

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2020
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.
ТУР № 1



Самара, 2020 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 18 оригинальных задач трех уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В) и «Профи» (уровень С). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2020 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 1». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/solutions>

Автор задач – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СДДЮТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе *ИТ_ЕX* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника SamRAS-2020

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

<http://vk.com/samrasolimp>

3. Сроки подачи работ SamRAS-2020 тура № 1 на проверку:

15.10.2019-15.01.2020!!!

4. Электронный ящик SamRAS-2020:

samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2020:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

https://vk.com/doc-57032141_451699934

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2020, внимательно ознакомьтесь с «**Руководством зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2020**»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника**.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Яркость планет и их последовательность»

Расположите классические планеты Солнечной системы в порядке увеличения их видимой яркости (в оптимальных условиях их наблюдений и усредненной по большому количеству наблюдений)? Какие из этих планет мы можем, в принципе, увидеть невооруженным глазом? Какие можем увидеть лишь в телескоп (бинокль)? (3 балла).

Задача № 2. «Где-то на поверхности Земли...»

В каких точках поверхности Земли не существует незаходящих небесных тел? Чему здесь равны а) зенитное расстояние ближайшего к зениту полюса мира, б) наибольшая высота ближайшего к зениту полюса эклиптики? (3 балла).

Задача № 3. «Галилеев спутник с собственным магнитным полем»

Какой из галилеевых спутников обладает собственным магнитным полем? Во сколько раз, приблизительно, его магнитное поле на экваторе отличается от земного экваториального? Что может служить источником его собственного магнитного поля? (3 балла).



Рис. 1: астрономическая инфографика (автор не известен).

Задача № 4. «Ошибка в инфографике»

На рис. 1 представлена астрономическая инфографика, взятая из сети Интернет. В чем заключается ошибка автора при попытке сравнить характеристики планет? Как бы Вы представили данную инфографику? Свое решение следует подкрепить математическими выкладками. (4 балла).

Задача № 5. «Проницающая сила телескопа и ее определение»

Что такое проницающая сила телескопа? Предположим, диаметр зрачка глаза наблюдателя в ночное время суток равен $d = 6$ мм. Докажите, что в случае идеальной оптической системы телескопа с диаметром объектива D (выраженным далее в миллиметрах) его проницающая сила может быть представлена формулой вида (4 балла):

$$m_{\max} = 2.1^m + 5^m \lg D. \quad (1)$$

Задача № 6. «Созвездия, кульминирующие в полночь в Самаре»

Какое количество созвездий проходит через зенит города Самара (широта города – $\varphi = 53^\circ 12'$) в течение года? Назовите их. Распределите эти созвездия по календарным сезонам, в которые они проходят свою верхнюю кульминацию в полночь? (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)**Задача № 7. «Земля и ее территории»**

Полагая, что Земля является шаром, определите, какую долю от площади всей ее поверхности составляет территория, с любой точки которой (без учета рефракции света)

1. Можно увидеть, хотя бы один раз в год, Солнце в зените (2 балла);
2. Нельзя увидеть Солнце в зените, в принципе, и где не бывает полярных дней и ночей (2 балла);
3. Хотя бы один раз в год можно наблюдать полярные дни и ночи (2 балла).

Задача № 8. «Земля с борта МКС и поле зрения камеры»

На рис. 2 представлена фотография части поверхности Земли, полученная с борта Международной космической станции (высота орбиты составляла на момент съемки $h = 410$ км). С использованием лишь значений среднего радиуса Земли и h , оцените угловой диаметр поля зрения камеры, с помощью которой и был получен данный кадр. Оцените толщину (в км) "светящейся" (зеленым цветом) части атмосферы Земли. (7 баллов).

Задача № 9. «День, сумерки, астрономическая ночь...»

Определите, на какой части поверхности Земли в настоящее время наблюдается а) день, б) сумерки, в) астрономическая ночь? В расчетах учесть явление рефракции света и конечность размеров диска Солнца. (8 баллов).

Задача № 10. «Внезапная вспышка кометы 17P/Холмса»

В октябре 2007 года комета 17P/Холмса испытала столкновение с неизвестным телом. До столкновения комета имела ядро, радиус которого $R_N = 3.3$ км и видимый блеск $m_0 = 17^m$. После столкновения ее видимый блеск вырос до $m = 2^m$. Полагая, что в результате столкновения все ядро распалось



Рис. 2: фотография поверхности Земли, полученная с борта МКС.

на одинаковые осколки, определите радиус этих осколков. Вкладом частиц, находившихся вне ядра до вспышки, в яркость кометы пренебречь. Определите концентрацию таких частиц спустя 2 месяца после вспышки, если на этот момент размеры ее комы сравнялись с размерами Солнца. (8 баллов).

Задача № 11. «Время прямой видимости звезды над горизонтом»

Определите время прямой видимости звезды над горизонтом, как функцию широты местности (φ) и склонения светила (δ). (9 баллов).

Задача № 12. «Необычное превращение»

Оцените, через какое количество лет система «Земля-Луна», имеющая сегодня статус «Планета-спутник», превратится в систему «Двойная планета», подобно системе «Плутон-Харон»? Скорость удаления Луны от Земли следует считать постоянной и равной 4 см/год? Чему обусловлено это удаление Луны? Чему будет равен сидерический период обращения и большая полуось орбиты Луны? Будут ли при этом еще наблюдаться полные солнечные затмения? (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Великое противостояние Марса и полное затмение Луны»

Как известно, 27 июля 2018 года одновременно произошло лунное затмение и великое противостояние Марса. В эти сутки Луна отстояла от Земли на расстоянии $r_{\text{ЗЛ}} = 404180$ км, а Марс $r_{\text{СМ}} = 57.715$ млн. км. Определите, во сколько раз поверхностная яркость (выраженная в ваттах на квадратный метр и квадратную угловую секунду) Марса была больше или меньше соот-



Рис. 3: фотография солнечного гало, полученная в малой окрестности южного географического полюса.

ветствующей яркости Луны (в полнолуние, вне затмения)? Чему были равны соответствующие звездные величины? Во сколько раз должны отличаться времена выдержки при фотографии этих объектов? (11 баллов).

Задача № 14. «Солнечное гало на южном геополюсе»

На рис. 3 представлена фотография солнечного гало, полученная в малой окрестности южного географического полюса, вблизи местного истинного полдня. Определите возможные даты получения этой фотографии. (12 баллов).

Задача № 15. «Две звезды, две светлых повести...»

В некотором пункте поверхности Земли (часовой пояс $N = 8$), откуда

еще видна Полярная звезда, наблюдаются две яркие звезды (А и В), расположенные на одном круге склонения. Известно, что суточная параллель звезды В делит ось мира в отношении $a : b = 3 : 5$, а ее альмукантарат в верхней кульминации делит отвесную линию в отношении $c : d = 1 : 3$. Известно, что Солнце 23 сентября попадает на данный круг склонения и восходит на столько раньше звезды А, на сколько звезда В восходит раньше Солнца. Время восхода Солнца в это день по декретному времени составляет 6 часов 40 минут. Видимые звездные величины звезд равны соответственно $m_A = 1.5^m$ и $m_B = 2.5^m$. Определите экваториальные координаты звезд и географические координаты места наблюдения. Постройте график зависимости для интегральной видимой звездной величины этой пары звезд, как функции времени (в течение одних суток). (13 баллов).

Задача № 16. «Погрешность определения азимута компасом»

Некоторые модели современных телескопов оснащаются *роботизированными азимутальными монтировками*. Для их корректной работы необходимо предварительно ориентировать трубу телескопа в направлении на точку севера. Чтобы это сделать быстро и приближенно, производители телескопов предлагают использовать магнитный компас. Как известно, глобальное магнитное поле Земли можно аппроксимировать полем точечного магнитного диполя, то есть как будто земной шар представляет собой полосовой магнит с осью, направленной приблизительно с севера на юг. Центр этого диполя смещен относительно центра Земли на 430 км в восточное полушарие, а ось наклонена к оси вращения Земли на угол около $\varepsilon = 9.63^\circ$. На такой же угол отстоят от соответствующих географических полюсов **геомагнитные полюса** – точки пересечения оси диполя с поверхностью Земли. Согласно модели WMM, северный геомагнитный полюс (по сути, это южный полюс магнита) имеет координаты $\varphi_N = 80.37^\circ$, и $\lambda_N = 287,38^\circ$, южный геомагнитный полюс – $\varphi_S = -80.37^\circ$, $\lambda_S = 107.38^\circ$. Вычислите погрешность определения азимута точки севера с помощью магнитного компаса, как функцию широты (φ) и долготы (λ) места наблюдения. (13 баллов).

Задача № 17. «Эволюция системы WASP-12»

Экзопланета WASP-12b была открыта в 2008 году. Исследования показали, что данная экзопланета движется по круговой орбите радиуса 0.021 а.е. вокруг материнской звезды с массой $M_* = 1.35 M_\odot$. Масса экзопланеты составляет $M_p = 1.39 M_J$, где M_J – масса Юпитера. Известно, что материнская звезда каждую секунду отбирает у экзопланеты вещество массой $8.4 \cdot 10^{12}$ кг. Определите абсолютное и относительное изменения периода обращения экзопланеты за последующий 1 млн. лет. (14 баллов).

Задача № 18. «Максимальное время выдержки для астрофотографии»

Астроном-любитель, для получения высококачественных фотографий объектов глубокого космоса, традиционно использует роботизированную экваториальную монтировку, на которую выставляется труба телескопа с фокусным расстоянием F . Перед сеансом наблюдений необходимо выставить, как можно точнее, полярную ось на северный полюс мира. Предположим, что в результате ручной установки (из-за неточности наведения) полюс полярной оси имеет экваториальные координаты (t_p, p_p) , здесь t_p, p_p – часовой угол и полярное расстояние полюса оси соответственно. Часовой привод полярной оси (оси прямых восхождений) задает ее угловую скорость вращения, равную $\omega_{\oplus} + \Delta\omega$ (здесь $\omega_{\oplus}$ – угловая скорость вращения Земли, $\Delta\omega$ – погрешность, обусловленная несовершенством часового механизма). В окулярный узел телескопа (в фокальную плоскость объектива) устанавливается астрокамера, содержащая N мегапикселей, с размером сенсора $a \times b$. Определите, максимальное время выдержки $\tau_{\max}$, которую можно выставить на данной камере, чтобы получить фотографию без смазывания наблюдаемого звездоподобного объекта с координатами (t_*, δ_*) как функцию параметров $(t_p, p_p, \Delta\omega)$. Для Вас может оказаться полезной **теорема Котельникова**: для получения дискретного изображения одномерного профиля распределения интенсивности образа звезды необходимо не менее 3 пикселей. С использованием какой-либо компьютерной программы, постройте трехмерные плоты для функции $\tau_{\max}(t_p, p_p)$ в осях (t_p, p_p) , в интервалах:

$$0^\circ \leq t_p \leq 360^\circ, \quad 0 \leq p_p \leq 5^\circ, \quad (2)$$

для телескопа с $F = 750$ мм и камеры с $N = 18$ Мп, размером сенсора 23.6×15.7 мм в случае, когда звезда, находится в меридиане с а) $\delta = 0^\circ$, б) $\delta = 45^\circ$, в) $\delta = 85^\circ$, при следующих значениях погрешности угловой скорости: 1) $\Delta\omega = \omega_{\oplus}/150$, 2) $\Delta\omega = \omega_{\oplus}/30$, 3) $\Delta\omega = \omega_{\oplus}/15$, 4) $\Delta\omega = \omega_{\oplus}/5$. Дайте краткий анализ полученных результатов. (15 баллов).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Яркость планет и их последовательность»

Решение. Согласно таблице А.7 приложения А, данную последовательность можно представить так:

1. 1) Нептун (7.8^m), 2) Уран (5.7^m), 3) Сатурн (0.4^m), 4) Меркурий (-0.1^m), 5) Марс (-2.0^m), 6) Юпитер (-2.7^m), 7) Венера (-4.4^m).

2. Невооруженным глазом мы можем увидеть все указанные выше планеты, за исключением планеты Нептун.

3. Лишь в телескоп (бинокль) можно увидеть Нептун. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «Где-то на поверхности Земли...»

Решение.

1. Очевидно, что на географическом экваторе (геоэкваторе) все светила являются восходящими и заходящими, следовательно здесь не существует незаходящих светил.

2. Здесь оба полюса мира одинаково удалены от зенита наблюдателя, находятся на горизонте и их зенитное расстояние есть $z = 90^\circ$.

3. Наибольшая высота любого полюса эклиптики достигается, когда последний проходит меридиан, при этом, относительно горизонта он будет на высоте $\varepsilon = 23^\circ 26'$.

Ответ: 1) на геоэкваторе; 2) $z = 90^\circ$; 3) $h_{\max} = \varepsilon = 23^\circ 26'$. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Галилеев спутник с собственным магнитным полем»

Решение. 1. Ганимед – крупнейший спутник Юпитера и самый большой среди всех спутников классических планет обладает собственным магнитным полем.

2. Его индукция на экваторе спутника оценивается в $B_G = 720$ нТл, в то время как магнитное поле Земли на экваторе составляет $B_\oplus = 34$ мкТл, таким образом $B_\oplus / B_G = 47$ раз.

3. Как показывают исследования, Ганимед внутри полностью дифференцирован и обладает металлическим ядром, его магнитное поле, вероятнее всего, генерируется тем же способом, что и земное – в силу магнитогидродинамического эффекта, т.е. как результат конвективного движения электрически проводящего вещества в ядре.

Ответ: 1) Ганимед, 2) $B_\oplus / B_G = 47$ раз, 3) магнитогидродинамический эффект. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Ошибка в инфографике»

Решение. На рис. 1 автор инфографики пытался сравнить объемы Солн-

ца и Юпитера, Юпитера и Земли. Учитывая, что все эти тела имеют форму, близкую к форме шара, то можно легко оценить отношение объемов данных тел

$$\frac{V_J}{V_{\oplus}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \mathfrak{R}_J^3}{\frac{4}{3}\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^3} = \left(\frac{\mathfrak{R}_J}{\mathfrak{R}_{\oplus}}\right)^3 = 1321 \approx 1300. \quad (3)$$

$$\frac{V_{\odot}}{V_J} = \frac{\frac{4}{3}\pi \mathfrak{R}_{\odot}^3}{\frac{4}{3}\pi \mathfrak{R}_J^3} = \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{\mathfrak{R}_J}\right)^3 = 985 \approx 1000, \quad (4)$$

здесь $\mathfrak{R}_{\odot}=695500$ км, $\mathfrak{R}_J=69911$ км, $\mathfrak{R}_{\oplus}=6371$ км – средние радиусы Солнца, Юпитера и Земли соответственно.

Т.о, автор совершил две основные ошибки:

1) он представил на рисунке лишь приближенные значения отношений объемов тел, определяемые "гладкими" числами, истинные значения до целых определяются результатами (3) и (4).

2) Автор не учел, что шарики могут располагаться по отношению друг к другу лишь в определенном порядке и возникающие пустоты между шариками тоже занимают конечный объем (который может составлять порядка $\mathcal{O}(10\%)$ относительно объема одного шарика). Поэтому, в действительности, в тело Солнца невозможно поместить 1000 шариков, их количество будет существенно меньше. Тоже самое можно сказать о сравнении объемов Земли и Юпитера.

Было бы более корректным сравнивать объемы данных тел на примере тел, имеющих форму параллелепипедов. Отсутствие пустот и точные числа для отношений объемов будут более предпочтительными для инфографики. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Проницающая сила телескопа и ее определение»

Решение. *Проницающей силой телескопа* называется максимальная звездная величина точечного небесного светящегося тела, которое еще можно увидеть в данный оптический инструмент.

Как известно, среднестатистический невооруженный человеческий глаз имеет проницающую силу $m_y = 6^m$. Если диаметр зрачка глаза в ночное время суток составляет $d=6$ мм, то в этом случае на сетчатку глаза попадает минимальный световой поток (который еще фиксируется глазом) от звезды с звездной величиной $m_{\max} = m_y = 6^m$, равный

$$\Phi_{\min} = E_{\min} \frac{\pi d^2}{4}, \quad (5)$$

где $E_{\min}$ – минимальная освещенность, создаваемая данной звездой и еще воспринимаемая человеческим глазом. Звезда, которая определяет проницающую силу телескопа (m_T) должна создавать на сетчатке такой же световой

поток – $\Phi_{\min}$, причем в случае отсутствия потерь света в телескопе (в идеальном случае) его можно представить как

$$\Phi_{\min} = E_0 \frac{\pi D^2}{4}, \quad (6)$$

здесь E_0 – освещенность, создаваемая данной звездой у поверхности объектива диаметром D . Из сопоставления (5) и (6) следует, что

$$\frac{E_{\min}}{E_0} = \left(\frac{D}{d}\right)^2. \quad (7)$$

Далее воспользуемся формулой Погсона, связывающей отношение освещенностей с разностью соответствующих звездных величин:

$$m_T - m_y = -2.5 \lg \left(\frac{E_0}{E_{\min}} \right). \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$m_T = m_y + 2.5 \lg \left(\frac{D}{d} \right)^2 = m_y + 5 \lg \left(\frac{D}{d} \right).$$

Учитывая далее, что $m_y = 6^{\text{m}}$, а D и d будут выражены в миллиметрах, в результате получаем

$$m_T = 6^{\text{m}} + 5^{\text{m}} \lg D - 5 \lg 6 = 2.1^{\text{m}} + 5^{\text{m}} \lg D. \quad (9)$$

Что и требовалось доказать. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Созвездия, кульминирующие в полночь в Самаре»

Решение. Через зенит города Самары проходят те созвездия, которые пересекает суточная параллель со склонением $\delta = \varphi = 53^\circ 12'$. С использованием карты звездного неба или компьютерной программы – планетария легко убедиться в том, что данная параллель пересекает 11 созвездий: Большая Медведица, Волопас, Дракон, Лебедь, Ящерица, Андромеда, Кассиопея, Персей, Жираф, Возничий, Рысь.

1) зимние созвездия: Жираф (13.11-08.12), Возничий (08.12-31.12), Рысь (31.12-29.01), Большая Медведица (29.01-23.04);

2) весенние созвездия: Большая Медведица (29.01-23.04), Волопас (23.04-11.05), Дракон (11.05-8.07);

3) летние созвездия: Дракон (11.05-8.07), Лебедь (08.07-22.08), Ящерица (22.08-05.09);

4) осенние созвездия: Ящерица (22.08-05.09), Андромеда (05.09-12.09), Кассиопея (12.09-14.10), Персей (14.10-13.11), Жираф (13.11-08.12). ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Земля и ее территории»

Решение. 1. Определим интервал возможных значений географической широты тех мест, где можно Солнце наблюдать в зените, хотя бы один раз в год. Для этого воспользуемся формулой для верхней кульминации Солнца:

$$h_{\max}^{\text{ю}} = 90^\circ - \varphi + \delta_{\odot} = 90^\circ, \Rightarrow \varphi = \delta_{\odot}. \quad (10)$$

Поскольку склонение Солнца в течение года принадлежит интервалу:

$$-\varepsilon \leq \delta_{\odot} \leq \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = 23^\circ 26'. \quad (11)$$

Следовательно, искомая область заключена в околоэкваториальной области в интервале:

$$-23^\circ 26' \leq \varphi_{\text{I}} \leq 23^\circ 26', \quad (12)$$

и называется **тропическим поясом**.

2. Определим интервалы широты тех мест, где могут наблюдаться полярные дни и ночи. Если наблюдается полярная ночь, то высота Солнца, в истинный полдень, должна быть меньше 0° . Тогда

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \delta_{\odot} < 0^\circ, \Rightarrow \varphi > 90^\circ + \delta_{\odot}.$$

С учетом (11), получаем $\varphi > 66^\circ 34'$. Чтобы можно было наблюдать полярный день, необходимо, чтобы в нижней кульминации Солнца незаходило за горизонт, т.е. $h_{\min} \geq 0$, тогда

$$\varphi + \delta - 90^\circ \geq 0, \Rightarrow \varphi \geq 90^\circ - \delta_{\odot} = 66^\circ 34'.$$

С учетом зеркальной симметрии расположения искомым областей относительно экватора, имеем

$$-90^\circ \leq \varphi_{\text{III}} < -66^\circ 34' \cup 66^\circ 34' < \varphi_{\text{III}} \leq 90^\circ. \quad (13)$$

Данные области традиционно называются **северный** и **южный холодные пояса**. Оставшиеся области с широтами

$$-66^\circ 34' \leq \varphi_{\text{II}} < -23^\circ 26' \cup 23^\circ 26' < \varphi_{\text{II}} \leq 66^\circ 34' \quad (14)$$

называются **южным** и **северным умеренными поясами**. Здесь нельзя увидеть Солнце в зените и не бывает полярный дней и ночей.

Рассмотрим Землю в разрезе (в плоскости земного меридиана), см. рис. 4. Здесь $\varphi_1 = \pm 23^\circ 26'$ – широты, определяющие положения северного (южного) тропиков; $\varphi_2 = \pm 66^\circ 34'$ – широты, определяющие положение северного (южного) полярного круга. Определим площадь шарового сегмента III. Согласно формуле для площади шарового сегмента

$$S_{\text{III}} = 2\pi R^2 (1 - \cos(90^\circ - \varphi_2)) = 2\pi R^2 (1 - \sin \varphi_2). \quad (15)$$

Поскольку площадь всей поверхности Земли есть

$$S_0 = 4\pi R^2. \quad (16)$$

Тогда на северный и южный холодные пояса вместе приходится доля:

$$\eta_{\text{III}}^{(\text{tot})} = \frac{2S_{\text{III}}}{S_0} = (1 - \sin \varphi_2) = 0.082 \text{ или } 8.2\%. \quad (17)$$

Площадь умеренного северного пояса можно представить в виде разности площадей сегментов III + II и III:

$$S_{\text{II}} = 2\pi R^2 (1 - \sin \varphi_1) - 2\pi R^2 (1 - \sin \varphi_2) = 2\pi R^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1). \quad (18)$$

Тогда на северный и южный умеренные пояса вместе приходится доля:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{II}}^{(\text{tot})} &= \frac{2S_{\text{II}}}{S_0} = (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = \\ &= 0.520 \text{ или } 52.0\%. \end{aligned} \quad (19)$$

Доля, приходящаяся на тропический пояс, представляется в виде:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{I}}^{(\text{tot})} &= 1 - \eta_{\text{II}}^{(\text{tot})} - \eta_{\text{III}}^{(\text{tot})} = \\ &= 0.398 \text{ или } 39.8\%. \end{aligned} \quad (20)$$

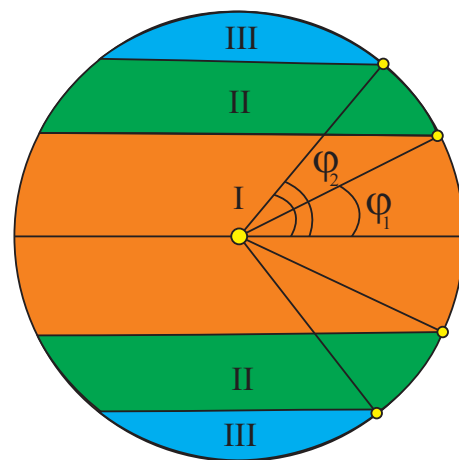


Рис. 4: к определению поясов Земли.

Итак, самый большой по величине η пояс – умеренный, затем следует тропический и замыкает тройку холодный.

Ответ: к задаче представлен выражениями (17), (19), (20).

Задача № 8. «Земля с борта МКС и поле зрения камеры»

Дано:

$$h = 410 \text{ км},$$

$$\bar{R}_{\oplus} = 6371 \text{ км}.$$

Найти:

$$D_c'', H - ?$$

Решение:

Угловой диаметр поля зрения камеры (D_c'') – это угол, под которым видна диагональ снимка с позиции фотографа, в момент съемки. Данную величину можно представить как

$$D_c'' = \mu_a \cdot \ell, \quad (21)$$

здесь μ_a – угловой масштаб фотографии, ℓ – длина диагонали кадра, определенная непосредственно по фотографии.

Для определения углового масштаба фотографии необходимо определить угол, под которым видна какая-либо деталь на фотографии и определить также ее линейные размеры. В качестве такой детали используем поверхность Земли. По рис. 5 определим длину основания сегмента земного шара $AB =$

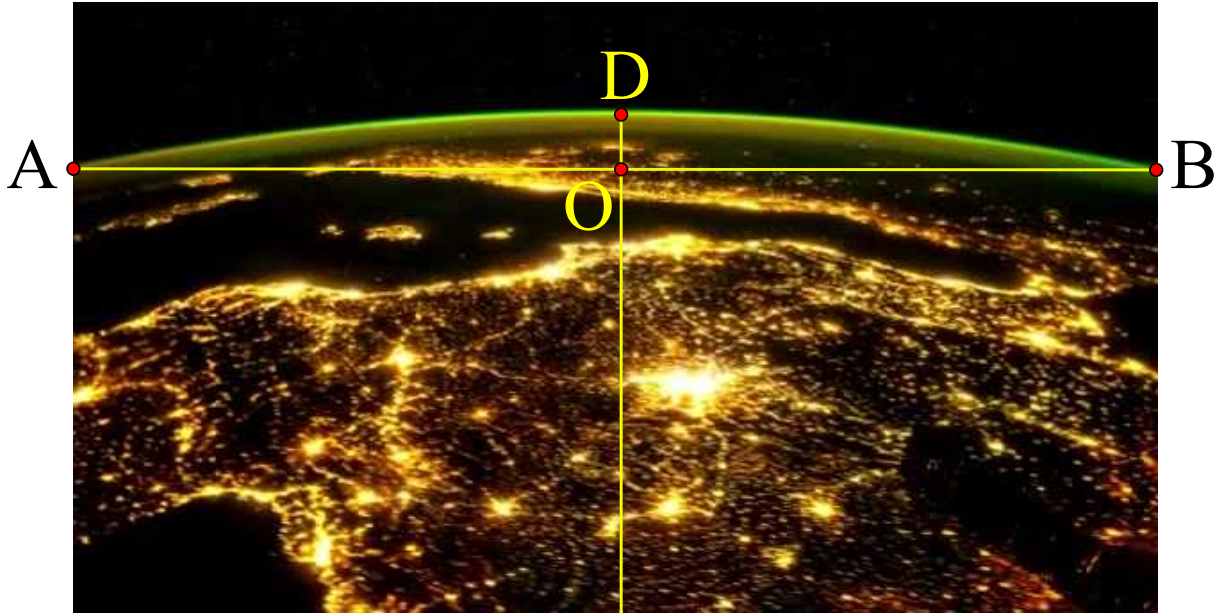


Рис. 5: к определению элементов дополнительного построения.

$L = 233$ мм (Ваши значения могут отличаться от указанных, при использовании фотографии в ином масштабе). Высота сегмента $OD = H = 13$ мм. С использованием рис. 6.а) нетрудно установить что линейный радиус Земли по данной фотографии должен составлять

$$R_{\oplus}^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (R_{\oplus} - H)^2, \Rightarrow R_{\oplus} = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H^2}{2H} = 528.5 \text{ мм.} \quad (22)$$

Тогда можно определить линейный масштаб фотографии

$$\mu_{\ell} = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{R_{\oplus}} = 12.05 \text{ км/мм.} \quad (23)$$

Следовательно, протяженность хорды AB в км:

$$AB = \mu_{\ell} \cdot L = 2809.7 \text{ км.} \quad (24)$$

Данный отрезок наблюдался с МКС в момент, когда расстояние между станцией и точками горизонта было равно $r = SD$ (см. рис. 6.б). Очевидно, что

$$r = SD = \sqrt{(\mathfrak{R}_{\oplus} + h)^2 - \mathfrak{R}_{\oplus}^2} = \sqrt{2\mathfrak{R}_{\oplus}h + h^2} = 2322 \text{ км.} \quad (25)$$

Следовательно, угол α , под которым видна хорда AB с позиции фотографа в момент съемки есть

$$\alpha = 2 \arctan \left[\frac{AB}{2r} \right] = 62.3^{\circ} \quad (26)$$

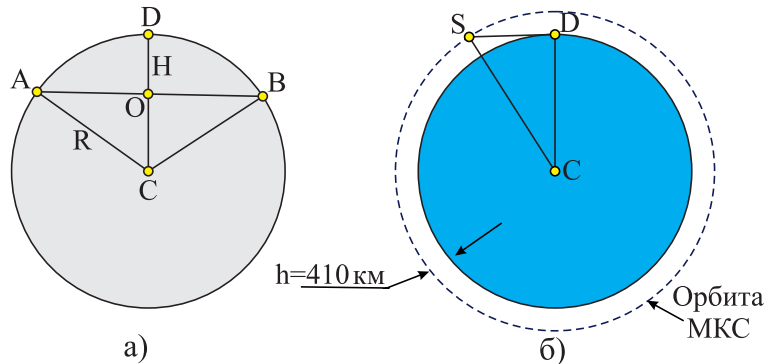


Рис. 6: к определению а) величины радиуса Земли, б) расстояния до горизонта.

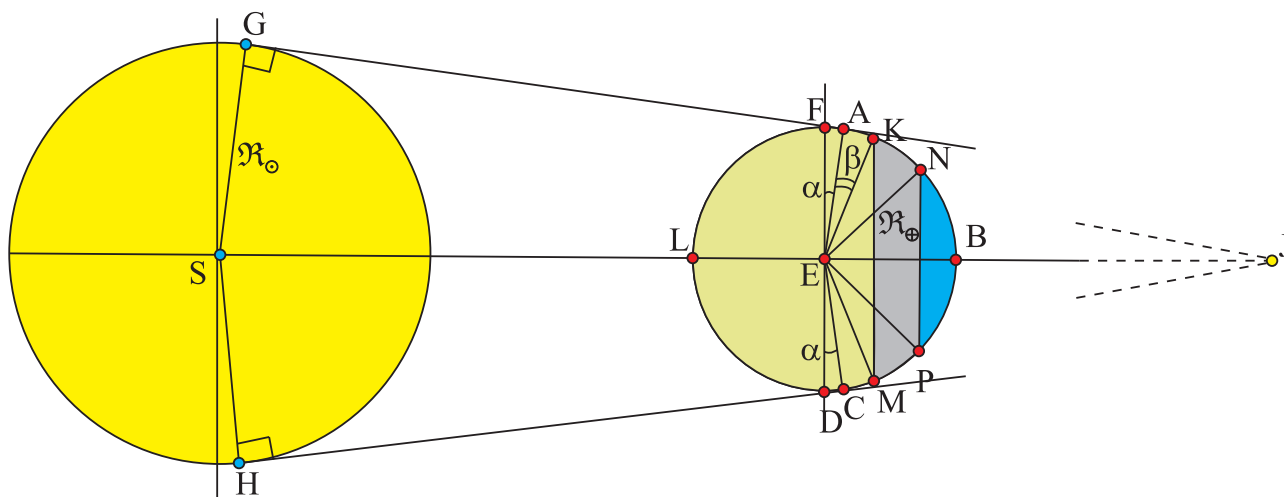


Рис. 7: к определению областей поверхности Земли.

тогда угловой масштаб фотографии есть

$$\mu_a = \frac{\alpha}{L} = 16.05' / \text{мм}. \quad (27)$$

Определяя высоту фотографии $s = 130$ мм, вычислим длину диагонали кадра по теореме Пифагора:

$$\ell = \sqrt{s^2 + L^2} = 266.8 \text{ мм}. \quad (28)$$

Тогда угловой диаметр поля зрения камеры есть

$$D''_c = \mu_a \cdot \ell = 71.4^\circ. \quad (29)$$

Толщину "светящейся" (зеленым цветом) части атмосферы Земли определим по фотографии $\ell_l = 2$ мм и переведем в км:

$$h_l = \mu_\ell \cdot \ell_l = 24 \text{ км}. \quad (30)$$

Ответ: ответ к задаче представлен выражениями (29)-(30). (7 баллов).

Задача № 9. «День, сумерки, астрономическая ночь...»

Решение. Рассмотрим рис. 7, соответствующий условиям задачи. Поскольку Солнце больше Земли, то лишь на сегмент ABC поверхности последней солнечный свет не попадает (без учета рефракции света). Найдём угол $\angle AEF$. Согласно теореме о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами:

$$\angle AEF = \angle AJE = \angle GJS = \alpha. \quad (31)$$

С другой стороны:

$$\sin \angle AJE = \frac{R_\oplus}{x}, \quad \sin \angle GJS = \frac{R_\odot}{x + a_\oplus}, \quad (32)$$

здесь $x = EJ$. Из (31) и (32) следует, что

$$\frac{R_\oplus}{x} = \frac{R_\odot}{x + a_\oplus}, \Rightarrow x = \frac{R_\oplus}{(R_\odot - R_\oplus)} a_\oplus.$$

Тогда угол α есть

$$\sin \alpha = \frac{\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\oplus}}{a_{\oplus}} \approx \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}}, \Rightarrow \alpha \approx \arcsin \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus}} \right) = 16'. \quad (33)$$

За счет явления рефракции света у горизонта Солнце будет "приподниматься" рефракцией еще на $\beta = 35'$. Следовательно верхнюю точку диска Солнца будет еще видно в точке K . Значит в области MCDLFAK будет день.

Долю, соответствующую данной области, можно определить как отношение площадей этой области и всей сферы

$$\eta_d = \frac{S_d}{S_{\text{сф}}} = \frac{S_{\text{сф}} - S_1}{S_{\text{сф}}} = 1 - \frac{S_1}{S_{\text{сф}}}, \quad (34)$$

здесь S_1 – площадь шарового сегмента MPBNK, ее можно записать так

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 (1 - \cos(90^\circ - \alpha - \beta)) = 2\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 (1 - \sin(\alpha + \beta)) \approx \\ &\approx 2\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{3438'} \right) = 2\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \cdot 0.985. \end{aligned} \quad (35)$$

Следовательно, согласно (34) $\eta_d = 0.507$ или 50.7% при $S_{\text{сф}} = 4\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2$ – площадь всей поверхности Земли.

Сумерки длятся в данном месте, если высота центра диска Солнца (без учета рефракции) удовлетворяет интервалу:

$$-18^\circ \leq h \leq -\alpha. \quad (36)$$

Высота истинного Солнца, равная -18° , будет достигаться в точках N и P . Тогда площадь области, где наблюдаются сумерки, есть

$$\begin{aligned} S_c &= S_1 - S_2 = 2\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 \cdot 0.985 - 2\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^2 (1 - \cos(90^\circ - 18^\circ)) \approx \\ &\approx 2\pi R^2 (0.985 - 1 + \sin 18^\circ) = 2\pi R^2 \cdot 0.294, \end{aligned} \quad (37)$$

здесь S_2 – площадь шарового сегмента с углом раствора $(90^\circ - 18^\circ)$, соответствующего области NBP на рис. 7. Соответствующая доля есть

$$\eta_c = \frac{S_c}{S_{\text{сф}}} = \frac{0.294 \cdot 2\pi R^2}{4\pi R^2} = 0.147 \text{ или } 14.7\%. \quad (38)$$

Следовательно, доля поверхности Земли, соответствующая области, где наблюдается астрономическая ночь, есть

$$\eta_n = 1 - \eta_d - \eta_c = 0.346 \text{ или } 34.6\%. \quad (39)$$

Ответ: $\eta_d = 50.7\%$, $\eta_c = 14.7\%$, $\eta_n = 34.6\%$. (8 баллов).

Задача № 10. «Внезапная вспышка кометы 17P/Холмса»

Решение. Обозначим через R первоначальный радиус кометы, а через r – радиус осколков. Пусть m_0 и m – звездные величины до и после взрыва. Изначальная яркость кометы пропорциональна видимой ее поверхности:

$$B_0 = C\pi R^2. \quad (40)$$

Здесь C – некая постоянная величина. Объем ядра кометы составлял

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

После взрыва комета распалась на N осколков с радиусом r и объемом V/N :

$$V/N = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Отсюда получаем:

$$r/R = (1/N)^{1/3}. \quad (41)$$

Яркость кометы вновь пропорциональна видимой суммарной площади осколков с той же постоянной, так как взрыв кометы произошел быстро, и она фактически осталась в той же точке пространства:

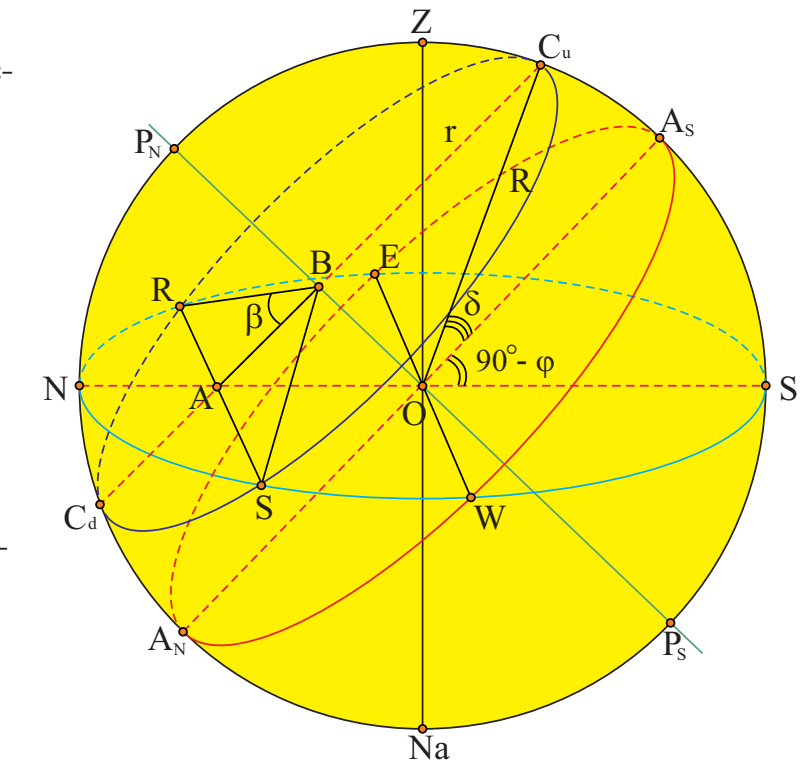


Рис. 8: к определению части дуги суточной параллели звезды, соответствующей ее видимому движению над горизонтом.

$$B = N C \pi r^2 = B_0 N^{1/3}. \quad (42)$$

Из последних двух уравнений с учетом формулы Погсона имеет:

$$\frac{r}{R} = \frac{B_0}{B} = 10^{0.4(m-m_0)} = 10^{-6}, \Rightarrow N = \left(\frac{B}{B_0}\right)^3 = 10^{18} \text{ частиц}. \quad (43)$$

Характерный радиус осколков ядра кометы составляет – 3.3 мм. Концентрации этих частиц спустя 2 месяца была

$$n = \frac{N}{\frac{4\pi}{3}\mathcal{R}_{\odot}^3} = 7.1 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{м}^3} = 0.71 \text{ км}^{-3}. \quad (44)$$

Ответ: к задаче – (43) и (44); радиус частиц равен – 3.3 мм. (8 баллов).

Задача № 11. «Время прямой видимости звезды над горизонтом»

Решение. Рассмотрим суточное движение звезды (со склонением δ) по небосводу (см. рис. 8) вдоль суточной параллели RC_uSC_d , для наблюдателя, находящегося в северном географическом полушарии, на широте φ ($\varphi > 0$). Звезда восходит над горизонтом в точке R , поднимается выше и кульминирует в точке C_u , затем опускается и заходит за горизонт в точке S . Далее ее суточное движение по небосводу продолжается по дуге SC_dR , скрытой от глаз наблюдателя, находящегося в точке O – центре небесной сферы. Т.о., нам необходимо определить угловую меру ℓ дуги RC_uS . Из рисунка видно, дугу можно представить в виде:

$$\ell = 360^\circ - 2\beta, \quad (45)$$

где β – угол прямоугольного треугольника ΔARB . Последний можно определить следующей формулой:

$$\cos \beta = \frac{AB}{RB} = \frac{OB \operatorname{tg} \angle BOA}{r} = \frac{OB}{r} \operatorname{tg} \varphi, \quad (46)$$

здесь $r = RB = BC_u$ – радиус суточной параллели звезды, который можно легко определить из ΔOC_uB :

$$r = R \cos \delta, \quad (47)$$

здесь R – радиус небесной сферы, δ – склонение звезды. OB можно выразить из того же треугольника

$$OB = R \sin \delta.$$

В итоге $\cos \beta$ можно представить в виде:

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{при } |\delta| \leq |90^\circ - \varphi|. \quad (48)$$

При $\delta > 90^\circ - \varphi$, суточная параллель звезды целиком лежит над горизонтом ($\ell = 360^\circ$). При $\delta < -(90^\circ - \varphi)$ – суточная параллель лежит полностью под горизонтом ($\ell = 0^\circ$). Следовательно, итоговое выражение для длины дуги видимой части суточной параллели звезды (в северном полушарии) можно записать так:

$$\ell = \left\{ \begin{array}{ll} 360^\circ, & \text{при } \delta > 90^\circ - \varphi, \\ 360^\circ - 2 \arccos(\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi), & \text{при } |\delta| \leq |90^\circ - \varphi|, \\ 0^\circ, & \text{при } \delta < -(90^\circ - \varphi) \end{array} \right\}. \quad (49)$$

В случае наблюдателя, находящего в южном географическом полушарии ($\varphi < 0$), ответ для ℓ следует представить так

$$\ell = \left\{ \begin{array}{ll} 360^\circ, & \text{при } \delta < -(90^\circ + \varphi), \\ 360^\circ - 2 \arccos(\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi), & \text{при } |\delta| \leq |90^\circ + \varphi|, \\ 0^\circ, & \text{при } \delta > 90^\circ + \varphi \end{array} \right\}. \quad (50)$$

Следовательно, время прибытия звезды над горизонтом есть

$$\tau = \frac{\ell}{\omega_{\oplus}} = T_{\oplus} \left(\frac{\ell}{360^{\circ}} \right), \quad (51)$$

здесь $\omega_{\oplus}$, $T_{\oplus}$ – угловая скорость и период вращения земного шара.

Ответ: к задаче представлен системой выражений (49)-(51). (9 баллов).

Задача № 12. «Необычное превращение»

Решение. Система «Планета-спутник» в небесной механике называется пара тел, связанных гравитационными силами и являющаяся устойчивой физической системой, центр масс которой лежит внутри более массивного тела, являющегося планетой. Если центр масс расположен вне указанных тел, то данная пара тел-планет является «двойной планетой».

Определим на каком среднем расстоянии от центра Земли расположен центр масс системы. Для этого воспользуемся определением радиуса-вектора центра масс в произвольной системе отсчета:

$$\vec{R}_C = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus} \vec{r}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta} \vec{r}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}}, \quad (52)$$

здесь $\vec{r}_{\oplus}$, $\vec{r}_{\zeta}$ – радиусы-векторы данных тел в выбранной системе отсчета. Поместим начало отсчета в центр Земли, тогда $\vec{r}_{\oplus} = 0$. Спроецируем (52) на направление «Земля-Луна». Тогда (52) можно записать так

$$R_C^{(0)} = \frac{\mathfrak{M}_{\zeta} a_{\zeta}^{(0)}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}} = 4671 \text{ км}, \quad (53)$$

здесь $a_{\zeta}^{(0)}$ – большая полуось лунной орбиты в настоящий момент времени.

Следовательно от поверхности Земли, данная точка расположена на глубине:

$$h = \mathfrak{R}_{\oplus} - R_C = 1700 \text{ км}. \quad (54)$$

В системе отсчета, связанной с центром Земли, вычислим скорость центра масс системы, вычислив производную от радиуса-вектора (52) по времени (при $\vec{r}_{\oplus} = 0$):

$$\vec{V}_C = \frac{\mathfrak{M}_{\zeta} \vec{V}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}} = 4.86 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}. \quad (55)$$

Следовательно, искомый момент наступит через

$$\tau = \frac{h}{V_c} = 3.5 \text{ млрд. лет, где} \quad (56)$$

Удаление Луны от Земли обусловлено приливным взаимодействием, в результате которого происходит передача момента количества движения от

Земли к Луне, что приводит к увеличению ее расстояния от Земли и замедлению вращательного движения последней.

В момент, когда $R_C = \mathfrak{R}_{\oplus}$ большая полуось орбиты, с учетом (53), есть

$$\mathfrak{R}_{\oplus} = \frac{\mathfrak{M}_{\zeta} a_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}}, \Rightarrow \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{R_C^{(0)}} = \frac{a_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(0)}}, \Rightarrow a_{\zeta} = a_{\zeta}^{(0)} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{R_C^{(0)}} \right) = 524300 \text{ км.} \quad (57)$$

Сидерический период обращения системы определим с использованием третьего закона Кеплера:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \left(\frac{a_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(0)}} \right)^3, \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{a_{\zeta}}{a_{\zeta}^{(0)}} \right)^{3/2} = 43.52 \text{ сут,} \quad (58)$$

здесь $T_0 = 27.32$ сут – сегодняшний период обращения пары тел вокруг центра масс. Чтобы наблюдались полные солнечные затмения, необходимо чтобы минимальный угловой диаметр Солнца (достигаемый когда Земля находится в афелии) был не больше углового диаметра Луны. Определим данные величины

$$D''_{\zeta} = \frac{2\mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\zeta}} 3438' = 22.79'.$$

$$D''_{\odot \min} = \frac{2\mathfrak{R}_{\oplus}}{a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus})} 3438' = 31.44'.$$

Очевидно, что D''_{ζ} существенно меньше $D''_{\odot \min}$, следовательно к тому моменту полные солнечные затмения станут уже невозможными.

Ответ: к задаче представлен результатами (56), (57), (58); не будут. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Великое противостояние Марса и полное затмение Луны»

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$r_{\zeta} = 404180 \text{ км,}$ $r_{\odot} = 57.715 \cdot 10^6 \text{ км.}$	Поверхностной яркостью диска планеты (спутника) называется скалярная физическая величина, равная отношению количества энергии (ΔW), пришедшей к наблюдателю с телесного угла $\Delta \Omega$, соответствующего части видимого диска планеты, и прошедшей через площадку S за время Δt к величинам S, Δt и $\Delta \Omega$, т.е.
<u>Найти:</u> $\frac{B_{\odot}}{B_{\zeta}}, \frac{t_{\zeta}}{t_{\odot}} - ?$ $\mathfrak{M}_{\odot}^{(B)}, \mathfrak{M}_{\zeta}^{(B)} - ?$	

$$B = \frac{\Delta W}{S \cdot \Delta t \cdot \Delta \Omega} = \frac{E}{\Delta \Omega}, \quad (59)$$

здесь учтено, что E – освещенность, создаваемая данным телом, в точке, где находится наблюдатель, есть

$$E = \frac{\Delta W}{S \cdot \Delta t}. \quad (60)$$

Рассчитаем освещенность, создаваемую шарообразным небесным телом у поверхности Земли. Для этого заметим, что освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности небесного тела, можно записать так

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}, \quad (61)$$

здесь $L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26}$ Вт – светимость Солнца, r – гелиоцентрическое расстояние данного тела. Поток света, упавшего на тело, есть

$$\Phi_0 = E_{\odot} \cdot \pi \mathfrak{R}^2, \quad (62)$$

здесь $\mathfrak{R}$ – радиус шарообразного тела. Доля A (альбе́до) – этого потока отразится в космос. Полагая, что данное тело есть изотропный источник света, можем определить освещенность, создаваемую у поверхности Земли:

$$E = \frac{A \Phi_0}{4\pi \Delta^2} = \frac{L_{\odot} A \mathfrak{R}^2}{16\pi r^2 \Delta^2}. \quad (63)$$

Телесный угол под которым видно данное тело с Земли есть

$$\Delta\Omega = \frac{\pi \mathfrak{R}^2}{\Delta^2}, \quad (64)$$

тогда искомая поверхностная яркость запишется так

$$B = \frac{L_{\odot} A}{16\pi^2 r^2} = \frac{A E_{\odot}}{4\pi}, \quad (65)$$

т.о, искомая яркость зависит лишь от альбе́до данного тела и его гелиоцентрического расстояния. Тогда искомое отношение есть

$$\frac{B_{\sigma}}{B_{\zeta}} = \frac{A_{\sigma}}{A_{\zeta}} \left(\frac{a_{\oplus} + r_{\zeta}}{a_{\oplus} + r_{\sigma}} \right)^2 = 0.65. \quad (66)$$

Т.о, поверхностная яркость Марса была в 1.86 раза меньше поверхностной яркости Луны. Здесь $a_{\oplus}, a_{\sigma}$ – большие полуоси орбиты Земли и Марса соответственно.

В формуле (65) размерность B представлена в Вт/м²·срад. Учитывая, что 1 срад=41253 град², а 1 град²=(3600)² кв. угл. сек, тогда

$$B_{\zeta} = \frac{L_{\odot} \cdot A_{\zeta}}{16\pi^2 \cdot (a_{\oplus} + r_{\zeta})^2 \cdot 41253 \cdot (3600)^2} = 2.42 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{кв.угл.сек}}. \quad (67)$$

$$B_{\sigma} = 1.58 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{кв.угл.сек}}. \quad (68)$$

Соответствующие звездные величины есть

$$\left. \begin{aligned} m_{\zeta} &= m_0 + 2.5 \lg \left(\frac{E_0}{B_{\zeta}} \right) = 7.53^m / \text{кв.угл.сек} \\ m_{\sigma} &= m_0 + 2.5 \lg \left(\frac{E_0}{B_{\sigma}} \right) = 7.99^m / \text{кв.угл.сек} \end{aligned} \right\}, \quad (69)$$

здесь $m_0 = 0^m$ и E_0 соответствующая ей освещенность. Для получения качественной астрофотографии необходимо накопить определенное количество энергии на единице площади активной поверхности приемника излучения. Эту энергию согласно (60) можно представить так

$$\omega = \frac{W_{\zeta}}{S_{\zeta}} = \frac{W_{\sigma}}{S_{\sigma}}, \quad (70)$$

здесь W_{ζ}, W_{σ} – энергия, накопленная от данных источников на площадках S_{ζ}, S_{σ} , занимаемых изображениями этих объектов в фокусе объектива. Согласно (60) данные энергии представляются в виде:

$$W_{\zeta} = E_{\zeta} \cdot S_{\text{об}} \cdot \tau_{\zeta}, \quad W_{\sigma} = E_{\sigma} \cdot S_{\text{об}} \cdot \tau_{\sigma}, \quad (71)$$

здесь $S_{\text{об}}$ – площадь поверхности объектива, $\tau_{\zeta}, \tau_{\sigma}$ – искомые времена накопления сигнала. Учитывая также, что телесные углы для данных тел есть

$$\Omega_{\zeta} = \frac{S_{\zeta}}{F^2}, \quad \Omega_{\sigma} = \frac{S_{\sigma}}{F^2}, \quad (72)$$

здесь F – фокусное расстояние объектива. Тогда из (70) и (72) следует

$$\begin{aligned} \frac{E_{\zeta} \cdot S_{\text{об}} \cdot \tau_{\zeta}}{\Omega_{\zeta} \cdot F^2} &= \frac{E_{\sigma} \cdot S_{\text{об}} \cdot \tau_{\sigma}}{\Omega_{\sigma} \cdot F^2}, \Rightarrow B_{\zeta} \tau_{\zeta} = B_{\sigma} \tau_{\sigma}, \Rightarrow \\ \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{\zeta}} &= \frac{B_{\zeta}}{B_{\sigma}} = 1.53. \end{aligned} \quad (73)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (66), (69), (73). (\$_{\text{max}} = 11\$ баллов).

Задача № 14. «Солнечное гало на южном геополюсе»

Решение: Как известно, высота Солнца на южном географическом полюсе в полдень есть

$$h_{\odot}^{(\text{max})} = 90^\circ - \delta_{\odot} + \varphi_{\text{sp}}, \quad (74)$$

здесь $\varphi_{\text{sp}} = -90^\circ$ – широта данной точки, $\delta_{\odot}$ – склонение Солнца, принимающее значение из интервала

$$-\varepsilon \leq \delta_{\odot} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 23^\circ 26'.$$

Следовательно, во время полярного дня высота Солнца заключена в интервале:

$$0 \leq h_{\odot}^{(\max)} \leq \varepsilon. \quad (75)$$

Как известно, в атмосфере Земли можно наблюдать большое (с угловым радиусом $\rho_L = 46^\circ$) и малое солнечное гало (угловой радиус $\rho_S = 22^\circ$). Из рисунка очевидно, что нижняя часть гало находится ровно на горизонте, тогда с учетом (74) на фото запечатлено именно малое гало, а высота Солнца при этом $h_{\odot} \approx 22^\circ$, что достигается в окрестности дня зимнего солнцестояния. Определим искомые даты.

С использованием (74), получаем значения склонения Солнца на момент съемки.

$$\delta_{\odot} = +90^\circ - h_{\odot} + \varphi_{\text{sp}} = -22^\circ. \quad (76)$$

Далее необходимо определить даты, в которых склонение Солнца принимало значение (76). Для этого рассмотрим сферический треугольник $\Delta_s \Upsilon S Q$ – в вершинах, которого располагаются точка весны Υ , Солнце (S), точка пересечения круга склонения Солнца с экватором (Q), см. рис.(9). Воспользуемся формулой синусов для него:

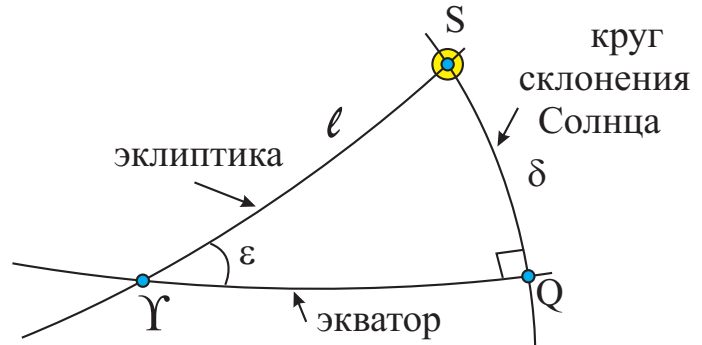


Рис. 9: к определению склонения Солнца.

Рис. 9: к определению склонения Солнца. Для этого рассмотрим сферический треугольник $\Delta_s \Upsilon S Q$ – в вершинах, которого располагаются точка весны Υ , Солнце (S), точка пересечения круга склонения Солнца с экватором (Q), см. рис.(9). Воспользуемся формулой синусов для него:

$$\sin \delta_{\odot} \cdot \sin 90^\circ = \sin \ell_{\odot} \cdot \sin \varepsilon, \Rightarrow \sin \delta_{\odot} = \sin \ell_{\odot} \cdot \sin \varepsilon, \Rightarrow$$

$$\delta_{\odot} = \arcsin[\sin \ell_{\odot} \cdot \sin \varepsilon], \quad (77)$$

здесь $\ell_{\odot} = \omega_{\odot} t$ – эклиптическая долгота Солнца, отсчитываемая от дня весеннего равноденствия, t – время от указанного момента, угловая скорость $\omega_{\odot}$ видимого движения Солнца по эклиптике есть

$$\omega_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\text{тр}}}, \quad T_{\text{тр}} = 365.24219 \text{ сут}, \quad (78)$$

где $T_{\text{тр}}$ – продолжительность тропического года. Из (77) следует

$$t = \frac{T_{\text{тр}}}{2\pi} \arcsin \left[\frac{\sin \delta_{\odot}}{\sin \varepsilon} \right] = -71.4 \text{ сут}.$$

Следовательно искомые моменты есть

$$t_1 = T_{\text{тр}} + t = 293.83 \text{ сут}, \quad t_2 = \frac{3}{4} T_{\text{тр}} - \left(t_1 - \frac{3}{4} T_{\text{тр}} \right) = \frac{1}{2} T_{\text{тр}} - t = 254.4 \text{ сут}.$$

То, указанные моменты наступают на 20 сут. раньше и позже дня зимнего солнцестояния. Если полагать, что последняя приходится на 22 декабря, то указанные даты есть 2 декабря и 11 января.

Ответ: 2 декабря; 11 января. (\$_{\max} = 12\$ баллов).

Задача № 15. «Две звезды, две светлых повести...»

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$N = 8,$ $a : b = 3 : 5,$ $c : d = 1 : 3,$ $\Delta t_A = \Delta t_B,$ $T_{\text{ris}} = 6^{\text{h}}40^{\text{m}},$ $m_A = 1.5^{\text{m}},$ $m_B = 2.5^{\text{m}}.$	Поскольку в данном пункте еще видна Полярная звезда, следовательно он расположен в северном полушарии. Так как Солнце попадает на круг склонения звезд 23 сентября – в день осеннего равноденствия, тогда прямое восхождение Солнца и звезд составляет $\alpha_{\odot} = \alpha_A = \alpha_B = 12^{\text{h}}00^{\text{m}}. \quad (79)$ Рассмотрим рис. 10.а), соответствующий условиям задачи. Определим склонение звезды В. Согласно рисунку, $OA = OP_N = \frac{1}{2}(a + b),$
<u>Найти:</u> $\alpha_A, \delta_A, \alpha_B - ?$ $\delta_B, \varphi, \lambda - ?$ $m_{\text{int}}(t) - ?$	

$$AB = CP_S - OP_S = b - \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(b - a), \Rightarrow$$

$$\sin \delta_B = \frac{AB}{OA} = \frac{b - a}{b + a} = \frac{1}{4}, \Rightarrow \delta_B = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = 14^{\circ}29' \quad (80)$$

Аналогично рассуждая, вычислим высоту звезды В в верхней кульминации:

$$\sin h_B = \frac{d - c}{d + c} = \frac{1}{2}, \Rightarrow h_B = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^{\circ}00' \quad (81)$$

Столь низкое положение околэкваториальной звезды в верхней кульминации достигается лишь на больших широтах. Следовательно, звезда В кульминировала к югу от зенита, тогда можно определить широту места наблюдения:

$$h_B = 90^{\circ} - \varphi + \delta_B, \Rightarrow$$

$$\varphi = 90^{\circ} - h_B + \delta_B = 74^{\circ}29'. \quad (82)$$

Определим долготу пункта наблюдения. Для этого учтем, что местное среднее солнечное время есть

$$T_{\text{m}} = T_0 + \lambda, \Rightarrow \lambda = T_{\text{m}} - T_0,$$

где T_0 – всемирное время. С другой стороны, его можно также представить через истинное солнечное время $T_{\odot}$ и уравнение времени:

$$T_{\text{m}} = T_{\odot} + \eta.$$

Следует также помнить, что 23 сентября Солнце располагается на небесном экваторе, и потому оно восходит в момент $T_{\odot} = 6^{\text{h}}$, при этом, согласно рис. А.2 приложения А.9, уравнение времени в этот день составляет $\eta = -8^{\text{m}}$. Декретное время восхода Солнца можно записать так

$$T_{\text{ris}} = T_0 + N + 1^{\text{h}}, \Rightarrow T_0 = T_{\text{ris}} - N - 1^{\text{h}}.$$

Из последних результатов следует окончательное выражение для долготы:

$$\lambda = T_{\odot} + \eta + N + 1^{\text{h}} - T_{\text{ris}} = 8^{\text{h}}12^{\text{m}} = 123^{\circ} \text{ в.д.} \quad (83)$$

Далее определим времена видимости данных звезд над горизонтом и склонение звезды А. Для этого рассмотрим рис.

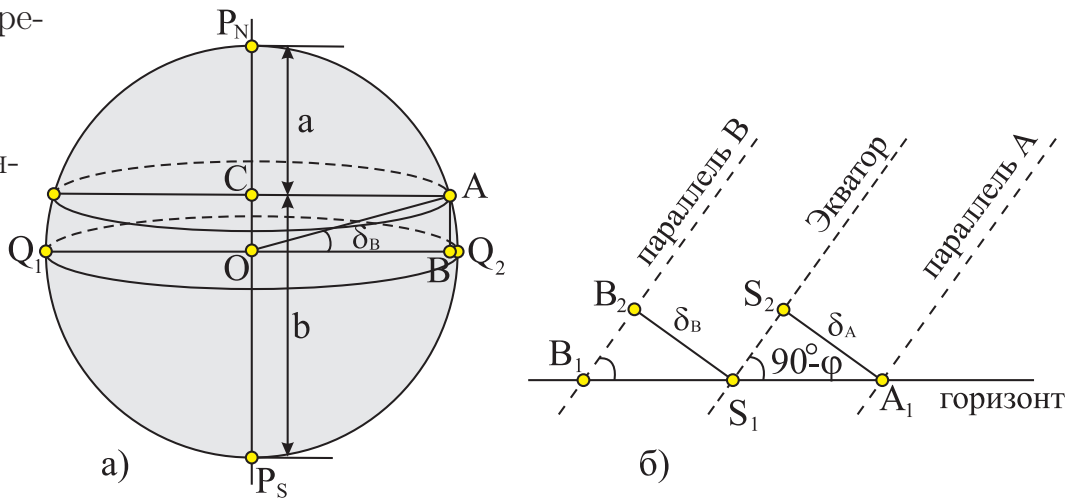


Рис. 10: к определению а) склонения звезды В, б) склонения звезды А.

10.б). Здесь

в момент времени t_0 в точке B_1 восходит звезда В и движется вдоль своей суточной параллели. В момент времени t_1 она попадает в точку B_2 и в тот же момент восходит Солнце в точке S_1 . В момент времени t_2 Солнце находится в точке S_2 и при этом наблюдается восход звезды А в точке A_1 . Из прямоугольных треугольников $\triangle B_1B_2S_1$ и $\triangle S_1S_2A_1$ следует, что

$$B_1B_2 = \delta_B \operatorname{tg} \varphi, \quad S_1S_2 = |\delta_A| \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{иначе } B_1B_2 = \omega_{\oplus} \cos \delta_B \Delta t_B, \quad S_1S_2 = \omega_{\oplus} \Delta t_A,$$

здесь $\Delta t_B = t_1 - t_0$, $\Delta t_A = t_2 - t_1$. Согласно условиям задачи, $\Delta t_B = \Delta t_A$, тогда

$$\frac{\delta_B \operatorname{tg} \varphi}{\cos \delta_B} = |\delta_A| \operatorname{tg} \varphi, \Rightarrow \delta_A = -\frac{\delta_B}{\cos \delta_B} = -14^{\circ}57'. \quad (84)$$

$$\Delta t_B = \Delta t_A = \frac{|\delta_A| \operatorname{tg} \varphi}{\omega_{\oplus}} = 3^{\text{h}}35^{\text{m}}. \quad (85)$$

Принимая во внимание, что время пребывания Солнца над горизонтом 23 сентября $\tau_{\odot} = 12^{\text{h}}$, а момент времени его захода по декретному времени, очевидно, $T_{\text{set}}^{(\odot)} = 18^{\text{h}}40$, тогда времена прямой видимости звезд над горизонтом

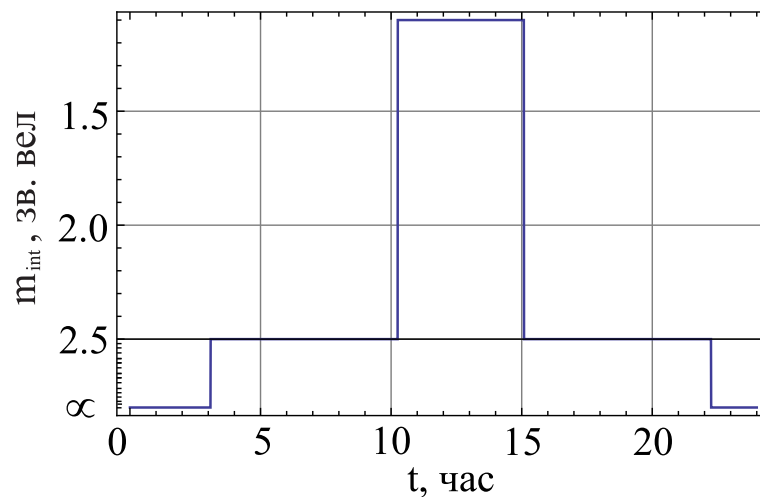


Рис. 11: зависимость интегральной видимой звездной величины m_{int} звезд А и В от времени t суток.

и моменты их восхода и захода есть

$$\tau_A = \tau_{\odot} - 2\Delta t_A = 4^{\text{h}}50^{\text{m}}, \quad \tau_B = \tau_{\odot} + 2\Delta t_B = 19^{\text{h}}10^{\text{m}}. \quad (86)$$

$$T_{\text{ris}}^{(A)} = 10^{\text{h}}15^{\text{m}}, \quad T_{\text{ris}}^{(B)} = 03^{\text{h}}05^{\text{m}}, \quad T_{\text{set}}^{(A)} = 15^{\text{h}}05^{\text{m}}, \quad T_{\text{set}}^{(B)} = 22^{\text{h}}15^{\text{m}}. \quad (87)$$

В случае, когда видна лишь звезда В, интегральная звездная величина этой пары есть $m_{\text{int}} = m_B = 2.5^{\text{m}}$. Если видны обе звезды, то

$$\begin{aligned} m_{\text{int}} &= m_B - 2.5 \lg \left(\frac{E_A + E_B}{E_B} \right) = m_B - 2.5 \lg \left(1 + \frac{E_A}{E_B} \right) = \\ &= m_B - 2.5^{\text{m}} \lg \left(1 + 10^{0.4(m_B - m_A)} \right) = 1.1^{\text{m}}. \end{aligned} \quad (88)$$

В итоге получаем

$$m_{\text{int}} = \left\{ \begin{array}{ll} \infty, & 0^{\text{h}}00^{\text{m}} \leq t < 03^{\text{h}}05^{\text{m}} \cup 22^{\text{h}}15^{\text{m}} < t < 24^{\text{h}}00^{\text{m}}. \\ 2.5^{\text{m}}, & 03^{\text{h}}05^{\text{m}} \leq t < 10^{\text{h}}15^{\text{m}} \cup 15^{\text{h}}05^{\text{m}} < t \leq 22^{\text{h}}15^{\text{m}}, \\ 1.1^{\text{m}}, & 10^{\text{h}}15^{\text{m}} \leq t \leq 15^{\text{h}}05^{\text{m}} \end{array} \right\}. \quad (89)$$

график зависимости для интегральной видимой звездной величины этой пары звезд, как функции времени представлен на рис. 11.

Ответ: к задаче представлен выражениями (79)-(80), (82)-(86) и рис. 11. ($\$_{\text{max}} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Погрешность определения азимута компасом»Дано:

$$\Delta h = 430 \text{ км},$$

$$\varepsilon = 9.63^\circ,$$

$$\varphi_N = 80.37^\circ,$$

$$\lambda_N = 287.38^\circ,$$

$$\varphi_S = -80.37^\circ,$$

$$\lambda_S = 107.38^\circ.$$

Найти:

$$\Delta A(\varphi, \lambda) - ?$$

Решение:

Как известно, свободно вращающаяся стрелка магнитного компаса всегда ориентируется вдоль направления вектора индукции ($\vec{B}_\oplus$) магнитного поля Земли, поскольку энергия взаимодействия стрелки с магнитным полем Земли в этом случае минимальна

$$U_B = -(\vec{p} \cdot \vec{B}_\oplus) = -\vec{p}_m \cdot B_\oplus \cos \alpha \quad (90)$$

если $\vec{p}_m$ – магнитный момент стрелки сонаправлен с $\vec{B}$, то $\alpha = 0$, тогда U_B принимает минимальное значение:

$$U_B^{\min} = -p_m \cdot B_\oplus. \quad (91)$$

Следовательно, в месте наблюдения необходимо определить направление вектора магнитной индукции, а точнее – его горизонтальной составляющей, поскольку магнитную стрелку компаса располагают, как правило, в плоскости математического горизонта.

Введем декартову систему координат так как показано на рис. 12. При чем ось OZ направим вдоль оси вращения Земли от южного к северному геополюсу.

Плоскость OXY совместим с экваториальной плоскостью Земли, причем ось OX проведем через точку A пересечения геоэкватора и нулевого (Гринвичского) меридиана. Тогда ось OY пройдет через точку экватора с долготой $+90^\circ$. Координаты произвольной точки (B) поверхности земного шара в этой системе можно задать набором координат (x, y, z) , которые можно представить через географические

$$\left. \begin{aligned} x &= R_\oplus \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \\ y &= R_\oplus \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \\ z &= R_\oplus \sin \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (92)$$

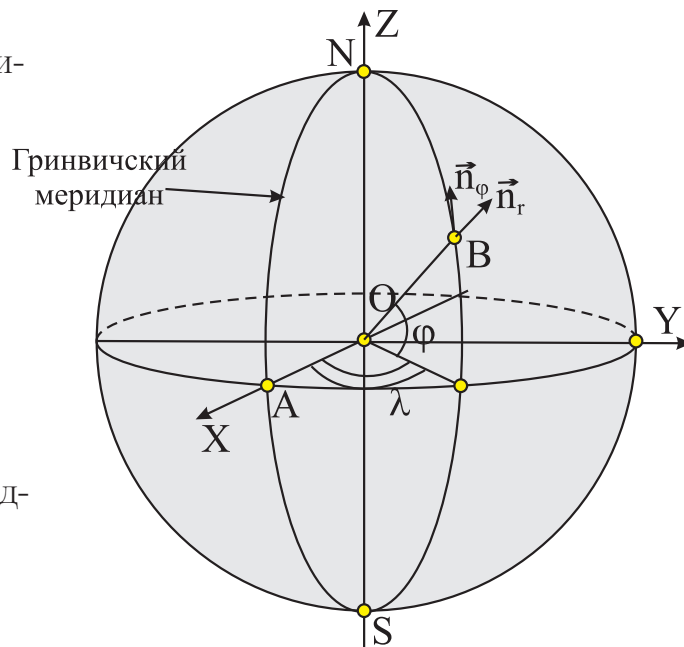


Рис. 12: к определению систем координат.

Определим орт $\vec{n}_r$ как единичный вектор, задающий направление геоцентрического радиуса-вектора точки B :

$$\vec{n}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos \varphi \cdot \cos \lambda, \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \sin \varphi), \quad (93)$$

здесь учтено, что $|\vec{r}| = \mathfrak{R}_\oplus$. Введем далее орт $\vec{n}_\varphi$, который будет перпендикулярен $\vec{n}_r$ (т.е. отвесной линии) и будет направлен по касательной к геомеридиану, в сторону увеличения геошироты. Нетрудно убедиться в том, что этот вектор, в данном месте, всегда будет направлен на точку севера.

Очевидно, что $\vec{n}_\varphi$ повернут на угол 90° в сторону северного геополюса относительно $\vec{n}_r$, тогда координаты вектора $\vec{n}_\varphi$ есть

$$\begin{aligned}\vec{n}_\varphi &= (\cos(90^\circ + \varphi) \cdot \cos \lambda, \cos(90^\circ + \varphi) \cdot \sin \lambda, \sin(90^\circ + \varphi)), \Rightarrow \\ \vec{n}_\varphi &= (-\sin \varphi \cos \lambda, -\sin \varphi \sin \lambda, \cos \varphi).\end{aligned}\quad (94)$$

Как известно, вектор магнитной индукции, создаваемой магнитным диполем $\vec{p}_\oplus$ можно записать так

$$\vec{B}_\oplus = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{p}_\oplus \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_\oplus}{r^3} \right). \quad (95)$$

Поскольку $\Delta h \ll \mathfrak{R}_\oplus$, то будем далее пренебрегать смещением диполя к востоку и будем считать, что центр диполя расположен в центре Земли. Поскольку диполь ориентирован своим концом на северный магнитный полюс магнита, который совпадают с южным геомагнитным полюсом, то координаты диполя в системе $OXYZ$ есть (по аналогии с вектором $\vec{r}$):

$$\vec{p}_\oplus = (p_\oplus \cos \varphi_S \cos \lambda_S, p_\oplus \cos \varphi_S \sin \lambda_S, p_\oplus \sin \varphi_S), \quad (96)$$

здесь $p_\oplus$ – величина магнитного диполя глобального магнитного поля Земли.

Тогда проекции вектора магнитной индукции, определенного в точке B поверхности Земного шара определяется так

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus^3} (s \cos \varphi \cos \lambda - \cos \varphi_S \cos \lambda_S), \\ B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus^3} (s \cos \varphi \sin \lambda - \cos \varphi_S \sin \lambda_S), \\ B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus^3} (s \sin \varphi - \sin \varphi_S) \end{aligned} \right\}, \quad (97)$$

где

$$\begin{aligned}s &= 3(\cos \varphi \cos \lambda \cos \varphi_S \cos \lambda_S + \cos \varphi \sin \lambda \cos \varphi_S \sin \lambda_S + \sin \varphi \sin \varphi_S) = \\ &= 3(\cos \varphi \cos \varphi_S \cos(\lambda - \lambda_S) + \sin \varphi \sin \varphi_S).\end{aligned}\quad (98)$$

Вектор магнитной индукции $\vec{B}_\oplus$, в данном месте поверхности Земли, можно разложить на 2 составляющих: $\vec{B}_\oplus^{(H)}$ горизонтальный и $\vec{B}_\oplus^{(V)}$ вертикальный

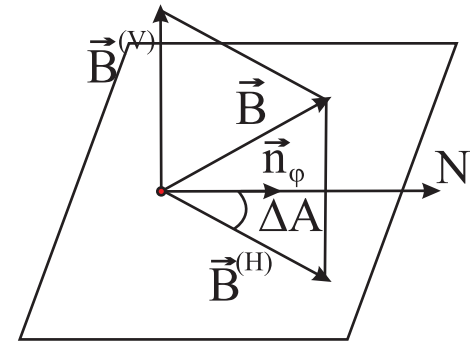


Рис. 13: к определению погрешности ΔA .

векторы. Вертикальный вектор можно определить как

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\oplus}^{(V)} &= (\vec{B}_{\oplus} \vec{n}_r) \vec{n}_r, \text{ или} \\ \vec{B}_{\oplus}^{(V)} &= (\tau \cos \varphi \cos \lambda, \tau \cos \varphi \sin \lambda, \tau \sin \varphi),\end{aligned}\quad (99)$$

$$\text{где } \tau = B_x \cos \varphi \cdot \cos \lambda + B_y \cos \varphi \cdot \sin \lambda + B_z \sin \varphi. \quad (100)$$

Тогда горизонтальную составляющую вектора $\vec{B}_{\oplus}$ можно записать так:

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\oplus}^{(H)} &= \vec{B}_{\oplus} - \vec{B}_{\oplus}^{(V)}, \text{ или в проекциях} \\ \left. \begin{aligned} B_{\oplus x}^{(H)} &= B_x - \tau \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \\ B_{\oplus y}^{(H)} &= B_y - \tau \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \\ B_{\oplus z}^{(H)} &= B_z - \tau \sin \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (101)\end{aligned}$$

Искомая погрешность определения азимута точки севера задается углом ΔA между векторами $\vec{n}_{\varphi}$ и $\vec{B}_{\oplus}^{(H)}$ (см. рис. 12):

$$\Delta A = \arccos \left[\frac{\vec{B}_{\oplus}^{(H)} \cdot \vec{n}_{\varphi}}{B_{\oplus}^{(H)}} \right], \text{ или} \quad (102)$$

$$\Delta A = \arccos \left[\frac{-B_{\oplus x}^{(H)} \sin \varphi \cos \lambda - B_{\oplus y}^{(H)} \sin \varphi \sin \lambda + B_{\oplus z}^{(H)} \cos \varphi}{B_{\oplus}^{(H)}} \right], \quad (103)$$

где

$$B_{\oplus}^{(H)} = \sqrt{(B_{\oplus x}^{(H)})^2 + (B_{\oplus y}^{(H)})^2 + (B_{\oplus z}^{(H)})^2}. \quad (104)$$

На рис. 14.а) представлена зависимость погрешности ΔA определения азимута точки севера от долготы пункта наблюдения для двух значений широты ($\varphi = 0^\circ$ – экватор, $\varphi = \varphi_S = 53^\circ 12'$ – широта г. Самары). Очевидно, что у данных кривых имеются два нулевых минимума (соответствующих долготам северного и южного магнитного полюса) и два максимума. В случае кривой для широты φ_S значения максимумов превосходят более чем в 1.5 раза соответствующие значения для кривой с $\varphi = 0$.

На рис. 14.б) представлена зависимость погрешности ΔA определения азимута точки севера от широты пункта наблюдения для двух значений долготы ($\lambda = 0^\circ$ – гринвичский меридиан, $\lambda = \lambda_S = 50^\circ 06'$ – долгота г. Самары). Очевидно, что данные кривые подобны по форме. Однако, в околополярных областях (в окрестности $\varphi = \pm 90^\circ$) погрешность на гринвичском меридиане существенно больше, чем на меридиане г. Самары, что продиктовано большей одновременной близостью его точек к географическому и магнитному полюсам.

Для большей полноты картины на рис. 15 представлен трехмерный плот зависимости погрешности ΔA определения азимута точки севера от долготы

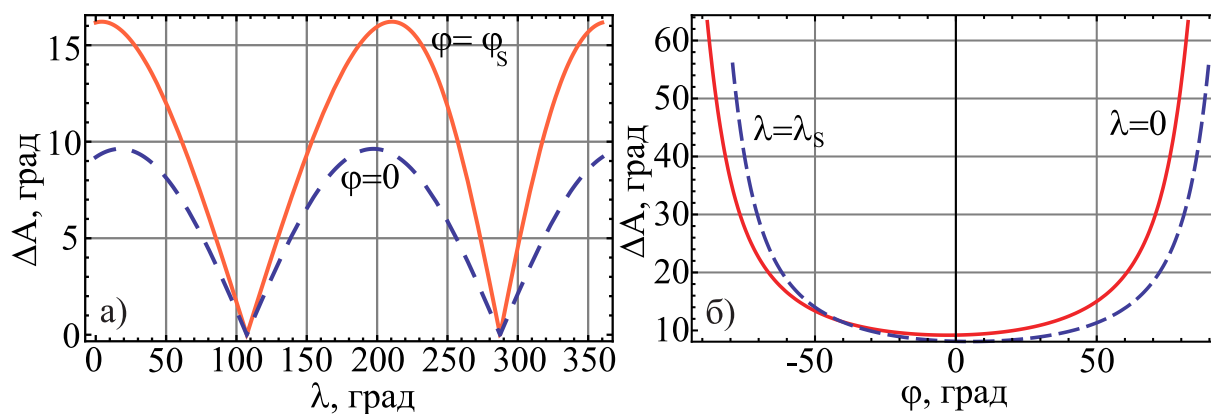


Рис. 14: зависимость погрешности ΔA определения азимута точки севера от а) долготы пункта наблюдения для двух значений широты ($\varphi = 0^\circ$ – экватор, $\varphi = \varphi_S = 53^\circ 12'$ – широта г. Самары); б) широты пункта наблюдения для двух значений долготы ($\lambda = 0^\circ$ – гринвичский меридиан, $\lambda = \lambda_S = 50^\circ 06'$ – долгота г. Самары).

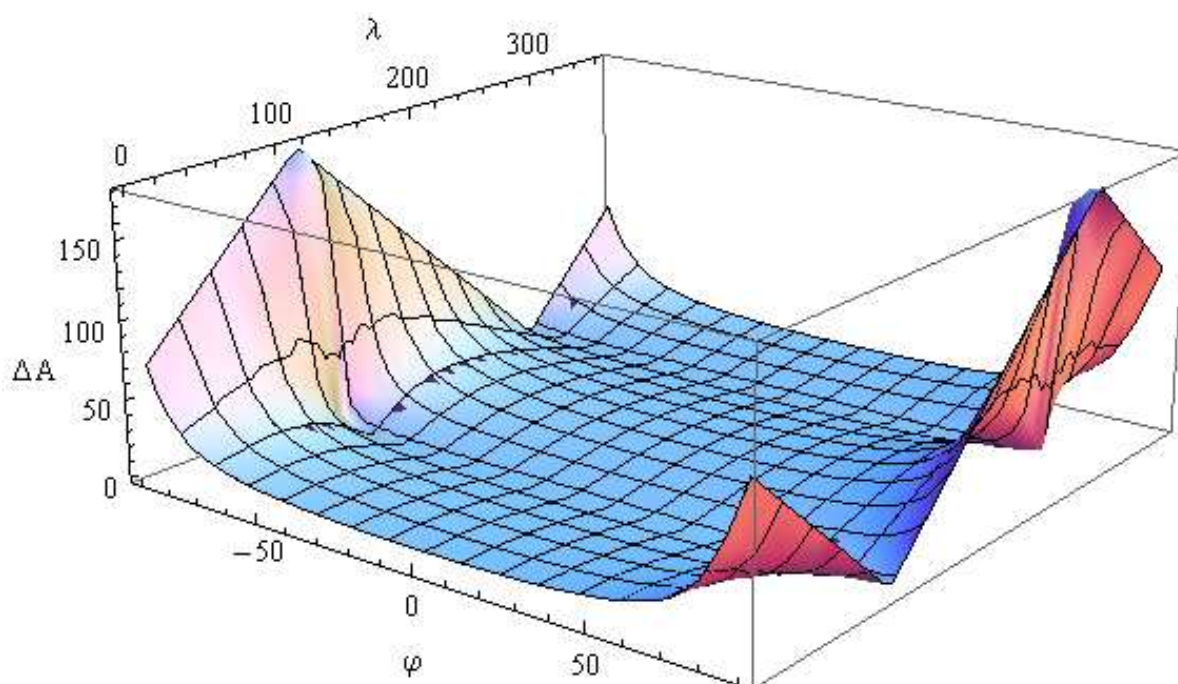


Рис. 15: зависимость погрешности ΔA определения азимута точки севера от долготы и широты пункта наблюдения на поверхности Земли.

и широты пункта наблюдения на поверхности Земли. Из рисунка очевидно, что наибольшее значение (180°) данная величина достигает точно на меридианах магнитных полюсов, между этими и географическими полюсами. Минимальное значение (0°) данная величина достигает на остальной части этих меридианов.

Ответ: к задаче представлен выражением (103). ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Эволюция системы WASP-12»

Решение. Заметим, что в системе наблюдается аккреция вещества на более массивное тело, при этом расстояние между звездой и планетой, сравнимо с размером самой звезды, а орбита относительного движения экзопла-

неты является круговой. Определим радиусы орбит этих тел относительно их центра масс.

Обозначим массы тел как $\mathfrak{M}_1 = M_*$ и $\mathfrak{M}_2 = M_p$ и будем считать, что в начальный момент времени радиус орбиты экзопланеты (2) относительно звезды (1) равен a . Поскольку оба тела должны вращаться вокруг центра масс этой системы, то радиусы орбит этих тел вокруг центра масс есть

$$a_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} a, \quad a_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} a. \quad (105)$$

Если орбитальный период системы P (в тот же момент времени), то линейные скорости движения тел легко вычисляются:

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}, \quad v_2 = \frac{2\pi a_2}{P}. \quad (106)$$

В процессе аккреции сохраняются масса и момент импульса системы. Поскольку мы рассматриваем перенос массы с экзопланеты на звезду, можно считать, что суммарная масса системы остается неизменной.

Закон сохранения полной механической энергии, в данном случае, очевидно, не выполняется. Газ, переместившийся с экзопланеты на звезду, сталкивается с телом последней неупругим образом, при этом какая-то часть механической энергии переходит в тепловую.

В рассматриваемой задаче момент импульса системы складывается из двух орбитальных моментов тел. Сразу же пренебрежем моментом импульса, создаваемым веществом аккреционного диска (находящимся "в пути" с экзопланеты на звезду) – его масса, явно, очень мала по сравнению с массами рассматриваемых тел. Однако и моменты, связанные с осевым вращением, также, явно, много меньше, чем орбитальные, поэтому мы ограничимся записью только суммарного орбитального момента импульса системы. Орбиты круговые, скорости всегда перпендикулярны радиус-векторам тел, поэтому выражение получается достаточно простым:

$$J = \mathfrak{M}_1 v_1 a_1 + \mathfrak{M}_2 v_2 a_2. \quad (107)$$

Преобразуем его, подставив выражения для скоростей звезд и радиусов их орбит. Получим

$$\begin{aligned} J &= 2\pi \left(\frac{\mathfrak{M}_1 a_1^2}{P} + \frac{\mathfrak{M}_2 a_2^2}{P} \right) = \frac{2\pi}{P} \left(\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2^2 a^2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2} + \frac{\mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_1^2 a^2}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)^2} \right), \Rightarrow \\ J &= \frac{2\pi \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 a^2}{P \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}. \end{aligned} \quad (108)$$

Далее воспользуемся III законом Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}, \Rightarrow a = \left(\frac{G P^2}{4\pi^2} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \right)^{1/3}. \quad (109)$$

Выразим из него большую полуось системы a и подставим в выражение для момента импульса

$$J = \frac{2\pi}{P} \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \left(\frac{G P^2}{4\pi^2} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \right)^{2/3}. \quad (110)$$

Именно эта величина и должна сохраняться в процессе аккреции. Можно заметить, что некоторые множители в данном выражении сохраняются сами по себе, в частности, не меняются константы и суммарная масса системы. Следовательно, константой должна быть величина $P^{1/3} \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$.

Теперь предположим, что за один миллион лет с экзопланеты на звезду переместилась масса $\Delta \mathfrak{M}$ (в нашей упрощенной модели масса фактически мгновенно пропадает на экзопланете и появляется на звезде). В результате, масса первого тела стала равной $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_1 + \Delta \mathfrak{M}$, а масса второго тела – $\mathfrak{M}'_2 = \mathfrak{M}_2 - \Delta \mathfrak{M}$. За то же время период системы поменялся на величину ΔP и стал равным $P + \Delta P$. Тогда

$$(P + \Delta P)^{1/3} (\mathfrak{M}_1 + \Delta \mathfrak{M}) (\mathfrak{M}_2 - \Delta \mathfrak{M}) = P^{1/3} \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2.$$

Отсюда

$$\frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_2 \Delta \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1 \Delta \mathfrak{M} + (\Delta \mathfrak{M})^2}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2} = \left(\frac{P}{P + \Delta P} \right)^{1/3}.$$

Заметим, что $\Delta P \ll P$ (что просто следует из условия), а переместившаяся за год масса $\Delta \mathfrak{M}$, очевидно, также намного меньше каждой из масс звезд. Поэтому в левой части равенства будем пренебрегать слагаемым, пропорциональным $\Delta \mathfrak{M}^2$, а правую перепишем в более удобном виде:

$$1 - \frac{(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2) \Delta \mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta P}{P}} \right)^{1/3}. \quad (111)$$

Известно, что при $x \ll 1$ справедливо приближение вида:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x, \Rightarrow \frac{1}{(1 + x)^{1/3}} = (1 + x)^{-1/3} \approx 1 - \frac{x}{3}.$$

С использованием последнего результата преобразуем правую часть равенства (111):

$$1 - \frac{(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2) \Delta \mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2} = 1 - \frac{1}{3} \frac{\Delta P}{P},$$

откуда выражаем

$$\frac{\Delta P}{P} = 3 \frac{\Delta \mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_2} \left(1 - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \right) = 0.301, \quad (112)$$

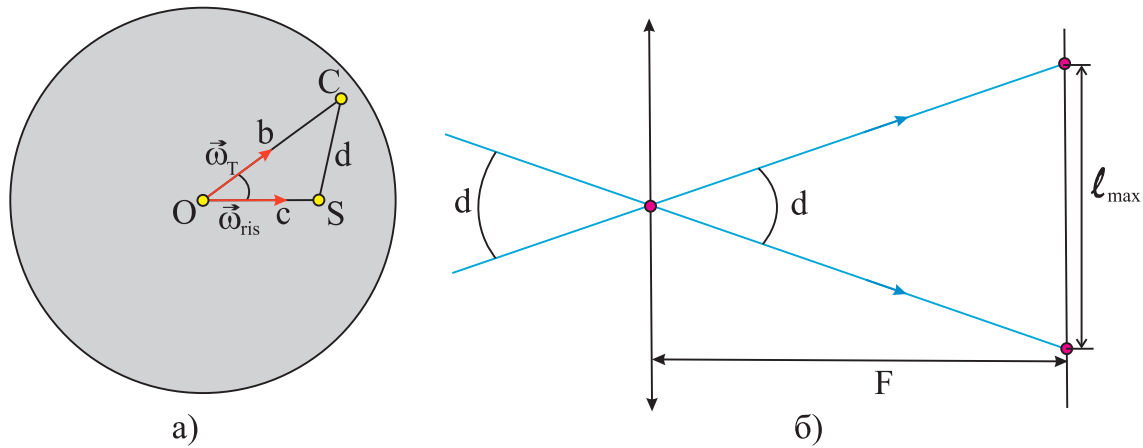


Рис. 16: к определению а) углового расстояния d , б) линейного расстояния $\ell_{\max}$.

здесь учтено, что за последующий один миллион лет

$$\Delta \mathfrak{M} = 8.4 \cdot 10^{12} \text{ кг/с} \cdot 3.155 \cdot 10^7 \text{ с} \cdot 10^6 = 2.65 \cdot 10^{26} \text{ кг}.$$

Из выражения (109) следует

$$P = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}} = 0.956 \text{ сут}, \Rightarrow \Delta P = 0.288 \text{ сут}. \quad (113)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (112), (113). ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Максимальное время выдержки для астрофотографии»

Решение. Будем полагать, что астроном-любитель сориентировал телескоп так, что данный звездоподобный объект попал точно в центр поля зрения телескопа (как показано на рис. 16.а), в точку O и при этом он включил монтировку-робот. Поскольку полюс полярной оси вращения не совпадают с осью мира, то центр поля зрения телескопа будет далее двигаться по дуге $\overset{\circ}{O}C$ малого круга, плоскость которого, перпендикулярна полярной оси монтировки телескопа (будем далее его называть *псевдопараллелью*).

Сам объект будет двигаться, в силу суточного вращения Земли, по суточной параллели $\overset{\circ}{O}S$. В момент времени $\tau_{\max}$ дуга $\overset{\circ}{C}S$ достигнет критического значения, при котором станет возможным наблюдать звездоподобный объект как неточечный, что положит начало смазу его образа. Очевидно, что треугольник $\Delta_S OCS$ является сферическим. Однако, искомое время $\tau_{\max}$ всегда много меньше звездного периода ($T_{\oplus}$) осевого вращения Земли, т.е. ($\tau_{\max} \ll T_{\oplus}$). Следовательно и дуги $\overset{\circ}{O}C$ и $\overset{\circ}{O}S$, пропорциональные $\tau_{\max}$, тоже можно считать малыми и отождествить с прямыми в картинной плоскости. Тогда ΔOCS можно считать плоским и для него применить теорему косинусов:

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad (114)$$

здесь $d = CS$, $b = OC$, $c = OS$. Причем

$$b = \omega_T \tau_{\max} \cos \delta'_*, \quad c = \omega_{\oplus} \tau_{\max} \cos \delta_*, \quad (115)$$

здесь $\omega_T = \omega_{\oplus} + \Delta\omega$ – угловая скорость вращения полярной оси монтировки, $\omega_{\oplus}$ – угловая скорость суточного вращения Земли, δ'_* – угловое расстояние (*псевдосклонение*) объекта от большого круга, перпендикулярного полярной оси телескопа (*псевдоэкватора*). Из (114) и (115) следует, что

$$d^2 = \tau_{\max}^2 [(\omega_T \cos \delta'_*)^2 + (\omega_{\oplus} \cos \delta_*)^2 - 2\omega_T \omega_{\oplus} \cos \delta'_* \cos \delta_* \cos \alpha], \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = \frac{d}{\sqrt{\omega_T^2 \cos^2 \delta'_* + \omega_{\oplus}^2 \cos^2 \delta_* - 2\omega_T \omega_{\oplus} \cos \delta'_* \cos \delta_* \cos \alpha}}, \quad (116)$$

здесь d, δ'_*, α подлежат определению.

1. Определим параметр

d . Для этого рассмотрим объектив (линза) и сенсор камеры (см. рис. 16.б). Согласно рисунку имеем

$$\ell_{\max} = d \cdot F, \quad (117)$$

где $\ell_{\max}$ – максимально допустимая длина трека, который оставляет объектив на сенсоре, при котором еще сохраняется "точечность" изображения объекта. Согласно теореме Котельникова для получения изображения точечной звезды

необходимо, как минимум, 3 пикселя. Если трек будет составлять 4 и более пикселей, то изображение станет неточечным. Пиксель сработает, если луч от объектива пройдет по нему более чем на половину.

Тогда максимальное допустимое значение $\ell_{\max} = 3.5 \cdot p$, где p – размер одного пикселя. Из последнего условия и выражения (117) следует, что

$$d = \frac{3.5 \cdot p}{F}. \quad (118)$$

Найдем размер одного пикселя, учитывая, что последний имеет форму квадрата. Поскольку размер сенсора камеры $a \times b$, то его площадь есть $S_c = a \cdot b$, $\Rightarrow$

$$S_0 = \frac{S_c}{N} = p^2, \quad (119)$$

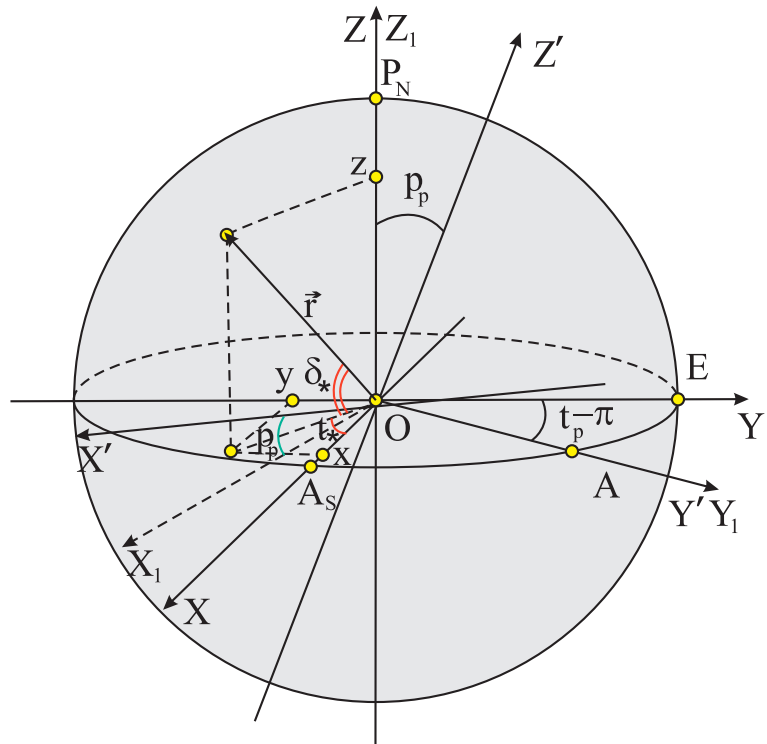


Рис. 17: к определению трех систем координат.

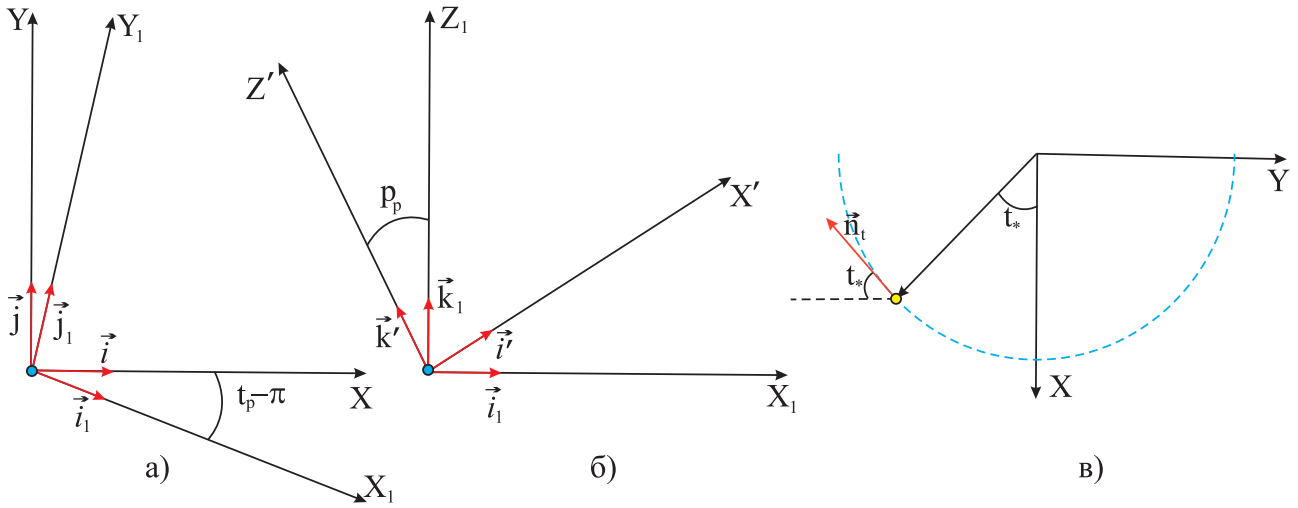


Рис. 18: к определению а) связи ортов систем OXY и OX_1Y_1 , б) связи ортов систем OX_1Y_1 и $OX'Y'$, в) ориентации вектора $\vec{n}_t$.

здесь S_0 – площадь одного пикселя. Из (119) следует, что

$$p = \sqrt{\frac{a \cdot b}{N}}. \quad (120)$$

Из (118) и (120) следует, что

$$d = \frac{3.5}{F} \sqrt{\frac{a \cdot b}{N}}. \quad (121)$$

2. Определим далее псевдосклонение δ'_* . Для этого введем декартову систему координат $OXYZ$ (см. рис. 17): ось OX направим на южную точку экватора (A_S), ось OY – на точку востока (E), а ось OZ – на северный полюс мира. Тогда положение точки на небесной сфере можно однозначно задать радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (x, y, z) = (R \cos \delta_* \cos t_*, -R \cos \delta_* \sin t_*, R \sin \delta_*), \quad (122)$$

здесь R – радиус небесной сферы δ_*, t_* – склонение и часовой угол звезды. Будем полагать, что направление оси OX задается единичным вектором $\vec{i}$ (не показаны на рисунке) оси OY – вектором $\vec{j}$, и оси OZ – вектором $\vec{k}$.

Введем новую систему координат $OX'Y'Z'$, ось OZ' которой сонаправлена с полярной осью монтировки телескопа и направлена на ее видимый полюс, ось OY' лежит в плоскости OXY (плоскости небесного экватора) и составляет угол $t_p - \pi$ с осью OY , а ось OX' составляет угол p_p с плоскостью небесного экватора. В данной системе координат радиус – вектор точки небосвода можно записать так

$$\vec{r} = (x', y', z') = (R \cos \delta'_* \cos t'_*, -R \cos \delta'_* \sin t'_*, R \sin \delta'_*). \quad (123)$$

Направление данных осей задаются векторами $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$. Очевидно, что переход от системы $OXYZ$ к системе $OX'Y'Z'$ можно выполнить в результате двух последовательных поворотов (см. рис. 17):

1) в плоскости экватора (OXY) на угол $(t_p - \pi)$ по часовой стрелке, если смотреть с полюса мира P_N на плоскость экватора;

2) в плоскости (OX_1Z_1) на угол p_p , по часовой стрелке, если смотреть с точки A .

Согласно рис. 18.а), орты системы $OXYZ$ связаны с орбитами системы $OX_1Y_1Z_1$ выражениями вида:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} &= \cos(t_p - \pi)\vec{i}_1 + \sin(t_p - \pi)\vec{j}_1, \\ \vec{j} &= -\sin(t_p - \pi)\vec{i}_1 + \cos(t_p - \pi)\vec{j}_1, \\ \vec{k} &= \vec{k}_1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{i} &= -\cos t_p \vec{i}_1 - \sin t_p \vec{j}_1, \\ \vec{j} &= \sin t_p \vec{i}_1 - \cos t_p \vec{j}_1, \\ \vec{k} &= \vec{k}_1. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Аналогично рассуждая, можно записать связь $OX_1Y_1Z_1$ с $OX'Y'Z'$ (см. рис. 18.б):

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_1 &= +\cos p_p \vec{i}' - \sin p_p \vec{k}', \\ \vec{j}_1 &= \vec{j}', \\ \vec{k}_1 &= \sin p_p \vec{i}' + \cos p_p \vec{k}'. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Из (124) и (125) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} &= -\cos t_p \cos p_p \vec{i}' - \sin t_p \vec{j}' + \cos t_p \sin p_p \vec{k}', \\ \vec{j} &= \sin t_p \cos p_p \vec{i}' - \cos t_p \vec{j}' - \sin t_p \sin p_p \vec{k}', \\ \vec{k} &= \sin p_p \vec{i}' + \cos p_p \vec{k}'. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Тогда связь координат систем $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$ есть

$$\begin{aligned} \cos \delta'_* \cos t'_* &= -\cos \delta_* \cos t_* \cos t_p \cos p_p - \cos \delta_* \sin t_* \sin t_p \cos p_p + \\ &+ \sin \delta_* \sin p_p = -\cos \delta_* \cos p_p \cos(t_p - t_*) + \sin \delta_* \sin p_p, \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} -\cos \delta'_* \sin t'_* &= -\sin t_p \cos \delta_* \cos t_* + \cos t_p \cos \delta_* \sin t_* = \\ &= -\cos \delta_* \sin(t_p - t_*), \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \sin \delta'_* &= +\cos \delta_* \cos t_* \cos t_p \sin p_p + \cos \delta_* \sin t_* \sin t_p \sin p_p + \sin \delta_* \cos p_p = \\ &= \cos \delta_* \sin p_p \cos(t_p - t_*) + \sin \delta_* \cos p_p. \end{aligned} \quad (129)$$

Из последнего выражения следует явное выражение для δ'_* .

$$\delta'_* = \arcsin[\cos \delta_* \sin p_p \cos(t_p - t_*) + \sin \delta_* \cos p_p]. \quad (130)$$

Из (127)-(128) следуют выражения для часового угла t'_* :

$$\sin t'_* = \frac{\cos \delta_* \sin(t_p - t_*)}{\cos \delta'_*}, \quad (131)$$

$$\cos t'_* = \frac{\sin \delta_* \sin p_p - \cos \delta_* \cos p_p \cos(t_p - t_*)}{\cos \delta'_*}. \quad (132)$$

Поскольку t'_* определен на интервале $0 \leq t'_* \leq 360^\circ$, то

$$t'_* = \begin{cases} t'_{*1}, & \text{при } \sin t'_* \geq 0, \cos t'_* \geq 0, \\ \pi - t'_{*1}, & \text{при } \sin t'_* \geq 0, \cos t'_* < 0, \\ \pi + |t'_{*1}|, & \text{при } \sin t'_* < 0, \cos t'_* < 0, \\ 2\pi - |t'_{*1}|, & \text{при } \sin t'_* < 0, \cos t'_* \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{здесь } t'_{*1} = \arcsin \left[\frac{\cos \delta_* \sin(t_p - t_*)}{\cos \delta'_*} \right]. \quad (133)$$

3. Определим угол α . Для этого определим единичные векторы, $\vec{n}_t$ и $\vec{n}'_t$ – касательные к суточной и псевдосуточной параллели в точке, где находится небесный объект. Согласно рис. 18.в) имеем

$$\left. \begin{aligned} \vec{n}_t &= -\sin t_* \vec{i} - \cos t_* \vec{j} \\ \vec{n}'_t &= -\sin t'_* \vec{i} - \cos t'_* \vec{j} \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Очевидно, угол между данными векторами и есть искомый угол α ; тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= (\vec{n}_t \cdot \vec{n}'_t) = -\sin t_* \cos t_p \cos p_p \sin t'_* - \sin t_* \sin t_p \cos t'_* + \\ &+ \cos t_* \sin t_p \cos p_p \sin t'_* - \cos t_p \cos t_* \cos t'_* = \cos p_p \sin t'_* \sin(t_p - t_*) - \\ &- \cos t'_* \cos(t_p - t_*). \end{aligned}$$

В итоге

$$\alpha = \arccos [\cos p_p \sin t'_* \sin(t_p - t_*) - \cos t'_* \cos(t_p - t_*)]. \quad (135)$$

На рис. 19 представлены 3D-плоты зависимости времени $\tau_{\max}$ от параметров (p_p, t_p) , для звезды с координатами $(\delta_* = 0^\circ, t_* = 0^\circ)$ и четырех значений $\Delta\omega$. Очевидно, что с уменьшением $\Delta\omega$ время выдержки возрастает от 1.5 с до более чем 100 с. При этом области, где $\tau_{\max}$ достигает максимального значения, становятся все более узкими, "поджимаясь" к значениям $t_p = 0^\circ$ и 180° .

На рис. 20 представлены 3D-плоты зависимости времени $\tau_{\max}$ от параметров (p_p, t_p) , для звезды с координатами $(\delta_* = 45^\circ, t_* = 0^\circ)$ и четырех значений $\Delta\omega$. Очевидно, что при значениях $\Delta\omega = (\frac{1}{150} \div \frac{1}{15})\omega_\oplus$ наблюдается явление, аналогичное резонансу (в случае вынужденных колебаний), при $t_p = 0^\circ$ и малых значениях p_p . Это легко объясняется почти полным совпадением скоростей видимого суточного движения светила и скорости вращения головы монтировки. Причем при $\Delta\omega = \frac{1}{15}\omega_\oplus$ время выдержки в режиме резонанса может достигать более 1.1 часа! Т.е., при правильной ориентации монтировки, даже при значительных погрешностях скорости ведения ее двигателя, для звезды в меридиане можно достичь значительного времени выдержки!

На рис. 21 представлены 3D-плоты зависимости времени $\tau_{\max}$ от параметров (p_p, t_p) , для звезды с координатами $(\delta_* = 85^\circ, t_* = 0^\circ)$ и четырех значений

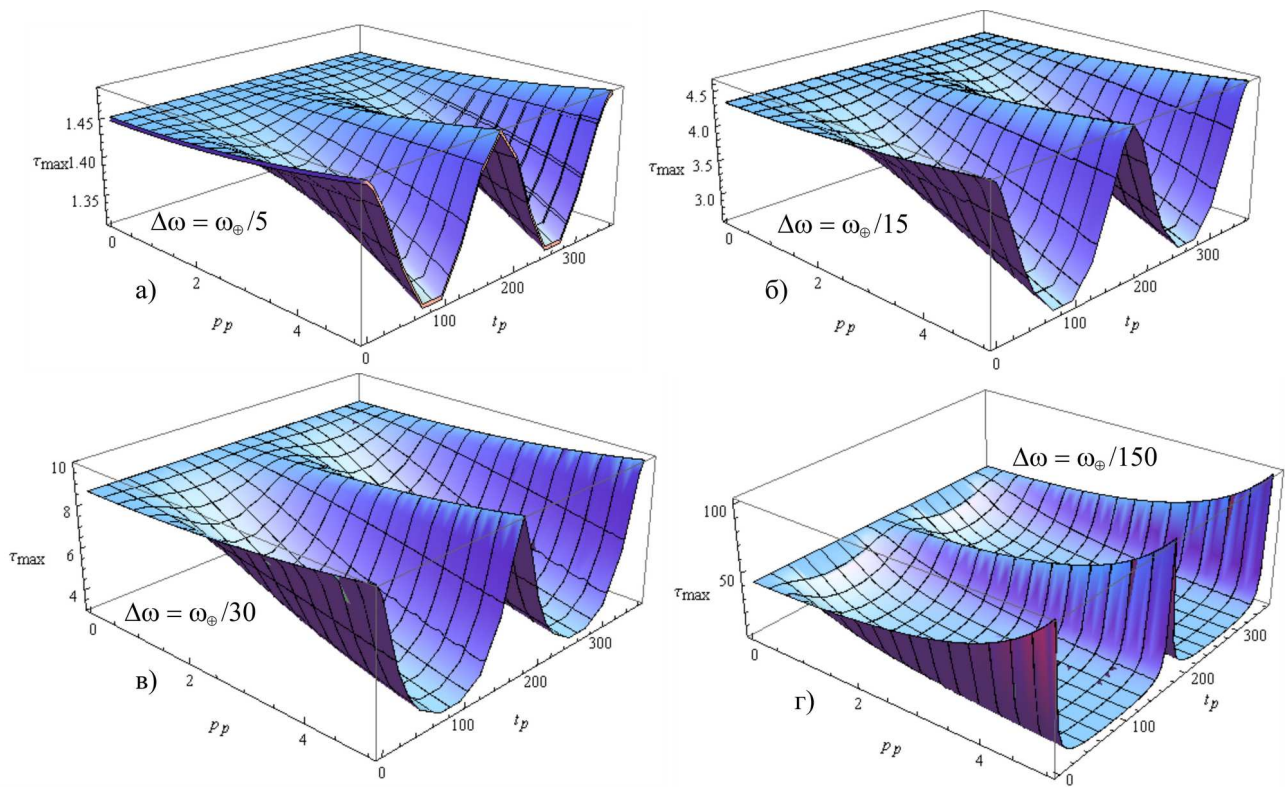


Рис. 19: к определению зависимости времени $\tau_{\max}$ от параметров (p_p, t_p) , для звезды с координатами $(\delta_* = 0^\circ, t_* = 0^\circ)$, при а) $\Delta\omega = \omega_\oplus/5$, б) $\Delta\omega = \omega_\oplus/15$, в) $\Delta\omega = \omega_\oplus/30$, г) $\Delta\omega = \omega_\oplus/150$.

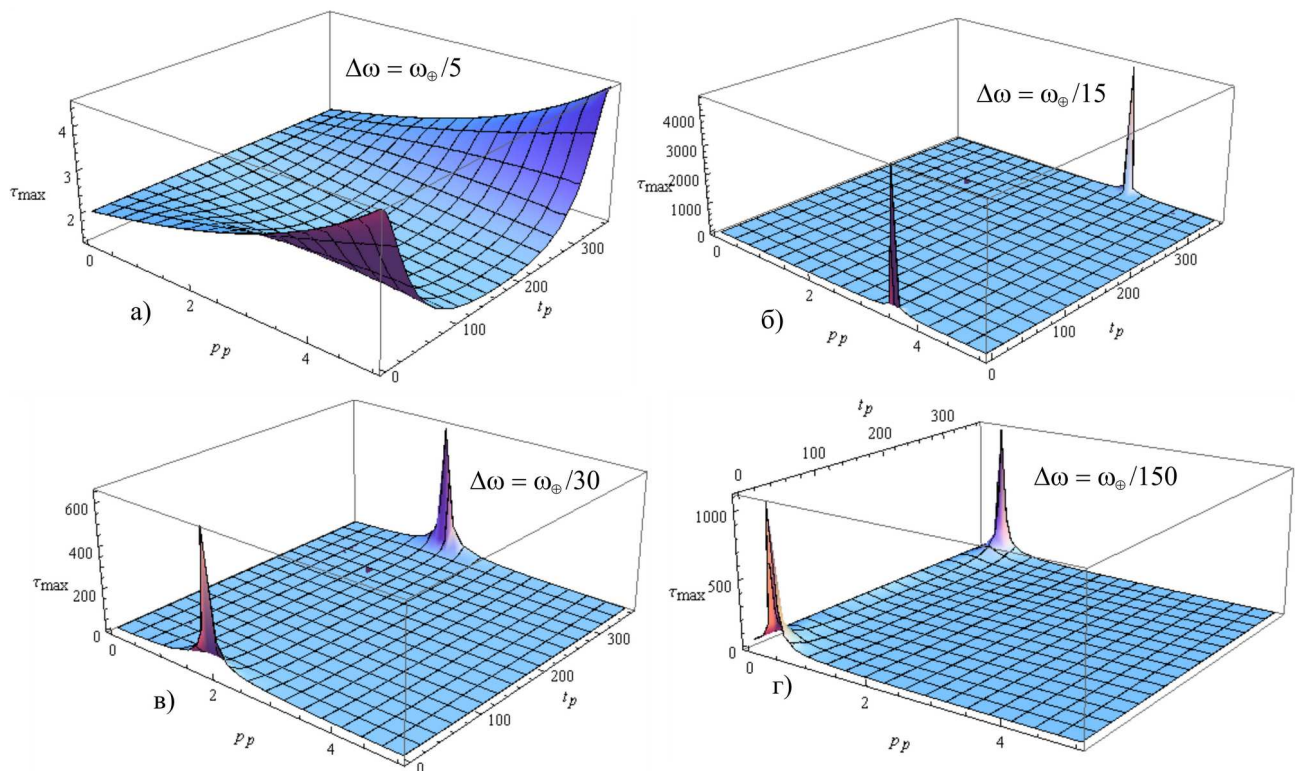


Рис. 20: к определению зависимости времени $\tau_{\max}$ от параметров (p_p, t_p) , для звезды с координатами $(\delta_* = 45^\circ, t_* = 0^\circ)$, при а) $\Delta\omega = \omega_\oplus/5$, б) $\Delta\omega = \omega_\oplus/15$, в) $\Delta\omega = \omega_\oplus/30$, г) $\Delta\omega = \omega_\oplus/150$.

$\Delta\omega$. Нетрудно видеть, что и здесь, в случае $\Delta\omega = (\frac{1}{5} \div \frac{1}{30})\omega_\oplus$, наблюдается явление "резонанса". Причем по мере уменьшения $\Delta\omega$ резонансный пик

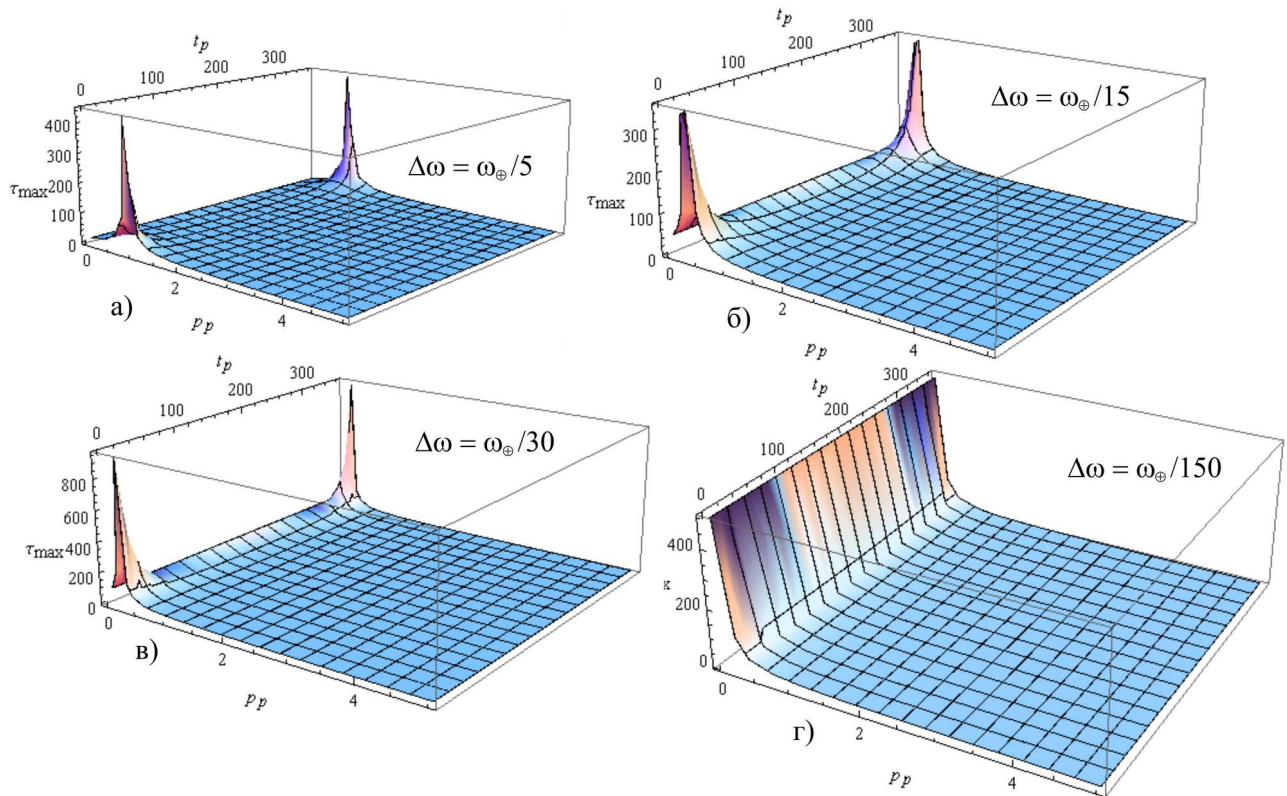
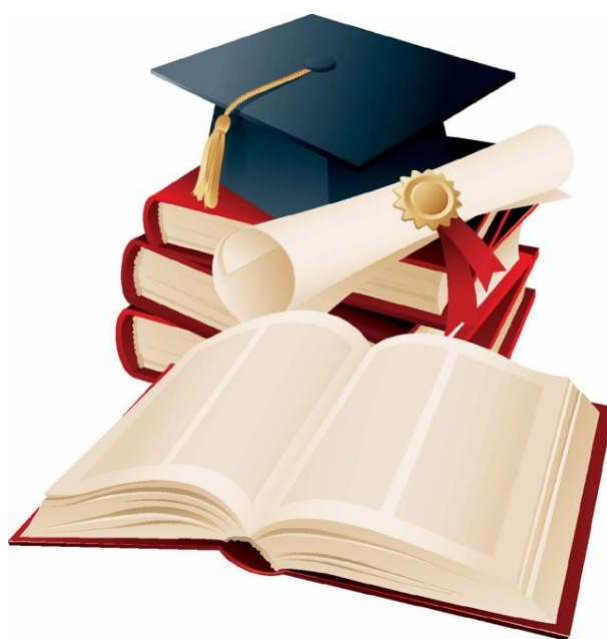


Рис. 21: к определению зависимости времени $\tau_{\max}$ от параметров (p_p, t_p) , для звезды с координатами $(\delta_* = 85^\circ, t_* = 0^\circ)$, при а) $\Delta\omega = \omega_{\oplus}/5$, б) $\Delta\omega = \omega_{\oplus}/15$, в) $\Delta\omega = \omega_{\oplus}/30$, г) $\Delta\omega = \omega_{\oplus}/150$.

"дрейфует" в сторону меньших значений p_p . При значениях $\Delta\omega = \frac{1}{150}\omega_{\oplus}$ он превращается в сплошной однородный "барьер" с высотой более 400 сек.

Ответ: к задаче представлен выражением (116), и 3D-плотами 19-21. ($\$_{\max} = 15$ баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Экс- цен- триси- тет	Наклон к плоскости эклипти- ки	Период обраще- ния	Синоди- ческий период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плот- ность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плос- кости орбиты	Гео- мет- рич. альбе- до	Вид. звезд- ная вели- чина*
	кг	массы Земли	км	ради- усы Зем- ли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

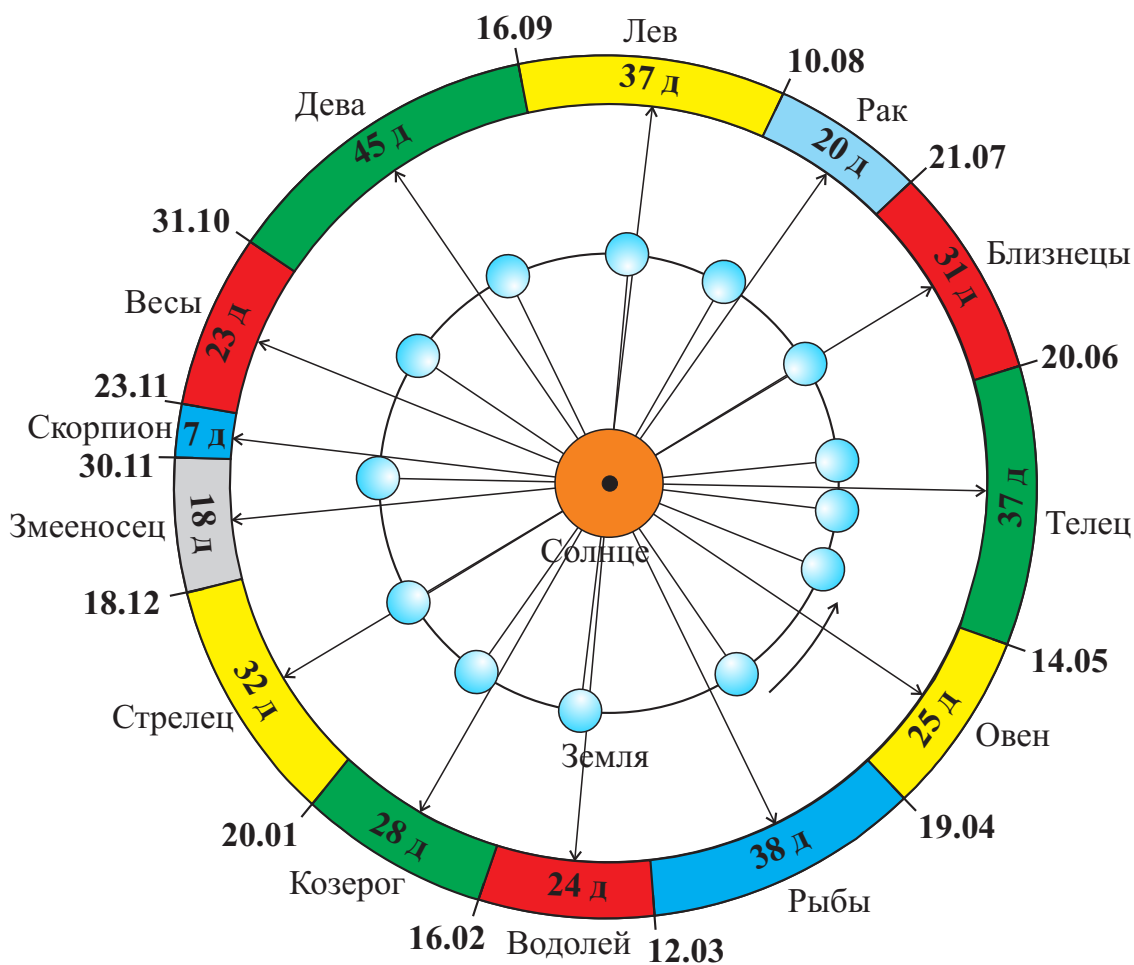


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

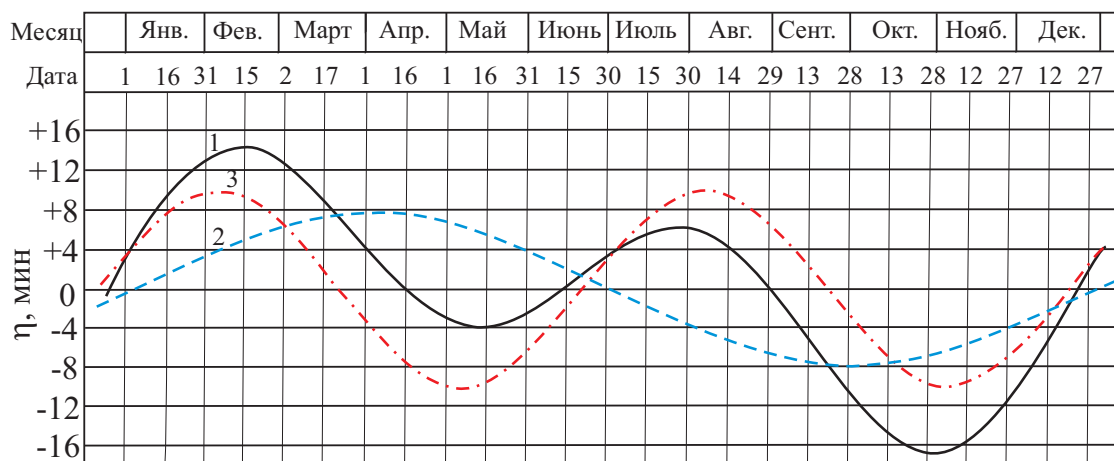


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

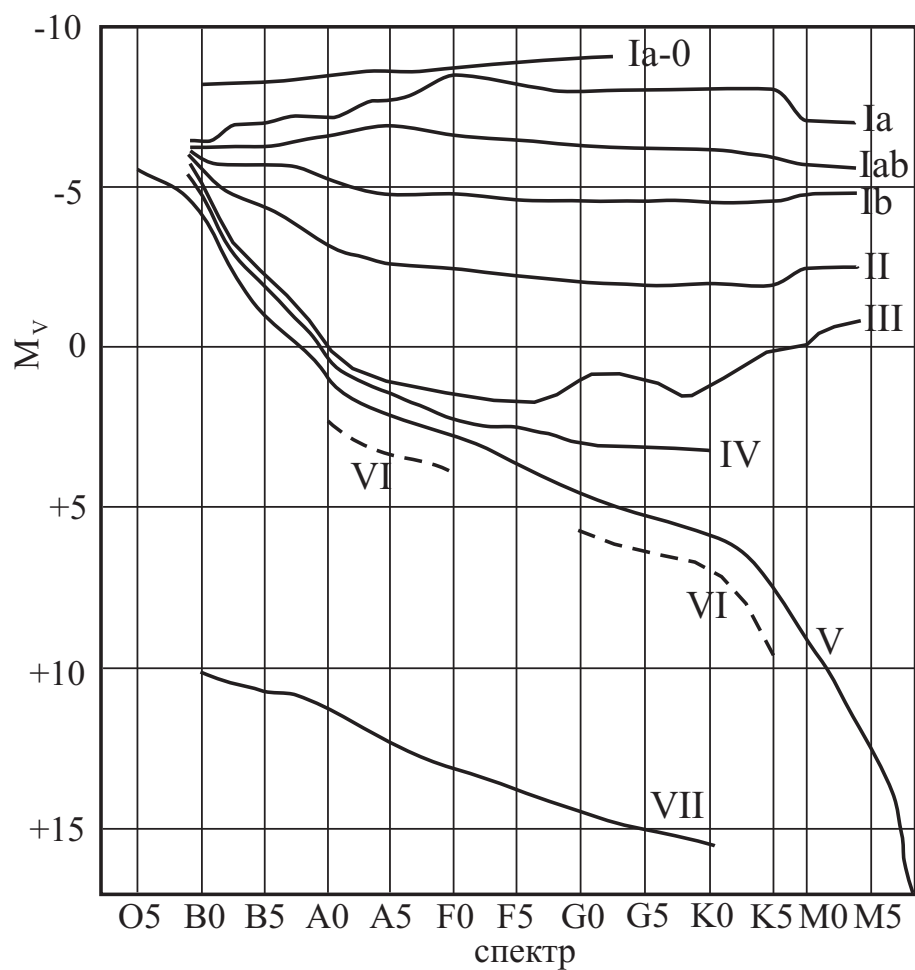


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

[illegible]

Рис. А.4. Таблица Менделеева.