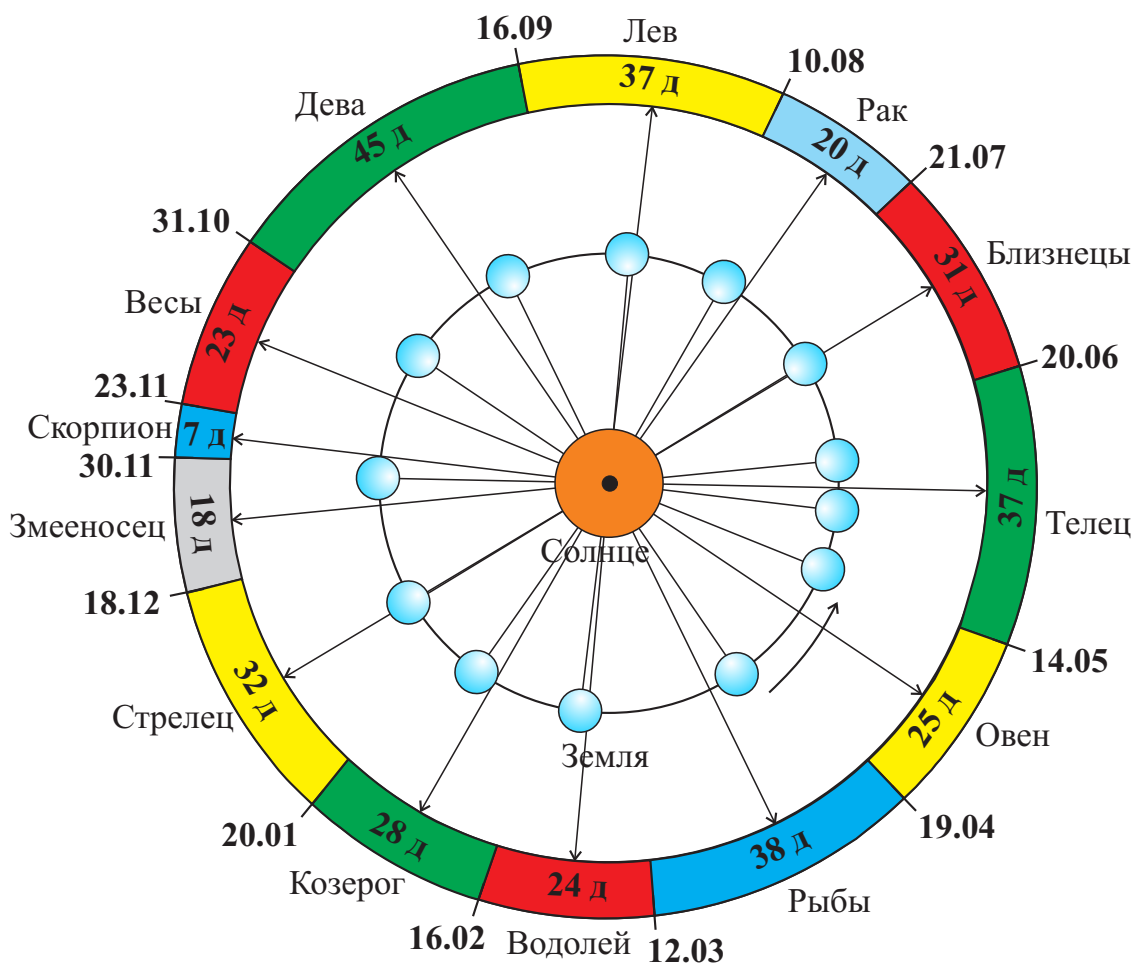


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

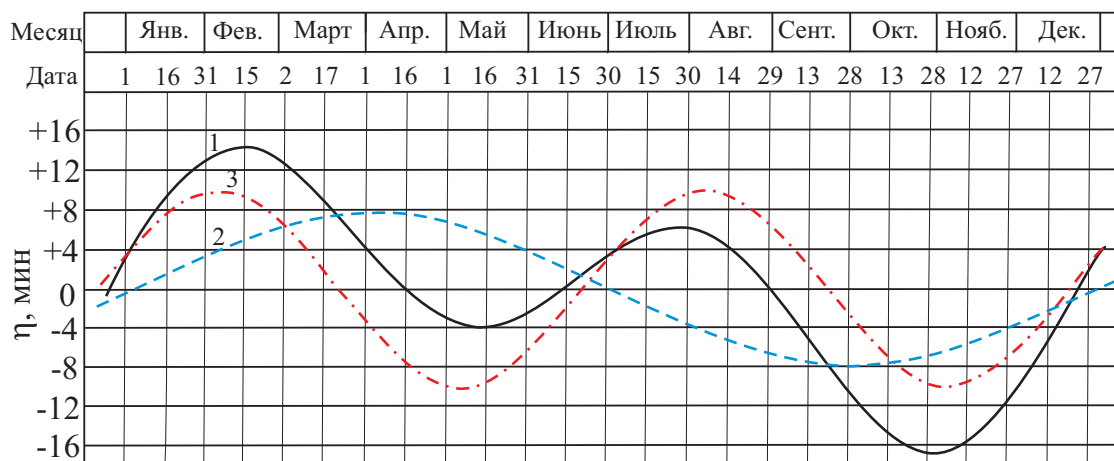


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

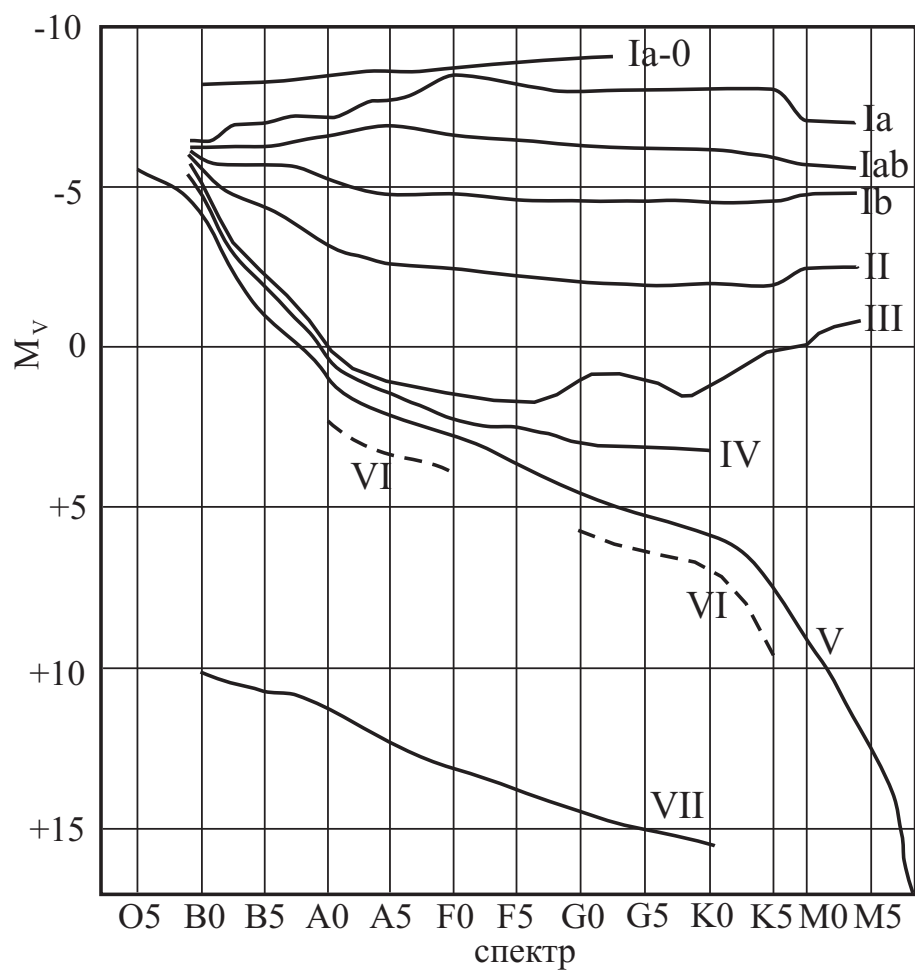


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ПЕРИОДЫ	A	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	(H)												
2	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne					
3	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar					
4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe					
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru					
6	Cs	Ba	La*	Hf	Ta	W	Re	Os					
7	Fr	Ra	Ac**	Rf	Db	Sg	Bh	Hs					
8	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd						
9	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm						

Символ элемента

Относительная атомная масса

Порядковый номер

Название элемента

Распределение электронов на энергетических уровнях

Рис. А.4. Таблица Менделеева.