

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2019
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ.
ТУР № 2



Самара, 2019 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 18 оригинальных задач трех уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В) и «Профи» (уровень С). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 8-9 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2019 среди обучающихся 8-9 классов. Тур № 2». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/solutions>

Автор задач – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СДДЮТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе *ИТ_ЕХ* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника SamRAS-2019

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

<http://vk.com/samrasolimp>

3. Сроки подачи работ SamRAS-2019 тура № 2 на проверку:

15.02.2019-15.05.2019!!!

4. Электронный ящик SamRAS-2019:

samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2019:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

https://vk.com/doc-57032141_451699934

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2019, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2019»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника**.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Замечательная точка небосвода»

Какая точка небосвода занимает наивысшее положение над горизонтом? Полусом какого большого круга небесной сферы она является? Чему равно склонение звезды, которая кульминирует в этой точке? (3 балла).

Задача № 2. «Видна - не видна»

Как известно, у молодой или старой Луны неосвещенная Солнцем часть поверхности видна в пепельном свете. А во время солнечного затмения неосвещенная Солнцем часть вовсе не видна. Объясните столь разительное отличие наблюдаемых картин. (3 балла).

Задача № 3. «Полосатый Юпитер»

Чем обусловлены оранжевый цвет и полосатая структура "поверхности" Юпитера (см. рис. 1)? Что представляет собой Большое красное пятно на Юпитере? Какое количество лет оно наблюдается с Земли? (3 балла).

Задача № 4. «"Туманность Андромеды" и двойная звезда»

В научно-фантастическом романе Ефремова И.А. «Туманность Андромеды» эта физически двойная звезда упоминается как «красавица – двойная звезда». Здесь же сказано, что эта звезда находится на почти таком же расстоянии от Земли, как и одна из звезд летнего треугольника. О какой звезде шла речь в романе? Что вы можете сказать о цветах ее видимых компонент? Какое угловое расстояние между ее видимыми компонентами сегодня? В какие инструменты ее можно увидеть как двойную систему? (4 балла).

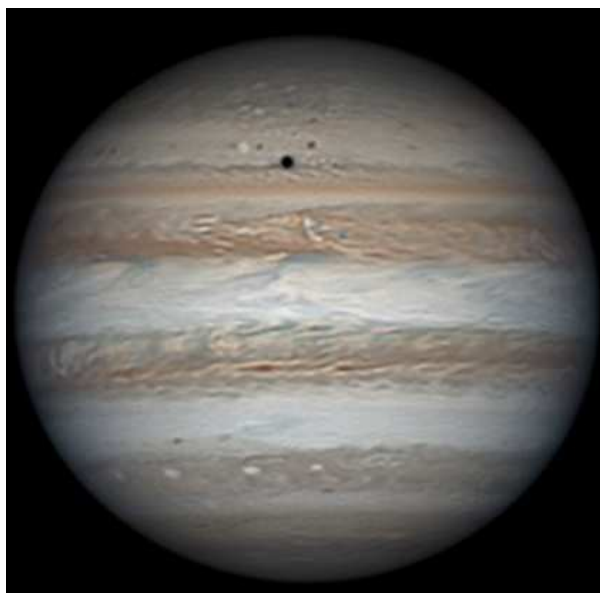


Рис. 1: фотография Юпитера, полученная в момент прохождения по его диску спутника.

Задача № 5. «Солнечное затмение»

На рис. 2 представлена серия фотографий затмения Солнца. Какой вид затмения запечатлен на фотографии? Оцените максимальную величину фазы затмения Солнца. (4 балла).

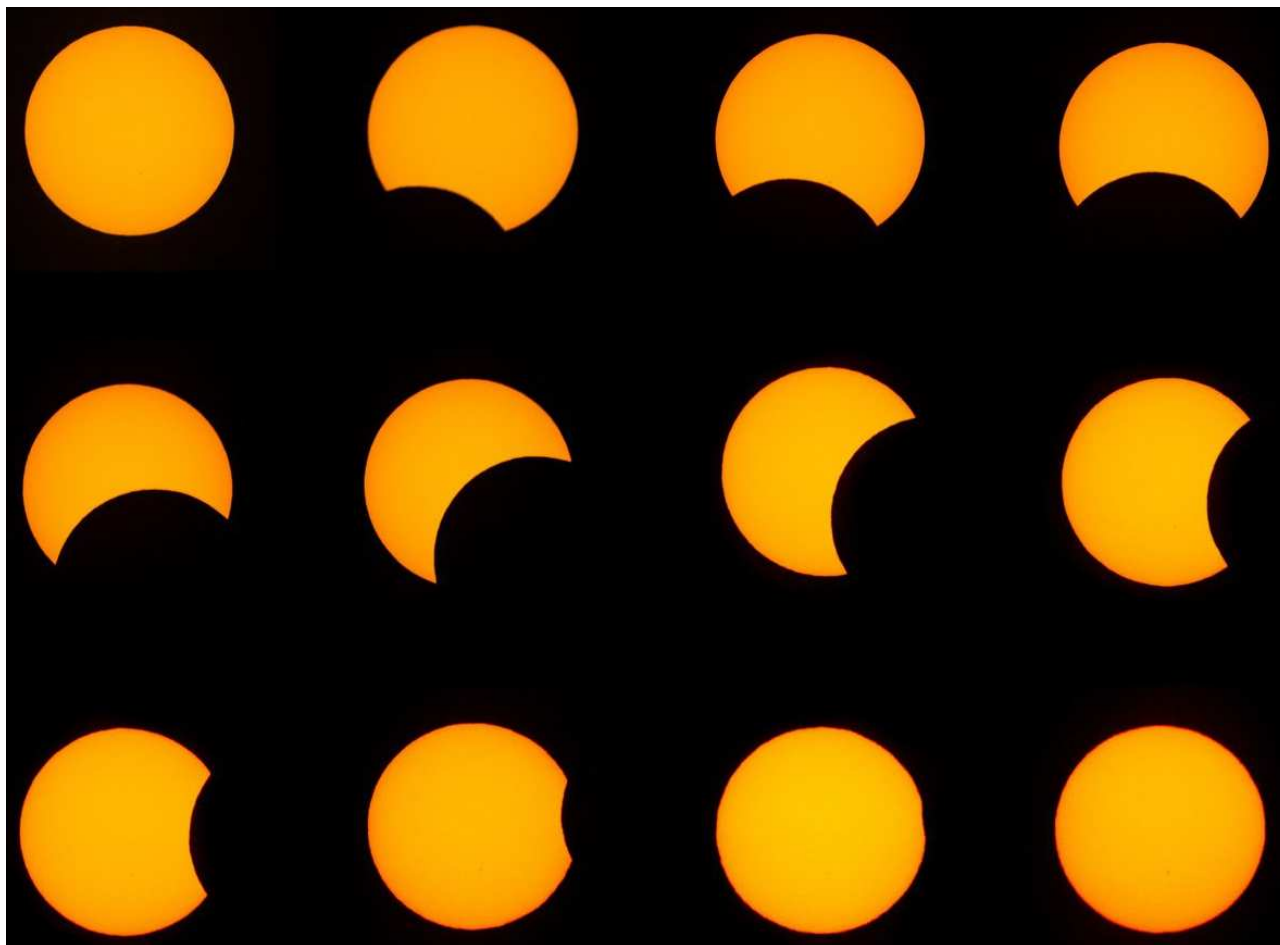


Рис. 2: серия фотографий солнечного затмения.

Задача № 6. «Тень спутника на Юпитере»

Оцените планетоцентрическую (аналог географической) широту геометрического центра тени спутника (черный кружок на диске гиганта), проходящего по диску материнской планеты. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)**Задача № 7. «Монумент ракеты-носителя "Союз" и длина его тени»**

В Самаре, в честь юбилея полета Юрия Гагарина в космос, установлен Монумент ракета-носитель "Союз" музейно-выставочного центра "Самара Космическая". Высота ракеты составляет 65 м, а диаметр ее цилиндрической части – корпуса – $D = 3.0$ м. В какой день года, длина тени, отбрасываемой ракетой в ясный полдень, будет минимальной? Максимальной? Определите соответствующие значения длины тени. Широта г. Самары равна $\varphi = 53^\circ 12'$. (6 баллов).

Задача № 8. «Продолжительность солнечного затмения»

С использованием серии фотографий солнечного затмения, представленных на рис. 2, оцените его полную продолжительность. Собственным движением Солнца в течение затмения в направлении, перпендикулярном лунному, следует пренебречь. (7 баллов).

Задача № 9. «Прохождение неизвестного спутника по диску материнской планеты»

Астрономом-любителем получена фотография (см. рис. 1) прохождения одного из галилеевых спутников по диску Юпитера. Используя лишь образ тени спутника (черный кружок на диске гиганта) определите, какой именно спутник запечатлен на фотографии? (8 баллов).

Задача № 10. «Третий обобщенный закон Кеплера для двух пар тел»

С использованием второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения, докажите, что для двух пар гравитирующих тел с массами $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ и $(\mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4)$, движущихся вокруг их центров масс, по круговым орбитам, с периодами T_1 и T_2 , и удаленных друг от друга на расстояния a_1 и a_2 соответственно, справедлив третий обобщенный закон Кеплера в виде:

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)T_1^2}{(\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4)T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (1)$$

Предположим, что второй парой тел является система «Солнце-Земля» с периодом $T_{\oplus} = 1$ год, и большой полуосью относительного движения $a_{\oplus} = 1$ а.е., а первой парой тел является двойная звезда. Полагая, что массы звезд выражаются в массах Солнца, период обращения в годах, а расстояние a_1 – в а.е., докажите, что закон (11) можно записать в виде:

$$\tilde{\mathfrak{M}}_1 + \tilde{\mathfrak{M}}_2 = \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{T}^2}, \quad (2)$$

здесь знаком « $\sim$ » отмечены безразмерные величины, соответствующие размерным, в указанных выше единицах. (8 баллов).

Задача № 11. «Транзит небесного тела»

На рис. 3 представлена фотография транзита небесного тела по диску Солнца. Определите, какое именно тело испытало транзит? Свою точку зрения обоснуйте строго математически. (9 баллов).

Задача № 12. «Расстояния до небесного тела и время транзита»

С использованием рис. 3, оцените а) геоцентрическое и гелиоцентрическое расстояния до данного небесного тела; б) время транзита небесного тела по диску Солнца (см. рис. 3), если известно, что данное тело двигалось параллельно нижней горизонтальной границе рисунка, слева направо. (10 баллов).



Рис. 3: фотография транзита небесного тела по диску Солнца.

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Знаки зодиака и движение Солнца»

В астрологии и сегодня активно используются **знаки зодиака** – это 12 одинаковых секторов небесной сферы, с вершинами в полюсах эклиптики, каждый протяженностью 30° вдоль эклиптики. Нахождение небесного тела в том или ином знаке зодиака определяется лишь его эклиптической долготой. Началом зодиакального круга считается точка весеннего равноденствия (Υ), а первым знаком зодиака, тот знак, в котором находится эта точка. Далее, знаки следуют по ходу годового движения Солнца. Классическая зодиа-

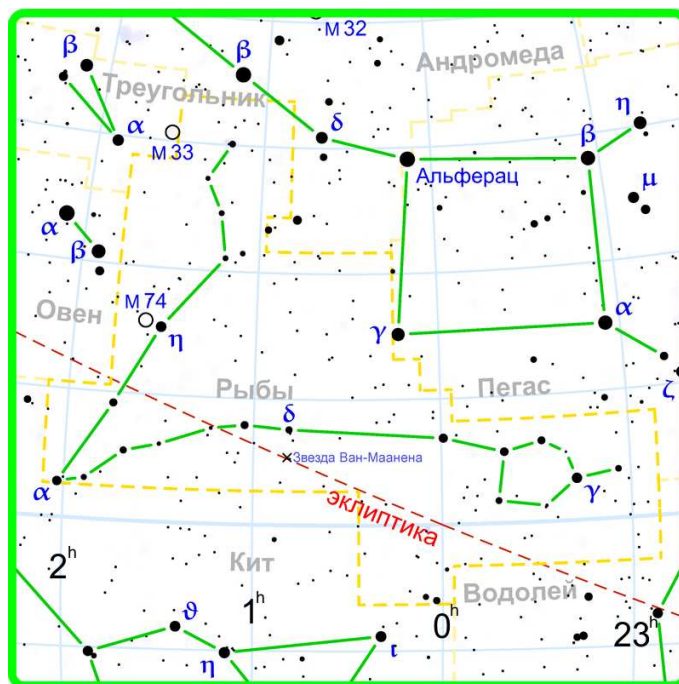


Рис. 4: созвездие Рыбы и положение эклиптики.

кальная система складывалась много лет тому назад, когда точка весеннего равноденствия находилась в созвездии Овна (в настоящее время она находится в созвездии Рыбы, см. рис. 4), и зодиакальные знаки были названы по находившимся в соответствующих секторах созвездиям. Фактически, в эпоху Овна понятия зодиакального созвездия и знака не различались. В настоящее

время Солнце попадает в определенный знак Зодиака на $2 \div 5$ недель раньше, чем доберется до одноименного созвездия. Ответьте на следующие вопросы:

1. Какая главная причина сдвига знаков Зодиака относительно созвездий? В чем суть данного явления? (1 балл).
2. Оцените даты начала и окончания эпохи Овна, в рамках которой формировалась классическая зодиакальная система, если скорость движения точки весны по эклиптике составляет $\omega_{\gamma} = 50.25''/\text{год}$? (3 балла).
3. Современные созвездия – это участки небесной сферы со всеми проецируемыми на него, с точки зрения земного наблюдателя, небесными объектами. Современные астрономы делят все небо на 88 созвездий, границы между которыми проведены в виде ломаных линий по дугам небесных параллелей и кругов склонения в системе экваториальных координат эпохи 1875 года. Определите, чему равно смещение современной сетки экваториальных координат (вдоль экватора) относительно границ созвездий? (2 балла).
4. Определите максимальные значения отклонений (в сторону больших или меньших значений) продолжительности пребывания Солнца в знаке зодиака от продолжительности его пребывания в соответствующем созвездии? (2 балла).
5. В каком знаке зодиака Солнце пребывает наибольшее время, а в каком – наименьшее? Оцените отношения соответствующих времен. (3 балла).

Задача № 14. «Полет к экзопланете и определение ее массовой плотности»

Космический корабль будущего был направлен к вновь открытой экзопланете. При подлете к ней было обнаружено, что планета движется (период этого движения не известен!) вокруг центральной звезды по круговой орбите, радиус которой в χ раз больше радиуса планеты, при этом планета всегда ориентирована одной стороной на центральное светило. Корабль вышел на круговую экваториальную орбиту вокруг планеты. При каком отношении масс звезды и планеты ($x = M_*/M_p$) космонавты, используя только бортовые часы, смогут определить среднюю массовую плотность экзопланеты максимально точно? (12 баллов).

Задача № 15. «Особенности солнечных и лунных затмений»

Одними из самых впечатляющих и запоминающихся астрономических явлений являются *солнечные и лунные затмения*.

1. Как известно, солнечное затмение наблюдается в фазе новолуния, а лунное – в фазе полнолуния. Почему не в каждое новолуние и полнолуние происходят данные затмения? (1 балл).

2. Что такое сарос? Сколько затмений и какие именно наблюдаются здесь? Чему равно отношение количеств данных затмений? Обоснуйте это отношение строго математически. (3 балла).
3. Какое затмение, солнечное или лунное, можно чаще наблюдать с данной точки поверхности Земли? Почему? Свой ответ обоснуйте строго математически. (2 балла).
4. Что такое частное солнечное затмение? Полное? В какое время года наиболее часто наблюдаются полные солнечные затмения? Чему равна максимальная фаза такого затмения? (3 балла).
5. Что такое кольцевое затмение? В какое время года этот вид затмения наиболее часто наблюдается? Чему равна минимальная фаза такого затмения? (2 балла).
6. Почему самые продолжительные затмения наблюдаются в тропическом поясе? (2 балла).

Задача № 16. «Спектр быстро вращающейся планеты»

В спектрограф наблюдают за быстро вращающейся планетой, при этом щель спектрографа ширины h ориентирована вдоль ее экватора. Ее спектр представляется серией наклонных прямых линий.

1. Дайте развернутое объяснение данному факту. (1 балл).
2. Определите скорость экваториальных точек поверхности планеты, если известны для некоторой линии угол α ее наклона к экватору планеты и соответствующая лабораторная длина λ_0 волны. (4 балл).
3. Определите также период осевого вращения планеты, если известен экваториальный параллакс планеты p_0 и ее угловой радиус ρ . (4 балла).
4. Как зависит тангенс угла α наклона линии от длины волны? Для каких длин волн данный угол измерять проще? (2 балла).
5. Оцените массу планеты, если известно, что состояние последней близко к нарушению ее ротационной устойчивости. (2 балла).

Задача № 17. «Максимальные высоты гор на поверхностях планет земной группы»

Как известно, на поверхностях всех планет земной группы существует одна из самых привлекательных форм рельефа – горы. Значения их максимальных высот представлены в таблице 3. Известно, что доминирующим материалом, составляющим горные массивы, являются базальтовые породы, плотность которых может быть заключена в интервале:

$$2400 \text{ кг/м}^3 \leq \rho \leq 3100 \text{ кг/м}^3. \quad (3)$$

При этом, для данных пород механическое напряжение на разрыв принадлежит интервалу:

$$250 \text{ МПа} \leq p_{\max} \leq 500 \text{ МПа}. \quad (4)$$

Планета	Меркурий	Венера	Земля	Марс
Гора	–	Максвелла	Мауна-Кеа	Олимп
h_{exp} , км	4.5	11	10.2	26

Таблица 1: планеты земной группы, их самые высокие горы и значения высоты h_{exp} .

1. Определите области допустимых значений $(h_{\min}, h_{\max})$ для максимальной высоты гор на поверхности планет земной группы. Согласуются ли данные наблюдений с полученными интервалами? (4 баллов).
2. Введем новый безразмерный параметр β , определяемый выражением вида:

$$\beta = \frac{h_{\text{exp}} - h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}. \quad (5)$$

- Указанный параметр характеризует положение экспериментально наблюдаемого значения h_{exp} относительно вычисленных границ интервала $h_{\max}, h_{\min}$. Вычислите данный параметр для каждой планеты. Какая тенденция просматривается в поведении β при переходе от Меркурия к Марсу? Дайте ей объяснение. (3 балла).
3. Полагая, что самые высокие горы имеют форму конуса, оцените минимально возможный радиус их основания, если известно, что среднее значение коэффициента трения между частицами горных пород составляет $\mu = 0.7$. (3 балла).
 4. Определите области допустимых значений для минимальной массы этих гор. (4 балла).

Задача № 18. «Свойства звезды 59 Девы и экзопланеты GJ 504b»

В 2011 году на обсерватории Кека (остров Гавайи, США) были впервые получены снимки газового гиганта GJ 504b (см. рис. 5), масса которого в четыре раза больше массы Юпитера. Гелиоцентрическое расстояние материнской звезды (59 Девы или GJ 504) составляет $r_* = 57.27$ св. лет. Ее масса, радиус и температура поверхности равны соответственно $\mathfrak{M}_* = 1.2 \mathfrak{M}_\odot$, $\mathfrak{R}_* = 1.36 \mathfrak{R}_\odot$, $T_* = 6205$ К. Определите,

1. Радиус круговой орбиты (в предположении, что последняя лежит в картинной плоскости) экзопланеты и период ее обращения вокруг центра масс системы "звезда-планета". (3 балла).
2. Среднюю массовую плотность, ускорение свободного падения, первую и вторую космическую скорости у поверхности материнской звезды, в терминах соответствующих солнечных величин. (4 балла).
3. Среднюю массовую плотность, ускорение свободного падения, первую и вторую космическую скорости у поверхности GJ 504b, в терминах соответствующих величин Юпитера. Радиус экзопланеты $\mathfrak{R}_p = 0.96 \mathfrak{R}_J$, где $\mathfrak{R}_J$ – радиус Юпитера. (4 балла).

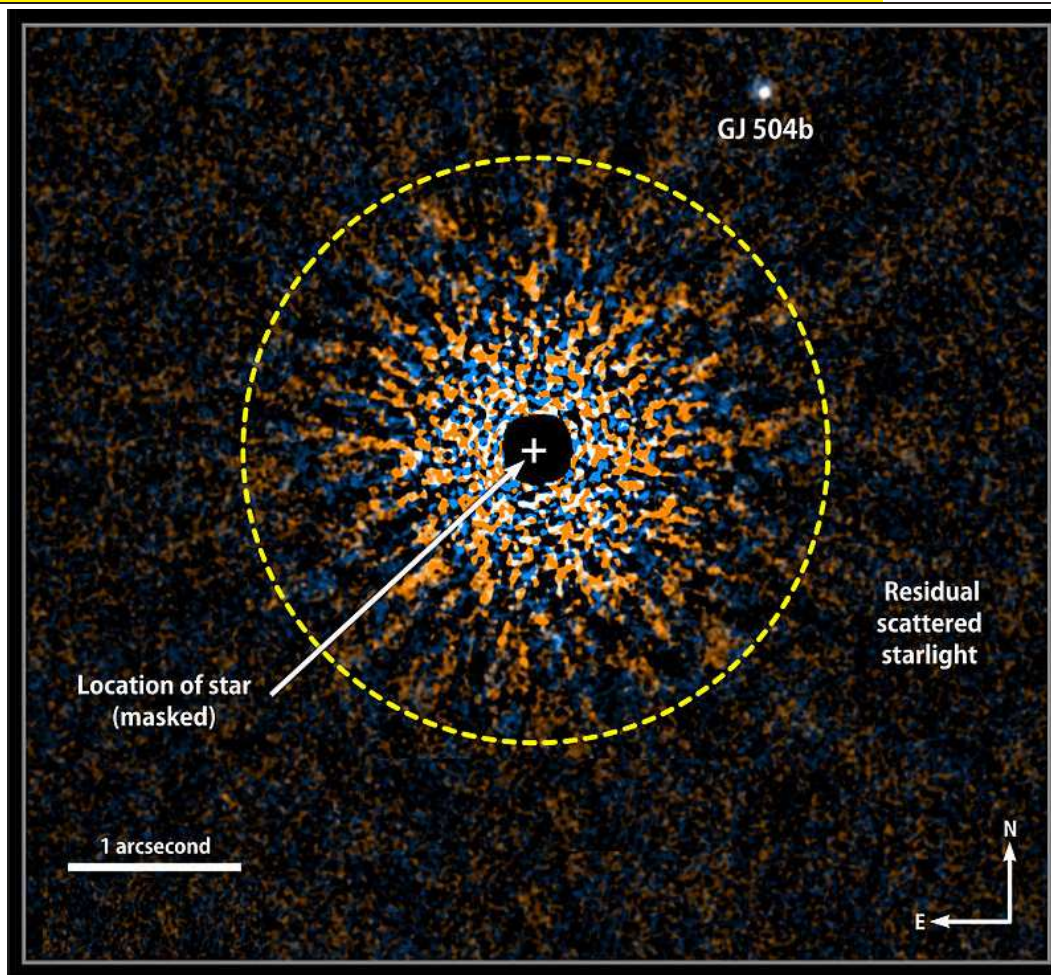


Рис. 5: фотография звезды 59 Девы и ее окрестностей (вместе с планетой-гигантом GJ 504b).

4. Во сколько раз мощность собственного источника внутренней энергии больше полного потока излучения, получаемого экзопланетой от центрального светила, если эффективная температура поверхности экзопланеты оценивается в $T_p = 544$ К? Считать сферическое альbedo поверхности экзопланеты, равным $A_p = 0.50$. (2 балла).
5. Радиус сферы Роша для экзопланеты, пребывающей в гравитационном поле центрального светила. Существует ли опасность для экзопланеты – быть разрушенной приливными силами материнской звезды? (2 балла).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Замечательная точка небосвода»

Решение. Наивысшее положение над горизонтом занимает *зенит* (z). Его высота $h_z = 90^\circ$. Данная точка является полюсом *математического горизонта*, поскольку отстоит от всех точек данного круга на 90° . Если звезда кульминирует в зените, то ее высота в этот момент $h_* = h_z = 90^\circ$. Воспользуемся формулой для высоты светила в верхней кульминации:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta = h_*, \Rightarrow \delta_* = \varphi, \quad (6)$$

здесь φ – астрономическая (географическая) широта места наблюдения. Т.о., склонение звезды (δ_*) равно широте места наблюдения. Следует отметить, что на этом факте основан один из способов определения широты места наблюдения.

Ответ: зенит; математический горизонт; склонение определяется формулой (6). (3 балла).

Задача № 2. «Видна - не видна»

Решение. Главной причиной этого отличия является существенное различие разностей яркостей фона небосвода и неосвещенной части поверхности Луны. Наблюдение Луны и ее неосвещенной части возможно лишь в течении астрономических сумерек или ночью, когда яркость фона небосвода сопоставима с яркостью неосвещенной части (т.е. разность их яркостей мала).

В момент солнечного затмения, несмотря на покрытие Солнца диском Луны фон прилежающей части небосвода остается очень ярким, во много раз ярче неосвещенной части поверхности Луны (т.е. разность их яркостей велика). Большинство приемников излучения, в том числе и человеческий глаз ориентируется на более яркие источники излучения, в свете которых более тусклые источники света видятся (почти) черными, поэтому поверхность Луны не видна.

Ответ: причина отличия – существенное различие разностей поверхностных яркостей фона и неосвещенной части Луны. (3 балла).

Задача № 3. «Полосатый Юпитер»

Решение. Как показывают исследования, цвет Юпитера преимущественно оранжевый, что обусловлено постоянным присутствием в атмосфере облаков из кристаллов гидросульфида аммония. Белые области видимого диска обусловлены рассеянием солнечного света на облаках из аммиака.

Поскольку Юпитер обладает собственным мощным источником тепловой энергии (гравитационное сжатие планеты), который порождает мощные атмосферные конвективные потоки и ураганы, то последние поднимают из глубин соединения серы с фосфором, что приводит к появлению коричневых и красных пятен.

Из-за наличия собственного мощного источника энергии в атмосфере гиганта дуют сильные ветры, а быстрое вращение планеты задает их направление движения – параллельно экватору. Облака различного химического состава движущиеся параллельно экватору задают полосатую структуру атмосферы Юпитера.

Большое красное пятно на Юпитере – это крупнейший ураган, бушующий в атмосфере планеты и существующий, согласно наземным наблюдениям, не менее 350 лет. Его размеры составляют $24 \div 40$ тысяч км в длину и $12 \div 14$ тысяч км в ширину, что существенно больше размеров Земли. Размеры пятна постоянно меняются, общая тенденция – к уменьшению. (3 балла).

Задача № 4. «"Туманность Андромеды" и двойная звезда»

Решение. В научно – фантастическом романе Ефремова И.А. шла речь о β Лебеда или Альбиро. Эту звезду многие астрономы считают самой красивой визуально двойной звездой. Альбиро представляет собой пару компонентов, разделенных угловым расстоянием $d'' = 35''$. Цвета компонентов сильно разнятся: у более яркой компоненты ($m_1 = 3.4^m$) цвет ярко оранжевый, по светимости она относится к классу гигантов, а по спектру – к классу К. Более тусклый компонент имеет голубой (бирюзовый) цвет ($m_2 = 5.1^m$). Последняя звезда является карликом главной последовательности, спектрального класса В9.

Указанное угловое расстояние между компонентами меньше разрешающей способности человеческого глаза ($60 \div 100''$), поэтому данную звезду невозможно увидеть невооруженным глазом, однако если использовать бинокль с увеличением $\Gamma \geq 7^\times \div 10^\times$ на штативе или телескоп, то ее можно легко разрешить (увидеть как двойную звезду). (4 балла).

Задача № 5. «Солнечное затмение»

Решение. Очевидно, что на серии фотографий рис. 2 запечатлено частное солнечное затмение (солнечный диск покрывается лунным лишь частично). Фаза затмения в общем случае (F_{ec}) определяется формулой вида:

$$F_{\text{ec}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{D}, & \text{если частное,} \\ 1 + \frac{\Delta x}{D}, & \text{если полное} \end{array} \right\}, \quad (7)$$

здесь d – величина закрытой части диаметра затмеваемого тела, проходящего через центр затмевающего тела; D – диаметр затмеваемого тела; Δx – минимальное расстояние между краями дисков затмевающего тела и затмеваемого, в случае полного затмения.

Очевидно, наибольшая фаза затмения запечатлена на фотографии рис. 2, расположенной во 2-ом ряду и во 2-ом столбце (отсчет ведется от левого

верхнего угла рисунка). Для нее $d=15.5$ мм, $D=31$ мм, откуда согласно (7) следует, что $F_{\text{ес}} = 0.5$.

Ответ: частное, $F_{\text{ес}} = 0.5$. (4 балла).

Задача № 6. «Тень спутника на Юпитере»

Решение. Для определения широты построим рисунок, соответствующий условиям задачи, см. рис. 6. Здесь QQ' – экватор планеты, OS – радиус планеты, проведенный в точку, где находится тень от спутника. **Планетоцентрическая широта** (φ) – это угол между плоскостью экватора планеты и направлением на точку ее поверхности, если смотреть из геометрического центра планеты.

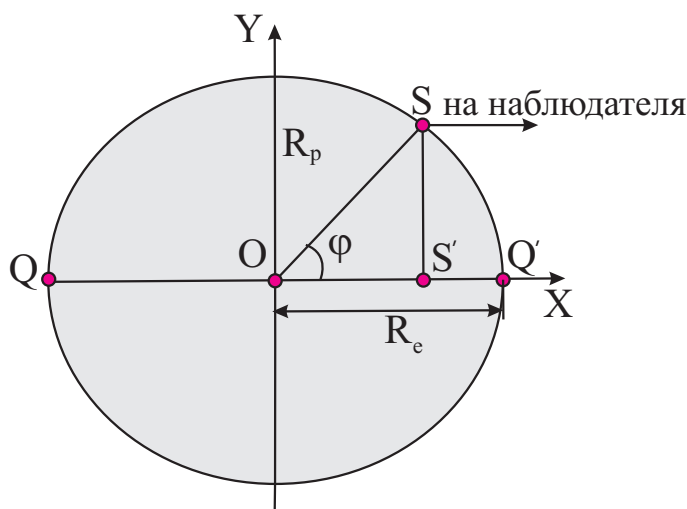


Рис. 6: к определению искомой величины.

Для оценки можно, в принципе, полагать, что Юпитер имеет форму шара. Однако, в силу его значительной сплюснутости выполним оценку φ в рамках модели эллипсоида вращения. Рассмотрим главное сечение тела планеты, содержащее его ось вращения (см. рис. 6). Граница сечения есть эллипс с полуосями R_e , R_p – экваториальным и полярным радиусом, уравнение которого можно представить в каноническом или параметрическом виде:

$$\frac{x^2}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_p^2} = 1, \text{ или } \begin{cases} x = R_e \cos t \\ y = R_p \sin t \end{cases}. \quad (8)$$

Из рисунка видно, что

$$\sin \varphi = \frac{SS'}{OS} = \frac{y}{OS}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} OS^2 &= x^2 + y^2 = R_e^2 \cos^2 t + y^2 = y^2 + R_e^2(1 - \sin^2 t) = \\ &= y^2 + R_e^2 - \left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2 y^2 = R_e^2 + y^2 \left(1 - \left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2\right). \end{aligned}$$

В итоге широту можно представить в виде:

$$\varphi = \arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_e}{y}\right)^2 - \left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2}} \right]. \quad (10)$$

Определим данные величины по рисунку – $y = 16$ мм, $R_p = 30$ мм, $R_e = 32$ мм (Ваши значения могут отличаться от указанных, при использовании рисунка в другом масштабе). Вычисляя φ по формуле (10), получаем $\varphi \approx 30.6^\circ$.

В случае модели планеты-шара $R_p = R_e = R = \frac{R_e + R_p}{2} = 31$ мм.

Из (10) следует более простой результат

$$\varphi_0 = \arcsin \left[\frac{y}{R} \right] = 31.1^\circ.$$

Очевидно, что результаты двух моделей близки по значению.

Ответ: $\varphi = 31^\circ$. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Монумент ракеты-носителя "Союз" и длина его тени»

Дано:

$$\begin{aligned} H &= 65 \text{ м,} \\ D &= 3.0 \text{ м,} \\ \varphi &= 53^\circ 12'. \end{aligned}$$

Найти:

$$\begin{aligned} L_{\min}, L_{\max} &- ? \\ \text{даты} &- ? \end{aligned}$$

Решение:

Очевидно, длина тени минимальна в случае, когда высота Солнца максимальна. Последняя ситуация реализуется 20 (21) июня, в день летнего солнцестояния. В этот день склонение Солнца максимально и равно $\delta_\odot = \varepsilon = +23^\circ 26'$. Высота Солнца в полдень будет равна

$$h_{\odot \max} = 90^\circ - \varphi + \delta_\odot = 60^\circ 14'. \quad (11)$$

Минимальная высота Солнца достигается в день зимнего солнцестояния 22 (21) декабря. При этом высота Солнца

$$h_{\odot \min} = 90^\circ - \varphi - \varepsilon = 13^\circ 22'. \quad (12)$$

Очевидно, в этот день длина тени будет максимальной.

Учтем также конечность угловых размеров Солнца ($\rho''_\odot = 16'$ – угловой радиус Солнца). Это приводит к тому, что тень от монумента имеет форму усеченной треугольной призмы (см. рис. 7). Минимальная длина тени для случая «Солнце на горизонте» (отсчет ведется от противосолнечной точки А, см. рис. 7) есть

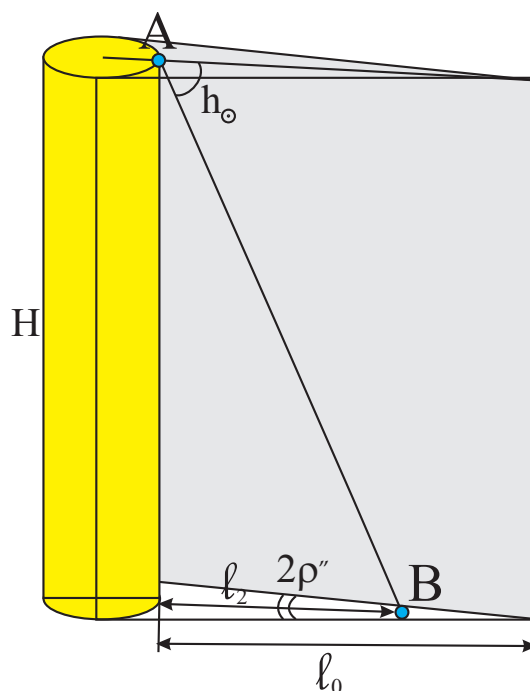


Рис. 7: к определению искомой величины.

$$\ell_0 = \frac{D/2}{\sin \rho''_\odot} - \frac{D}{2} \approx \frac{D}{2\rho''_\odot} = 322 \text{ м.} \quad (13)$$

Если высота Солнца будет больше нуля, то тень станет короче и ее длина составит $\ell_1 = \ell_0 \cos h_\odot$. В случае больших высот Солнца $h_\odot$ минимальная длина тени монумента определяется величиной образующей AB корпуса монумента и будет равна $\ell_2 = H / \operatorname{tg} h_\odot$. Вычислим пограничное значение $h_\odot^{(0)}$:

$$\frac{H}{\operatorname{tg} h_\odot^{(0)}} = \ell_0 \cos h_\odot^{(0)}, \Rightarrow \sin h_\odot^{(0)} = \frac{H}{\ell_0} = 0.202, \Rightarrow h_\odot^{(0)} = 11.6^\circ. \quad (14)$$

Следовательно, длину тени окончательно можно представить в виде:

$$L = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{D}{2\rho_\odot''} \cos h_\odot, & h_\odot < h_\odot^{(0)}, \\ \frac{H}{\operatorname{tg} h_\odot}, & h_\odot \geq h_\odot^{(0)} \end{array} \right\}. \quad (15)$$

Следовательно искомые длины теней есть

$$L_{\max} = \frac{H}{\operatorname{tg} h_{\odot \min}} = 274 \text{ м}, \quad L_{\min} = \frac{H}{\operatorname{tg} h_{\odot \max}} = 37 \text{ м}. \quad (16)$$

Ответ: минимальная длина тени $L_{\min}=37$ м достигается 20 (21) июня, максимальная длина $L_{\max}=274$ м достигается 22 (21) декабря. (6 баллов).

Задача № 8. «Продолжительность солнечного затмения»

Решение. Определим в миллиметрах диаметр видимого диска Луны. Для этого к двум не близким граничным точкам (A и B) видимого диска Луны (см. рис. 8) проведем касательные. В данных точках восстановим перпендикуляры на касательные. Находим их точку пересечения O . Определяем длины отрезков $OA = 13.0$ мм и $OB = 13.5$ мм и в качестве радиуса видимого диска Луны выбираем среднее значение:

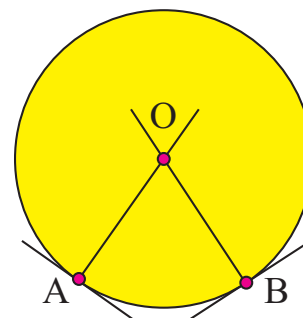


Рис. 8: к определению искомой величины.

$$R_\zeta = \frac{OA + OB}{2} = 13.25 \text{ мм}. \quad (17)$$

Рассмотрим рис. 9, соответствующий условию задачи. В задаче № 5 настоящего релиза была вычислена максимальная фаза затмения $F_{\max} = 0.5$, определяемая как отношение покрытой части (d) диаметра диска к диаметру всего диска Солнца ($D_\odot$). Тогда прицельный параметр относительного движения Луны равен

$$p = R_\zeta + \left(\frac{D_\odot}{2} - d \right) = R_\zeta - D_\odot \left(F_{\max} - \frac{1}{2} \right). \quad (18)$$

Согласно рис. 9, Луна движется вдоль прямой M_1M_3 . В начальный момент затмения диск Луны касается диска Солнца в точке K_1 . Причем расстояние

между центрами дисков небесных тел есть $SM_1 = R_\zeta + D_\odot/2$. Когда центр видимого диска Луны оказывается в точке M_2 , достигается максимальная фаза затмения $F_{\max}$. Далее фаза уменьшается.

При попадании центра диска Луны в точку M_3 . Тела вновь касаются своими дисками в точке K_2 и затмение заканчивается. Следовательно, Луна должна пройти путь M_1M_3 относительно неподвижного Солнца. В итоге, полное время затмения есть

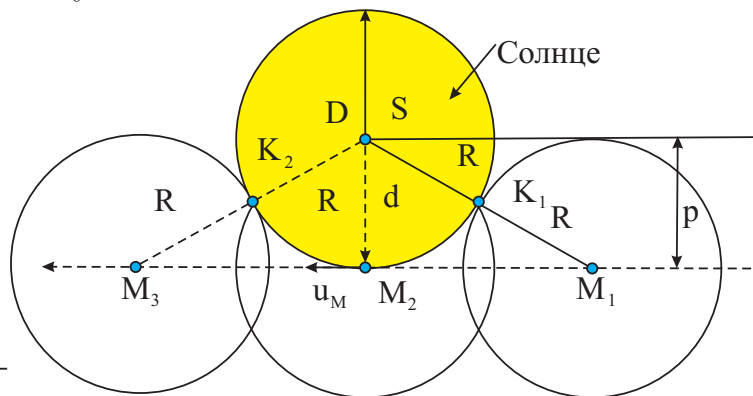


Рис. 9: к определению искомой величины.

$$t_{\text{ec}} = \frac{M_1M_3}{\omega_\zeta} = \frac{2\sqrt{(R_\zeta + D_\odot/2)^2 - p^2}}{\omega_\zeta} = \frac{S_\zeta}{\pi} \sqrt{d(2R_\zeta + D_\odot - d)} = \frac{S_\zeta D''_\odot}{\pi} \sqrt{F_{\max}((2R_\zeta/D_\odot) + 1 - F_{\max})}, \quad (19)$$

здесь $S_\zeta = 29.53$ сут – синодический период обращения Луны, ω_ζ – соответствующая ему угловая скорость; $D''_\odot = 32' = 9.31 \cdot 10^{-3}$ рад – угловой диаметр видимого диска Солнца. Поскольку $2R_\zeta/D_\odot \approx 1$, то при $F_{\max}=0.5$, $t_{\text{ec}}=109$ мин.

Расчет был выполнен для неподвижного относительно центра Земли наблюдателя (что достигается на полюсах). Если учитывать еще и ее суточное вращение, то максимальная скорость движения наблюдателя достигается на экваторе ($v_n = 2\pi R_\oplus/T_\oplus = 0.46$ км/с), причем он движется в том же направлении, что и Луна по орбите, со скоростью $V_\zeta = 2\pi a_\zeta/T_\zeta = 1.02$ км/с. Следовательно, минимальная относительная скорость Луны есть $\Delta V = V_\zeta - v_n = 0.56$ км/с. Тогда минимальное собственное движение Луны есть $-\omega_\zeta^{(\min)} = \Delta V/a_\zeta = 0.3''/\text{с}$. В итоге время затмения может составлять $t_{\text{ec}}^{(\max)} = 184$ мин. В итоге полная продолжительность частного солнечного затмения составляет

$$109 \text{ мин} \leq t_{\text{ec}} \leq 184 \text{ мин}. \quad (20)$$

Ответ: к задаче представляется интервалом (20). (7 баллов).

Задача № 9. «Прохождение неизвестного спутника по диску материнской планеты»

Решение. Как известно, галилеевыми спутниками называют четыре крупнейших спутника Юпитера: Ио, Европа, Ганимед и Калисто, характеристики которых представлены в приложении. Орбиты всех спутников близки к круговым и расположены под малыми углами к плоскости экватора планеты. В

свою очередь, экватор оставляет малый угол с плоскостью орбиты Юпитера. Следовательно, можно полагать, что профиль тени от спутника сформировался с помощью лучей, упавших нормально на поверхность планеты.

Значит эффектом проекции можно пренебречь. В силу конечности углового радиуса Солнца, конус тени спутника будет сходящимся и иметь форму круга. Согласно рис. 10, радиус круга тени спутника есть

$$r_s = \mathfrak{R}_s - a_s \operatorname{tg} \rho''_{\odot} \approx \mathfrak{R}_s - a_s \frac{\rho''_{\odot}}{3438'}, \quad (21)$$

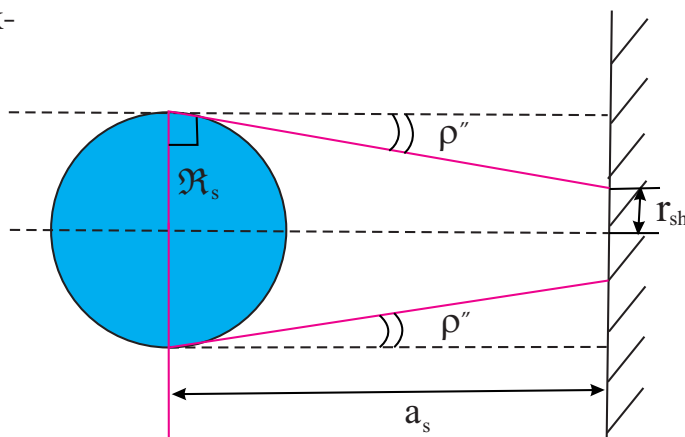


Рис. 10: к определению искомой величины.

здесь $\mathfrak{R}_s$ – радиус спутника, a_s – радиус его орбиты, $\rho''_{\odot}$ – угловой радиус Солнца (выраженный в угловых минутах) у поверхности Юпитера, определяемый формулой:

$$\rho''_{\odot} = \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_J} \right) \cdot 3438' = 3.1', \quad (22)$$

где a_J – большая полуось орбиты Юпитера. Следовательно, радиус тени можно записать так:

$$r_s = \mathfrak{R}_s - \mathfrak{R}_{\odot} \left(\frac{a_s}{a_J} \right). \quad (23)$$

Определим отношение диаметра тени спутника к экваториальному диаметру Юпитера.

$$\eta = \frac{2r_s}{D_J} = \frac{2\mathfrak{R}_s}{D_J} - \frac{2\mathfrak{R}_{\odot}}{D_J} \left(\frac{a_s}{a_J} \right). \quad (24)$$

Вычислим величину η для четырех галилеевых спутников (см. таблицу 2).

№	Название	$\mathfrak{R}_s$, км	a_s , км	η
1	Ио	1815	421800	0.020
2	Европа	1569	671100	0.014
3	Ганимед	2631	1070400	0.023
4	Каллисто	2400	1882800	0.010

Таблица 2: значения радиуса $\mathfrak{R}_s$, большой полуоси и параметра

Далее определим по рисунку диаметр тени и экваториальный диаметр планеты $\bar{d}_{sh}=5$ мм, $\bar{D}_J=217$ мм. (Ваши значения могут отличаться от указанных при использовании фотографии с иным масштабом). В итоге $\eta_{exp} = \bar{d}_{sh}/\bar{D}_J = 0.023$. Полученный результат соответствует вычисленному значению η для Ганимеда. Действительно, по данным автора фотографии здесь запечатлен транзит крупнейшего спутника Юпитера и всей Солнечной системы – Ганимеда.

Ответ: Ганимед. (8 баллов).

Задача № 10. «Третий обобщенный закон Кеплера для двух пар тел»

Решение. Рассмотрим движение двух тел с массами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ (причем $\mathfrak{M}_2 < \mathfrak{M}_1$) вокруг их общего центра масс (см. рис. 11). Запишем второй закон Ньютона для каждого компонента:

$$\mathfrak{M}_1 \vec{W}_1 = -\frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}, \quad \mathfrak{M}_2 \vec{W}_2 = -\frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12},$$

здесь $\vec{W}_1, \vec{W}_2$ – ускорения данных тел; $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ – векторы, соединяющие данные тела, направление которых задается порядком цифр в индексе, см. рис. 11. Выразим ускорение $\vec{W}_1$ и $\vec{W}_2$

$$\vec{W}_1 = -\frac{G \mathfrak{M}_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}, \quad \vec{W}_2 = -\frac{G \mathfrak{M}_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (25)$$

здесь $|\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{21}| = a_1 + a_2 = a$; a_1, a_2 – радиусы круговых орбит компонентов. Найдём *относительное ускорение* второго компонента относительно первого:

$$\vec{W}_{\text{rel}} = \vec{W}_2 - \vec{W}_1 = -\frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (26)$$

С другой стороны, орбита относительного движения второго компонента, относительно первого, будет окружностью, поскольку расстояние между компонентами не изменяется в процессе движения. Следовательно, $\vec{W}_{\text{rel}}$ есть центростремительное ускорение, представляемое в виде:

$$\vec{W}_{\text{rel}} = -\omega^2 \vec{r}_{12}, \quad (27)$$

здесь ω – угловая скорость орбитального движения компонентов. Приравняв правые части (26) и (27), в результате получаем

$$\frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{r_{12}^3} = \omega^2, \Rightarrow G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) T^2 = 4\pi^2 a^3$$

или

$$(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) T^2 = \frac{4\pi^2}{G} a^3. \quad (28)$$

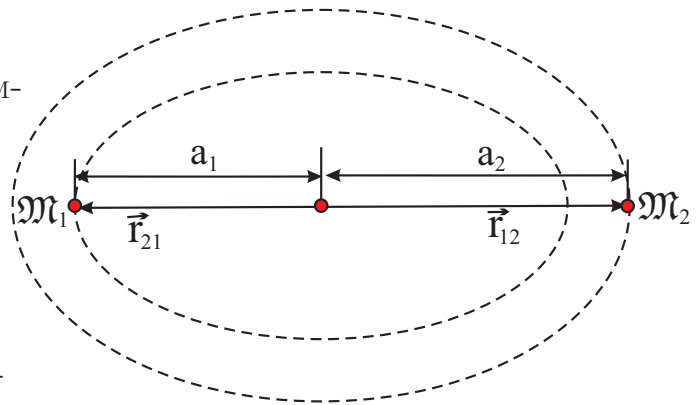


Рис. 11: к определению кинематических параметров орбит данных тел.

Уравнение (28) – третий обобщенный закон Кеплера для пары гравитирующих тел. Если такое же уравнение записать для другой пары тел с массами $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$ в виде:

$$(\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4) T^2 = \frac{4\pi^2}{G} a_2^3 \quad (29)$$

и разделить (28) на (29), проиндексировав цифрой «1» параметры первой пары, то получим

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) T_1^2}{(\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4) T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (30)$$

что идентично (1).

Далее предположим что вторая пара тел есть система «Солнце-Земля», тогда $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_\odot$, $\mathfrak{M}_4 = \mathfrak{M}_\oplus$, $T_2 = T_\oplus = 1$ год, $a_2 = a_\oplus = 1$ а.е. Следовательно (30) можно переписать в виде:

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) T_1^2}{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus) T_\oplus^2} = \frac{a_1^3}{a_\oplus^3}. \quad (31)$$

Далее учтем, что масса Земли много меньше массы Солнца, следовательно слагаемым $\mathfrak{M}_\oplus$ в знаменателе (31) можно пренебречь. Выразим массы компонент первой пары гравитирующих тел через массу Солнца.

$$\mathfrak{M}_1 = \tilde{\mathfrak{M}}_1 \cdot \mathfrak{M}_\odot, \quad \mathfrak{M}_2 = \tilde{\mathfrak{M}}_2 \cdot \mathfrak{M}_\odot, \quad (32)$$

а период и большую полуось в терминах земных аналогов:

$$T_1 = \tilde{T} \cdot T_\oplus, \quad a_1 = \tilde{a} \cdot a_\oplus. \quad (33)$$

Следовательно (31) можно переписать так

$$\frac{(\tilde{\mathfrak{M}}_1 + \tilde{\mathfrak{M}}_2) \mathfrak{M}_\odot T_\oplus^2 \cdot \tilde{T}^2}{\mathfrak{M}_\odot \cdot T_\oplus^2} = \frac{(\tilde{a} \cdot a_\oplus)^3}{a_\oplus^3}, \Rightarrow (\tilde{\mathfrak{M}}_1 + \tilde{\mathfrak{M}}_2) = \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{T}^2},$$

что и требовалось доказать. (8 баллов).

Задача № 11. «Транзит небесного тела»

Решение. Из рис. 3 видно, что тело, испытывающее транзит по диску Солнца, имеет шарообразную форму. Следовательно, это массивное тело которое может быть ближе к Солнцу, нежели Земля. Очевидно, что это должна быть одна из двух внутренних классических планет: Меркурий или Венера. Чтобы понять какая именно планета испытала транзит, необходимо определить угловой диаметр планеты по фотографии и затем сопоставить с *интервалами допустимых значений* (ИДЗ) для углового диаметра каждой из планет, определенных теоретически.

Прежде всего, определим *угловой масштаб фотографии* (μ_a) следующим выражением:

$$\mu_a = \frac{\rho''_{\odot}}{R_{\odot}}, \quad (34)$$

где $\rho''_{\odot} = 16.0'$ – средний угловой радиус Солнца, $R_{\odot}$ – линейный радиус Солнца, измеренный по фотографии.

К сожалению, измерить непосредственно радиус видимого диска Солнца по фотографии не представляется возможным. Поэтому будем для этого использовать несложную методику косвенного определения $R_{\odot}$. Рассмотрим круг радиуса R и круговой сегмент $ACBDA$, с высотой h и основанием $AB = 2a$ (см. рис. 12). Из треугольника $\triangle ADO$ по теореме Пифагора следует, что

$$R^2 = a^2 + (R - h)^2, \Rightarrow R = \frac{(a^2 + h^2)}{2h}. \quad (35)$$

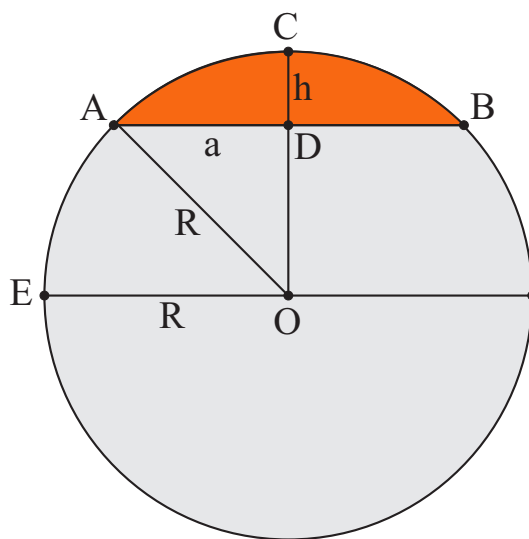


Рис. 12: к определению радиуса круга.

Т.о., для определения радиуса круга необходимо знать высоту h кругового сегмента и половину его основания – a . Выполним дополнительное построение на данной фотографии (см. рис. 13). Проведем через две наиболее взаимно удаленные точки A и B видимого диска Солнца прямую AB . Из центра C отрезка AB восстановим

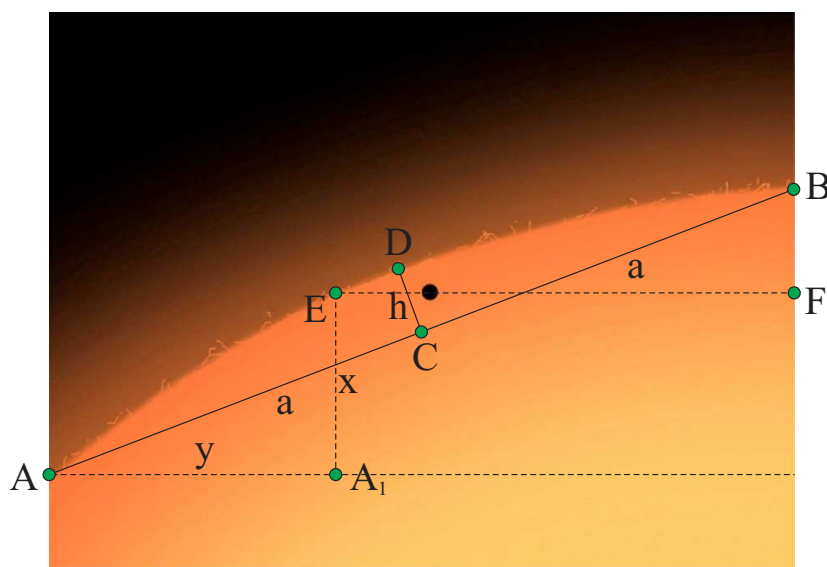


Рис. 13: к определению линейного размера Солнца по фотографии.

перпендикуляр CD к границе части видимого диска светила. Определим значения $h = CD = 15$ мм и $a = AC = 90$ мм (здесь и далее Ваши значения геометрических параметров могут отличаться от указанных, при использовании фотографии в ином масштабе). По этим данным, с помощью (35) вычисляем радиус диска Солнца $R_{\odot} = 277.5$ мм. С использованием (34) вычисляем угловой масштаб фотографии $\mu_a = 3.46''/\text{мм}$.

Далее измеряем диаметр диска планеты – $d = 3.5$ мм, что отвечает угловому диаметру планеты – $D_p'' = \mu_a d = 12.1''$.

Далее рассчитаем интервалы возможных значений углового диаметра (D_p'') нижней планеты. Очевидно, искомая величина будет минимальной в случае, когда планета в нижнем соединении находится в своем перигелии, а Земля – в своем афелии, тогда

$$D_{p \min}'' = \frac{2\mathfrak{R}_p}{\Delta_{\max}} \times 206265'' = \frac{2\mathfrak{R}_p \times 206265''}{a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus}) - a_p(1 - \varepsilon_p)}, \quad (36)$$

здесь $\mathfrak{R}_p$ – средний радиус планеты; $a_{\oplus} = 1$ а.е. – большая полуось орбиты Земли, $\varepsilon_{\oplus} = 0.0167$ – ее эксцентриситет; a_p, ε_p – соответствующие параметры орбиты планеты.

Угловой диаметр планеты будет достигать максимального значения в нижнем соединении в случае, когда планета находится в своем афелии, а Земля – в своем перигелии:

$$D_{p \max}'' = \frac{2\mathfrak{R}_p \times 206265''}{\Delta_{\min}} = \frac{2\mathfrak{R}_p \times 206265''}{a_{\oplus}(1 - \varepsilon_{\oplus}) - a_p(1 + \varepsilon_p)}. \quad (37)$$

Для Меркурия имеем $\mathfrak{R}_{\text{☿}} = 2439.7$ км, $a_{\text{☿}} = 0.387$ а.е., $\varepsilon_{\text{☿}} = 0.206$; для Венеры – $\mathfrak{R}_{\text{♀}} = 6051.8$ км, $a_{\text{♀}} = 0.723$ а.е., $\varepsilon_{\text{♀}} = 0.0068$. В итоге для планет

$$\text{Для Меркурия: } 9.48'' \leq D_{\text{☿}}'' \leq 13.02'', \quad (38)$$

$$\text{Для Венеры: } 55.89'' \leq D_{\text{♀}}'' \leq 65.35''. \quad (39)$$

Из сопоставления результатов следует, что на фотографии представлен транзит Меркурия.

Ответ: транзит Меркурия. (9 баллов).

Задача № 12. «Расстояния до небесного тела и время транзита»

а) Оценим геоцентрическое расстояние до планеты. Согласно решению предыдущей задачи, угловой диаметр планеты составляет $D_{\text{☿}}'' = 12.1''$. Следовательно, искомое расстояние составляет

$$\Delta_{\text{☿}} = \frac{2\mathfrak{R}_{\text{☿}} \times 206265''}{D_{\text{☿}}''} = 8.32 \cdot 10^7 \text{ км} = 0.556 \text{ а.е.}, \quad (40)$$

здесь $\mathfrak{R}_{\text{☿}} = 2439.7$ км – радиус Меркурия. Следовательно, гелиоцентрическое расстояние до планеты будет заключено в интервале:

$$\begin{aligned} a_{\oplus}(1 - \varepsilon_{\oplus}) - \Delta_{\text{☿}} &\leq r_{\text{☿}} \leq a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus}) - \Delta_{\text{☿}}, \Rightarrow \\ 0.427 \text{ а.е.} &\leq r_{\text{☿}} \leq 0.460 \text{ а.е.}, \end{aligned} \quad (41)$$

здесь $a_{\oplus} = 1$ а.е. – большая полуось орбиты Земли, $\varepsilon_{\oplus} = 0.0167$ – ее эксцентриситет.

Очевидно, что в момент транзита Меркурий находился в окрестности своего афелия.

б) Оценим полное время τ_0 транзита Меркурия вдоль хорды BB_2 (см. рис. 14). Если будет известна величина хорды BB_2 (в угловых единицах), и скорость относительного движения (V_{rel}) Меркурия, то можно легко вычислить время транзита планеты по диску Солнца:

$$\tau_0 = \frac{\check{B}B_2}{V_{\text{rel}}} \Delta_{\text{☿}} = \frac{2\check{\ell}}{V_{\text{rel}}} \Delta_{\text{☿}}. \quad (42)$$

Скорость относительного движения Меркурия во время транзита можно оценить как

$$V_{\text{rel}} = V_{\text{☿}} - V_{\oplus} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\text{☿}}} \frac{1 - \varepsilon_{\text{☿}}}{1 + \varepsilon_{\text{☿}}}} - \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\oplus}}} = 9.06 \text{ км/с}, \quad (43)$$

где $a_{\text{☿}} = 0.387$ а.е., $\varepsilon_{\text{☿}} = 0.206$ – большая полуось и эксцентриситет Меркурия.

Далее определим величину хорды $BB_2 = 2\ell$. Из $\triangle OAO_1$ $\triangle OB_2O_2$ следует:

$$OA^2 = OO_1^2 + AO_1^2, \Rightarrow R_{\odot}^2 = (\ell + y)^2 + z^2, \quad (44)$$

$$OB_2^2 = OO_2^2 + O_2B_2^2, \Rightarrow R_{\odot}^2 = \ell^2 + (x + z)^2. \quad (45)$$

Очевидно, величины x , y можно непосредственно измерить по рис. 13, а величина $R_{\odot}$ была определена в предыдущей задаче. Выразим из уравнения (44) переменную z и подставим в (45):

$$R_{\odot}^2 = \ell^2 + x^2 + 2x \sqrt{R_{\odot}^2 - (\ell + y)^2} + R_{\odot}^2 - (\ell + y)^2, \Rightarrow$$

$$y^2 - x^2 + 2y\ell = 2x \sqrt{R_{\odot}^2 - (\ell + y)^2},$$

$$y^4 + x^4 + 4y^2\ell^2 + 4y^3\ell - 4x^2y\ell - 2x^2y^2 = 4x^2R_{\odot}^2 - 4x^2\ell^2 - 8x^2y\ell - 4x^2y^2,$$

$$4s^2\ell^2 + 4ys^2\ell + s^4 - 4x^2R_{\odot}^2 = 0, \text{ где } s^2 = x^2 + y^2,$$

$$D = 16y^2s^4 + 64x^2s^2R_{\odot}^2 - 16s^6 = 16s^2(s^2y^2 + 4x^2R_{\odot}^2 - s^4).$$

$$\ell_1 = -\frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{s} \sqrt{s^2y^2 + 4x^2R_{\odot}^2 - s^4} \right), \quad (46)$$

$$\ell_2 = -\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{s} \sqrt{s^2y^2 + 4x^2R_{\odot}^2 - s^4} \right) < 0.$$

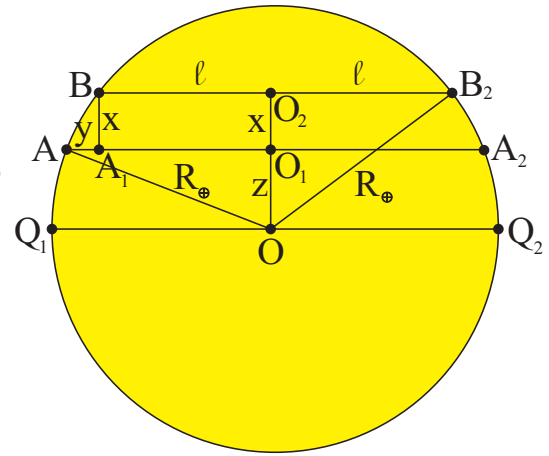


Рис. 14: к определению величины хорды транзита Меркурия.

Очевидно, последний корень не удовлетворяет условию задачи. Проводя измерения параметров x и y по рис. 13 ($x = 41$ мм, $y = 64.5$ мм), получаем значение $\ell = 115.2$ мм. Тогда дуга $\overset{\circ}{B}B_2 = 2\overset{\circ}{\ell} = 2\ell\mu_a = 797'' = 13.286' = 3.864 \cdot 10^{-3}$ рад. В итоге, согласно (42) получаем $\tau_0 = 9.86$ часа.

Ответ: к задаче представляется выражениями (40), (41), (42); $\tau_0 = 9.86$ часа. (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Знаки зодиака и движение Солнца»

Решение: 1. Главной причиной сдвига знаков Зодиака, относительно созвездий, является **прецессия земной оси** – явление обращения оси земного шара вокруг оси эклиптики, обусловленное гравитационным действием Луны и Солнца на его экваториальные области.

В результате изменения положения оси суточного вращения земного шара в пространстве, изменяется и ориентация небесного экватора по отношению к эклиптике. В результате их точка пересечения – *точка весны* (Υ) движется по эклиптике на встречу Солнцу с угловой скоростью $\omega_\Upsilon = 50.25''/\text{год}$.

2. Оценим момент времени окончания эпохи Овна, т.е. момент времени, когда точка весны покинула созвездие Овна. Для этого заметим, что ее текущее положение на рис. 4 определено координатами ($\delta_\Upsilon = 0^\circ$; $\alpha_\Upsilon = 0^h 00^m$).

Точка эклиптики, отвечающая границе созвездий Овна и Рыбы, согласно рис. 4, имеет координаты ($\alpha_1 = 1^h 47^m = 26.84^\circ$, $\delta_1 = 11.25^\circ$).

Очевидно, что участок эклиптики, заключенный между указанными точками является прямолинейным, поэтому его длину определим приближенно по теореме Пифагора:

$$\ell_1 = \sqrt{\delta_1^2 + \alpha_1^2} = 29.1^\circ.$$

Следовательно, эпоха Овна закончилась

$$t_\Upsilon^{(\ell)} = \frac{\ell_1}{\omega_\Upsilon} = 2085 \text{ лет} \quad (47)$$

тому назад (т.е., приблизительно, в 86 году до н.э.).

Для определения даты начала эпохи Овна, необходимо знать протяженность эклиптики внутри данного созвездия, однако можно воспользоваться диаграммой видимого движения Солнца по эклиптике (см. рис. А.1, приложение А). Из нее следует, что Солнце в этом созвездии пребывает 25 суток, следовательно, протяженность эклиптики здесь

$$\ell_2 = \frac{360^\circ}{365.26 \text{ сут}} \cdot 25 \text{ сут} = 24.64^\circ.$$

Следовательно точка весны прибывала в данном созвездии

$$\tau_{\Upsilon} = \frac{\ell_2}{\omega_{\Upsilon}} = 1765 \text{ лет.}$$

Следовательно, время начала эпохи Овна отстоит от сегодняшнего дня

$$t_{\Upsilon}^{(b)} = t_{\Upsilon}^{(e)} + \tau_{\Upsilon} = 3850 \text{ лет,} \quad (48)$$

что соответствует 1831 году до н.э.

3. С 1875 года и по 2019 год прошло $\Delta t_3 = 144$ года. За этот промежуток времени точка весны сместилась по эклиптике на величину

$$\ell_3 = \omega_{\Upsilon} \Delta t_3 = 2.01^\circ.$$

Следовательно смещение сетки вдоль небесного экватора составит

$$\Delta \alpha_3 = \ell_3 \cos \varepsilon = 1.84^\circ, \quad (49)$$

здесь $\varepsilon = 23^\circ 26.5'$ – среднее значение угла наклона эклиптики и плоскости экватора за указанный период.

4. Вновь воспользуемся диаграммой (представленной на рис. А.1). Поскольку, в среднем, продолжительность прибывания Солнца в одном знаке составляет $\tau_0 = 30$ сут, то наибольшее отклонение достигается в случае Скорпиона ($t_c = 7$ сут.)

$$\Delta t_c = \tau_0 - t_c = 21 \text{ сут,} \quad (50)$$

а наибольшее в противоположной ситуации – в случае Девы:

$$\Delta t_d = t_d - \tau_0 = 15 \text{ сут.} \quad (51)$$

5. В действительности Солнце движется неравномерно по эклиптике, в силу эллиптичности орбиты Земли, следовательно, наибольшее время Солнце прибывает в знаке Рака (22.06 – 22.07) поскольку Земля в начале июня проходит свой афелий. Наименьшее время Солнце прибывает в знаке Козерога (22.12 – 22.01). Отношение продолжительностей пребывания Солнца в знаках Рака и Козерога можно свести к отношению орбитальных геоцентрических скоростей Земли:

$$\frac{\tau_p}{\tau_k} = \frac{\omega_{\odot}^{(k)}}{\omega_{\odot}^{(p)}} = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\odot}^3} \frac{(1 + \varepsilon_{\oplus})}{(1 - \varepsilon_{\oplus})^3}} / \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{a_{\odot}^3} \frac{(1 - \varepsilon_{\oplus})}{(1 + \varepsilon_{\oplus})^3}} = \left(\frac{1 + \varepsilon_{\oplus}}{1 - \varepsilon_{\oplus}} \right)^2 = 1.069. \quad (52)$$

Ответ: 1) прецессия земной оси; 2) начало эпохи Овна в 1831 году до н.э. (3850 лет назад), окончание в 66 г. до н.э. (2085 лет назад); 3) смещение $\Delta \alpha_3 = 1.84^\circ$; 4) отклонение в сторону больших значений – Дева, 15 сут, отклонение

в сторону меньших значений – Скорпион, 21 сут.; 5) наибольшее время – в знаке Рак, наименьшее – в знаке Козерог, $\tau_p/\tau_k=1.069$. (11 баллов).

Задача № 14. «Полет к экзопланете и определение ее массовой плотности»

Дано:

$$r_p/R_p = \chi,$$

$$T_p = P_p.$$

Найти:

$$x = \mathfrak{M}_*/\mathfrak{M}_p - ?$$

Решение:

Согласно определению, **средней массовой плотностью планеты** называется отношение массы планеты $\mathfrak{M}_p$ к ее объему (объему шара):

$$\bar{\rho} = \frac{\mathfrak{M}_p}{\frac{4\pi}{3}\mathfrak{R}_p^3}, \quad (53)$$

здесь $\mathfrak{R}_p$ – радиус звезды. С учетом, что $\mathfrak{R}_p = r_p/x$, тогда (53) можно переписать в виде:

$$\bar{\rho} = \frac{3\mathfrak{M}_p\chi^3}{4\pi r_p^3}. \quad (54)$$

Далее воспользуемся третьим обобщенным законом Кеплера для системы «звезда-планета»:

$$(\mathfrak{M}_* + \mathfrak{M}_p) = \frac{4\pi^2 r_p^3}{G T_p^2}, \Rightarrow \frac{\mathfrak{M}_p}{4\pi r_p^3} = \frac{\pi}{G T_p^2(1+x)}. \quad (55)$$

Из (54) и (55) следует, что

$$\bar{\rho} = \frac{3\pi\chi^3}{G T_p^2(1+x)}. \quad (56)$$

Воспользуемся третьим обобщенным законом Кеплера для системы «планета-корабль».

$$(\mathfrak{M}_p + m) = \frac{4\pi^2 a_s^3}{G T_s^2}, \quad (57)$$

здесь m – масса космического корабля, a_s , T_s – большая полуось и сидерический период обращения космического корабля. Масса корабля традиционно много меньше массы планеты (т.е. $m \ll \mathfrak{M}_p$). Следовательно, уравнение (57) можно переписать так

$$\mathfrak{M}_p = \frac{4\pi^2 a_s^3}{G T_s^2}. \quad (58)$$

Из (53) и (58) следует альтернативное выражение для плотности

$$\bar{\rho} = \frac{3\pi}{G T_s^2} \left(\frac{a_s}{\mathfrak{R}_p} \right)^3. \quad (59)$$

Очевидно, бортовыми часами можно измерить лишь синодический период обращения корабля (S), как промежуток времени между двумя его последовательными прохождениями над какой-либо достопримечательностью экватора. Чтобы ее заметить невооруженным глазом необходимо чтобы корабль

был на низкой орбите. Далее будем полагать, что радиус орбиты корабля равен радиусу планеты $a_s \approx \mathfrak{R}_s$. Тогда согласно (59) $\bar{\rho}$ определяется лишь сидерическим периодом обращения корабля вокруг планеты.

Запишем уравнение для синодического периода

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_s} - \frac{1}{P_p}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_p}. \quad (60)$$

Очевидно, для максимально точного определения плотности планеты по формуле (59), необходимо, чтобы период $T_s \rightarrow S$, что возможно лишь при условии $T_s \ll T_p$ или

$$\frac{T_s}{T_p} \ll 1. \quad (61)$$

Приравняем (56) и (59). В результате получаем

$$\frac{3\pi\chi^3}{G T_p^2(1+x)} = \frac{3\pi}{G T_s^2}, \Rightarrow \left(\frac{T_s}{T_p}\right)^2 = \frac{(1+x)}{\chi^3} \ll 1, \Rightarrow x \ll \chi^3 - 1$$

или

$$\frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{M}_p} \ll \chi^3 - 1. \quad (62)$$

Последнее ограничение и есть искомый ответ к задаче.

Ответ: к задаче представлен выражением (62). (12 баллов).

Задача № 15. «Особенности солнечных и лунных затмений»

Решение: 1. Для наступления солнечного или лунного затмений необходимо выполнение двух условий:

а) Луна должна располагаться в малой окрестности прямой «Солнце-Земля»: либо между этими телами (в случае солнечного затмения), либо в оппозиции к Солнцу (в случае лунного затмения);

б) Луна должна находиться вблизи одного из узлов своей орбиты.

2. Саросом или драконическим периодом называется интервал из 223 синодических месяцев (в среднем, приблизительно 6585.3211 суток, или 18 лет и $10\frac{1}{3}$ или $11\frac{1}{3}$ суток, в зависимости от количества високосных лет в данном периоде). Этот промежуток времени почти в точности равен 242 драконическим месяцам (т.е. промежутку времени, между двумя последовательными прохождениями Луны через один и тот же узел орбиты в ее движении вокруг Земли). Их продолжительность составляет 6585.36 сут., т.е. через указанное время Луна возвращается к тому же узлу орбиты. К тому же узлу возвращается и Солнце, поскольку проходит целое число драконических лет (19 лет или 6585.78 сут.), т.е. периодов прохождения Солнца через один и тот же узел орбиты Луны.

Кроме того, указанное время почти в точности равно 239 аномалистических месяцев Луны (что составляет 6585.54 сут. и представляет собой промежуток

времени между двумя последовательными прохождениями Луны через перигей в ее движении вокруг Земли), так что соответствующие затмения в каждом саросе наступают при одинаковом удалении Луны от Земли и имеют одну и ту же длительность. В течение одного сароса, в среднем, проходит $N_{\odot}=41$ солнечных затмений и $N_{\zeta}=29$ лунных затмений. Тогда отношение их есть $\eta = N_{\odot}/N_{\zeta} = 1.41$.

Обоснуем строго математически данное отношение. Будем полагать, что солнечные и лунные затмения происходят случайным образом в разных точках лунной орбиты. Следовательно, отношение η на больших временных интервалах должно быть равно отношению длин дуг орбиты, где могут происходить солнечные и лунные затмения.

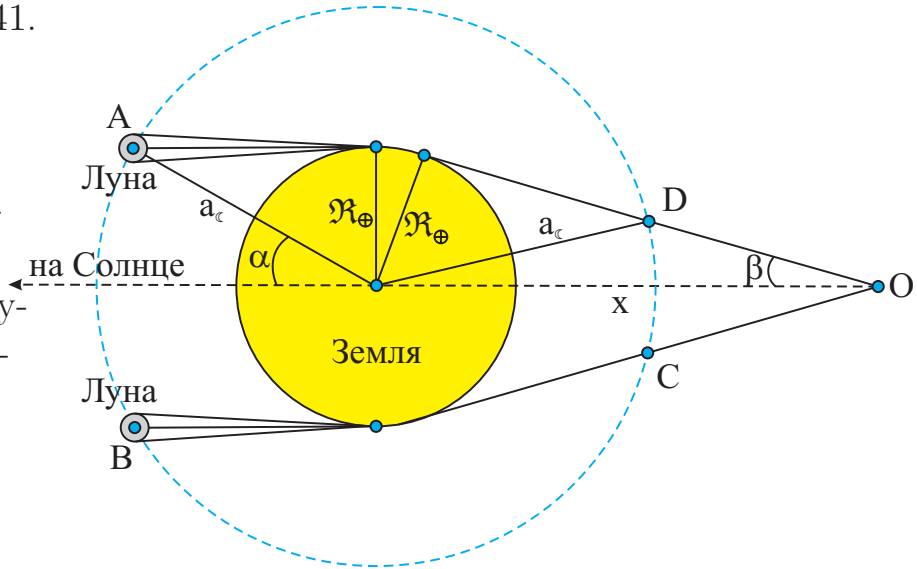


Рис. 15: к определению искомой величины η .

Очевидно, солнечные затмения происходят на дуге орбиты $\overset{\frown}{AB}$ (см. рис. 15), пока тень Луны попадает на тело Земли.

$$\overset{\frown}{AB} = a_{\zeta} \cdot 2\alpha = 2a_{\zeta} \cdot \arcsin\left(\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{a_{\zeta}}\right) \approx 2\mathfrak{R}_{\oplus}, \text{ поскольку } \mathfrak{R}_{\oplus} \ll a_{\zeta}. \quad (63)$$

Лунные затмения могут быть реализованы лишь, когда Луна находится на дуге $\overset{\frown}{CD}$, т.е. внутри конуса земной тени.

$$\overset{\frown}{CD} \approx 2(x - a_{\zeta}) \operatorname{tg} \beta. \quad (64)$$

С другой стороны,

$$\sin \beta = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{x} = \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{(a_{\oplus} + x)}, \Rightarrow x = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus} a_{\oplus}}{(\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\oplus})} = 1.383 \cdot 10^6 \text{ км.} \quad (65)$$

В итоге

$$\operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta \approx \beta = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{x} = \frac{(\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\oplus})}{a_{\oplus}}. \quad (66)$$

Из (64)-(66) следует явное выражение для дуги

$$\overset{\frown}{CD} = 2 \left(\frac{\mathfrak{R}_{\oplus} a_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\oplus}} - a_{\zeta} \right) \cdot \frac{\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\oplus}}{a_{\oplus}} = 2 \left(\mathfrak{R}_{\oplus} - \frac{a_{\zeta}}{a_{\oplus}} (\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\oplus}) \right) = 1.44 \mathfrak{R}_{\oplus}.$$

Следовательно

$$\eta = \frac{\overset{\circ}{A}B}{\overset{\circ}{C}D} = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus} - \frac{a_{\zeta}}{a_{\oplus}}(\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\oplus})} = 1.38. \quad (67)$$

Полученное значение является весьма близким к значению, полученному ранее, что позволяет считать сделанные выкладки математическим обоснованием данного факта.

3. С данной точки поверхности Земли чаще можно наблюдать лунное затмение, поскольку последнее наблюдается с любой точки ночной стороны Земли, а солнечное затмение наблюдается лишь в том месте, куда упала тень (полутень) от Луны.

Вероятность увидеть лунное затмение есть

$$P_{\text{ЛЗ}} = \frac{S_{\text{ноч}}}{S_{\oplus}} \approx \frac{1}{2}, \quad (68)$$

здесь $S_{\text{ноч}}$ – площадь «ночной» стороны Земли, $S_{\oplus}$ – площадь всей поверхности Земли. Т.о., каждое второе лунное затмение можно увидеть с поверхности Земли.

Определим диаметр лунной тени во время солнечного затмения. Из рисунка 16 видно, что

$$\sin \gamma = \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\zeta} + y} = \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus} + y}, \Rightarrow y = \frac{a_{\oplus}\mathfrak{R}_{\zeta} - a_{\zeta}\mathfrak{R}_{\odot}}{(\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\zeta})}, \quad (69)$$

тогда

$$\sin \gamma = \frac{\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\oplus} - a_{\zeta}} \ll 1. \quad (70)$$

Следовательно, диаметр тени Луны на Земле есть

$$\begin{aligned} D_{\text{sh}} &= 2(y + \mathfrak{R}_{\oplus}) \operatorname{tg} \gamma \approx 2 \left(\frac{a_{\oplus}\mathfrak{R}_{\zeta} - a_{\zeta}\mathfrak{R}_{\odot}}{\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\zeta}} + \mathfrak{R}_{\oplus} \right) \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\oplus} - a_{\zeta}} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{a_{\oplus}\mathfrak{R}_{\zeta} - a_{\zeta}\mathfrak{R}_{\odot}}{a_{\oplus} - a_{\zeta}} + \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}(\mathfrak{R}_{\odot} - \mathfrak{R}_{\zeta})}{(a_{\oplus} - a_{\zeta})} \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Как известно, расстояния до Луны и Солнца меняются в пределах:

$$a_{\zeta}^{(0)}(1 - \varepsilon_{\zeta}) \leq a_{\zeta} \leq a_{\zeta}^{(0)}(1 + \varepsilon_{\zeta}), \quad a_{\oplus}^{(0)}(1 - \varepsilon_{\oplus}) \leq a_{\oplus} \leq a_{\oplus}^{(0)}(1 + \varepsilon_{\oplus}) \quad (72)$$

где $a_{\zeta}^{(0)} = 384399$ км, $\varepsilon_{\zeta} = 0.055$ – большая полуось и эксцентриситет лунной орбиты: $a_{\oplus}^{(0)} = 1.496 \cdot 10^8$ км, $\varepsilon_{\oplus} = 0.0167$ – большая полуось и эксцентриситет земной орбиты.

На рисунке 17 показана область, где $D_{\text{sh}} \geq 0$. Нетрудно убедиться в том, что условие $D_{\text{sh}} \geq 0$ выполняется лишь в области возможных значений

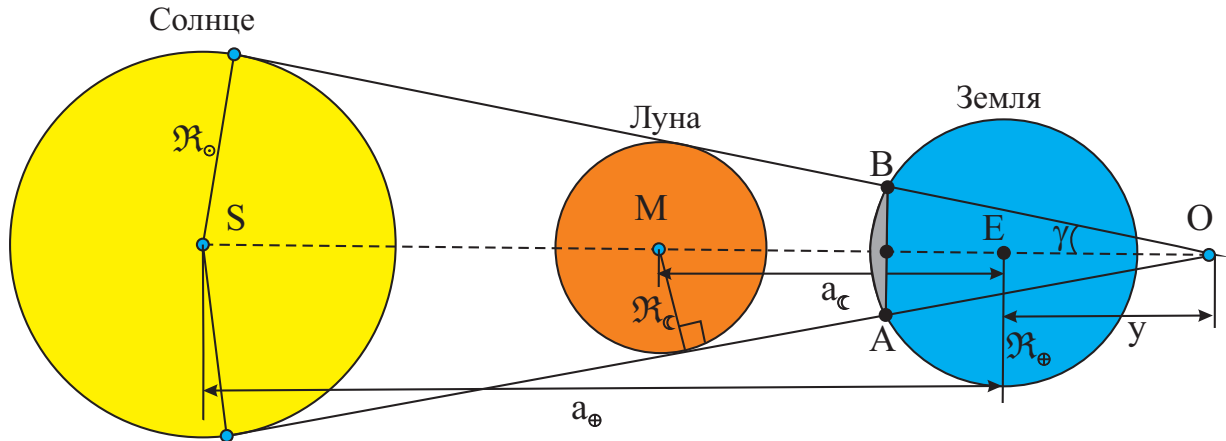


Рис. 16: к определению диаметра лунной тени на поверхности Земли.

$(a_{\odot}, a_{\oplus})$, которая составляет долю $x=0.40$ от всей области допустимых значений (72). При этом D_{sh} может изменяться в пределах

$$0 \leq D_{\text{sh}} \leq 212 \text{ км}, \quad \bar{D}_{\text{sh}} = 106 \text{ км}. \quad (73)$$

Во время полного затмения лунная тень проходит полосу шириной D_{sh} и длиной ℓ :

$$0 \leq \ell \leq 2R_{\oplus}, \Rightarrow \bar{\ell} = R_{\oplus}. \quad (74)$$

Следовательно, лунная тень «заметает» площадь на плоском диске Земли (если смотреть с Луны):

$$S_{\text{сз}} = \bar{D}_{\text{sh}} \cdot \bar{\ell}. \quad (75)$$

Тогда вероятность наблюдать солнечное затмение в данном месте можно оценить как

$$P_{\text{сз}} = \frac{S_{\text{сз}}}{S_{\oplus}} \cdot x = \frac{\bar{D}_{\text{sh}} x}{\pi R_{\oplus}} = 2.1 \cdot 10^{-3}. \quad (76)$$

Следовательно, одно такое событие можно наблюдать через $1/P_{\text{сз}}=472$ солнечных затмений. Учитывая, что в одном саросе 41 солнечное затмение, получаем, что одно такое затмение происходит за $\frac{18.02}{P_{\text{сз}}} \cdot 41 \approx 210$ лет (более точные оценки дают значение $250 \div 300$ лет).

4. Частное солнечное затмение – вид солнечного затмения, при котором лунный диск закрывает лишь частично диск Солнца, а земной наблюдатель попадает в область лунной полутени.

Полное затмение происходит при полном покрытии диска Солнца Луной (см. рис. 16). Вероятность наблюдения полного солнечного затмения тем выше, чем меньше угловой диаметр Солнца, что достигается в случае пребывания Солнца в афелии в начале июля. Т.о., летом полные солнечные затмения наблюдаются наиболее часто. Максимальная фаза такого затмения есть

$$F_{\text{max}} = \frac{D''_{\odot \text{ max}}}{D''_{\odot \text{ min}}} = \frac{2R_{\odot}}{a_{\odot}(1 - \varepsilon_{\odot})} \frac{a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus})}{2R_{\oplus}} = \left(\frac{R_{\odot}}{R_{\oplus}} \right) \left(\frac{a_{\oplus}}{a_{\odot}} \right) \left(\frac{1 + \varepsilon_{\oplus}}{1 - \varepsilon_{\odot}} \right) = 1.05. \quad (77)$$

5. Кольцевое затмение – это вид солнечного затмения, реализуемое в случае, когда угловой диаметр Солнца больше лунного, в результате чего, диск Луны не может полностью закрыть диск Солнца, даже, если проходит через его центр. Чаще всего оно наблюдается, когда угловой диаметр Солнца максимален, т.е. когда Земля находится в перигелии зимой (в начале января).

$$F_{\min} = \frac{D''_{\zeta \min}}{D''_{\odot \max}} = \left(\frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\mathfrak{R}_{\odot}} \right) \left(\frac{a_{\oplus}}{a_{\zeta}} \right) \left(\frac{1 - \varepsilon_{\oplus}}{1 + \varepsilon_{\zeta}} \right) = 0.91. \quad (78)$$

6. Действительно, самые продолжительные затмения наблюдаются в тропическом поясе. Продолжительность затмения (полного или частного) пропорциональна угловому диаметру Луны и обратно пропорциональна скорости ее относительного движения (ω_{rel}):

$$\tau \sim \frac{D''_{\zeta}}{\omega_{\text{rel}}}. \quad (79)$$

Поскольку

$$D''_{\zeta} = 2 \cdot \arcsin \left[\frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\zeta}} \right] \approx \frac{2\mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\zeta}}. \quad (80)$$

Угловая скорость относительно движения определяется разностью орбитальной скорости Луны и точки поверхности Земли (поскольку их движения сонаправлены):

$$\omega_{\text{rel}} = \frac{v_{\zeta} - v_{\oplus}}{a_{\zeta}}, \quad (81)$$

ω_{rel} будет минимальна на экваторе, где $v_{\oplus} = \omega_{\oplus} \mathfrak{R}_{\oplus}$ достигает максимума. Из (79)-(81) следует, что

$$\tau \sim \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{v_{\zeta} - v_{\oplus}}. \quad (82)$$

Очевидно, искомое время τ максимально для наблюдателя на экваторе. (13 баллов).

Задача № 16. «Спектр быстро вращающейся планеты»

Дано:

$\chi, f, \alpha, \lambda_0,$
 $\rho_0, \rho.$

Решение:

Спектральная линия, наблюдаемая в спектрограф, есть изображение щели спектрографа в данной длине волны, в которой объект темнее (в случае линии поглощения) или

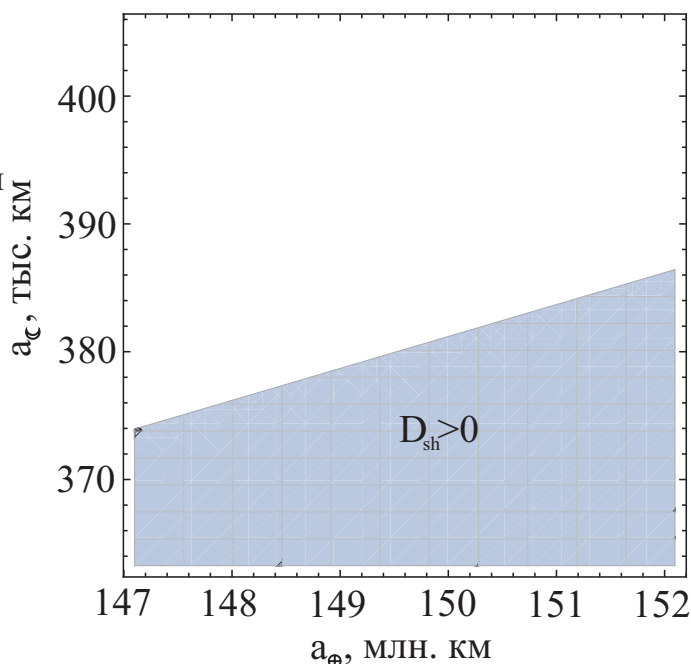


Рис. 17: к определению доли x .

Найти:

объяс-ние

факта-?

 v_0, T -? $\operatorname{tg} \alpha(\lambda_0), \mathfrak{M}_p$ -?

светлее (в случае линии излучения), чем в окружающей спектральной области. Предположим, что в фокальной плоскости прибора создается изображение планеты с экваториальным радиусом R_0 . За счет вращения планеты вид спектральной линии будет искажен, но она останется прямой. Покажем это.

Пусть точка A принадлежит экватору и отстоит от меридиана, ориентированного к наблюдателю, на угол γ (см. рис. 18). Для наблюдателя эта точка будет отстоять от центра диска на расстояние $R = R_0 \sin \gamma$, а ее лучевая проекция скорости $v = v_0 \sin \gamma$, тогда

$$v = v_0 \left(\frac{R}{R_0} \right). \quad (83)$$

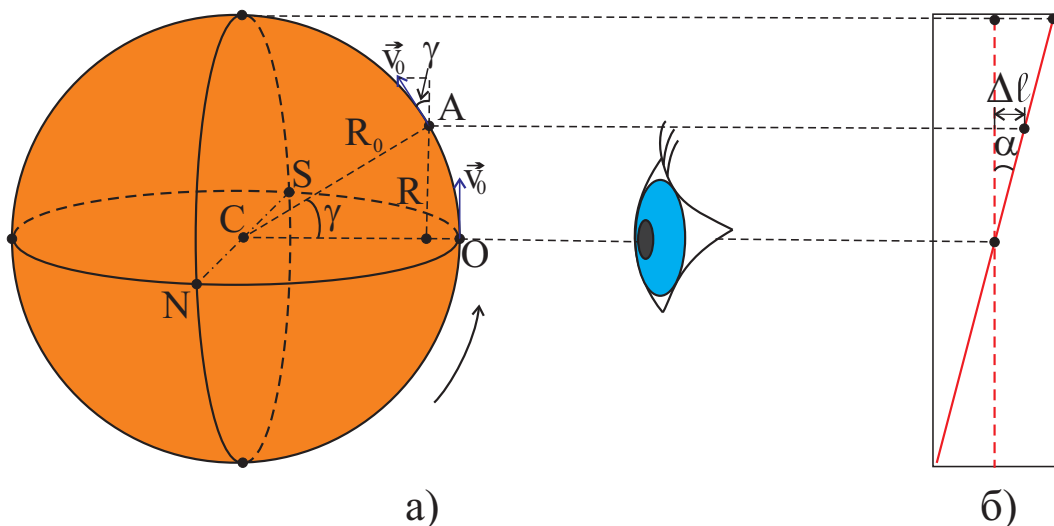


Рис. 18: к определению наклона спектральной линии.

В силу эффекта Доплера, часть спектральной линии, соответствующей точке A испытает изменение длины волны $\Delta \lambda$:

$$\Delta \lambda = \lambda_0 \left(\frac{v}{c} \right) = \lambda_0 \left(\frac{v_0}{c} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right). \quad (84)$$

Поскольку, у любого спектрографа разрешающая способность (как отношение разности длин волн двух соседних спектральных линий к расстоянию между этими линиями в наблюдаемом спектре) известна и равна

$$\chi = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \ell}, \Rightarrow \Delta \ell = \frac{1}{\chi} \Delta \lambda. \quad (85)$$

Из (84) и (85) следует, что

$$\Delta \ell = \left(\frac{\lambda_0}{\chi} \right) \left(\frac{v_0}{c} \right) \frac{R}{R_0} = \operatorname{tg} \alpha \cdot R, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\lambda_0}{\chi} \right) \left(\frac{v_0}{c} \right) \frac{1}{R_0}. \quad (86)$$

Очевидно, что последнее выражение есть уравнение прямой $\Delta\ell(R)$.

2. Из (86) следует скорость экваториальных точек поверхности планеты (при $R = R_0$):

$$v_0 = c \left(\frac{\chi}{\lambda_0} \right) R_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad (87)$$

где

$$R_0 = \rho f. \quad (88)$$

3. С другой стороны линейный радиус планеты есть

$$\mathfrak{R}_p = \mathfrak{R}_\oplus \left(\frac{\rho}{p_0} \right), \quad (89)$$

здесь $\mathfrak{R}_\oplus$ – радиус Земли. И экваториальную скорость можно записать иначе

$$v_0 = \frac{2\pi\mathfrak{R}_p}{T_p}, \quad T_p = \frac{2\pi\mathfrak{R}_\oplus}{c} \left(\frac{\rho}{p_0} \right) \left(\frac{\lambda_0}{\chi} \right) \frac{1}{\rho f \operatorname{tg} \alpha}, \Rightarrow$$

$$T_p = \frac{2\pi\mathfrak{R}_\oplus}{c f \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{\lambda_0}{p_0} \right) \frac{1}{\chi}. \quad (90)$$

4. Из выражений (86), (88) следует формула для $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_0}{\rho f} \left(\frac{v_0}{c} \right) \frac{1}{\chi}. \quad (91)$$

Очевидно, что зависимость $\operatorname{tg} \alpha$ от λ_0 является линейной. Чем больше угол, тем проще его измерить. Следовательно, проще его измерить для красных лучей с бóльшей длиной волны.

5. Если состояние планеты близко к нарушению ее ротационной устойчивости, то для любого малого элемента вещества экватора планеты скорость v_0 , фактически, должна быть равна первой космической скорости планеты:

$$v_0 = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p}}, \Rightarrow \mathfrak{M}_p = \frac{\mathfrak{R}_p}{G} v_0^2 = \frac{\mathfrak{R}_\oplus}{G} \left(\frac{\rho^3}{p_0} \right) c^2 \left(\frac{\chi}{\lambda_0} \right)^2 f^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (92)$$

Ответ: к задаче представляется формулами (86)-(88), (90)-(92). (13 баллов).

Задача № 17. «Максимальные высоты гор на поверхностях планет земной группы»

Решение. 1. Рассмотрим узкий вертикальный столб горных пород в теле горы, находящейся на поверхности планеты. Давление данного столба на свое основание можно оценить по формуле:

$$p = \rho g h, \quad (93)$$

где ρ – средняя массовая плотность горных пород, g – ускорение свободного падения у поверхности, которое можно записать, с использованием закона всемирного тяготения Ньютона, в следующей форме:

$$g = \frac{G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2}, \quad (94)$$

где G – универсальная гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}$ – масса планеты, $\mathfrak{R}$ – радиус планеты. Подставим выражение (94) в (93), получаем окончательное выражение для давления столба из горных пород:

$$p = \rho \frac{G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2} h, \Rightarrow h = \frac{p \mathfrak{R}^2}{G \rho \mathfrak{M}}. \quad (95)$$

Из полученного результата следует что, чем больше предельное механическое давление ($p_{\max}$), которое еще выдерживают горные породы, не разрушаясь (механическое напряжение на разрыв), и радиус планеты, тем больше максимальная высота гор. Чем больше плотность горных пород и масса планеты, тем данная величина будет меньше.

Учитывая далее, что доминирующим материалом, формирующим горные массивы всех планет земной группы, являются базальтовые породы, плотность которых заключена в интервале (3), при этом механическое напряжение на разрыв данных пород определяется интервалом (4), следовательно нетрудно вычислить минимальное и максимальное значения для максимальной высоты гор на поверхности данных планет:

$$h_{\min} = \frac{p_{\max}^{(\min)} \mathfrak{R}^2}{G \rho_{\max} \mathfrak{M}}, \quad h_{\max} = \frac{p_{\max}^{(\max)} \mathfrak{R}^2}{G \rho_{\min} \mathfrak{M}}, \quad (96)$$

здесь $\rho_{\min}$, $\rho_{\max}$ – пограничные значения интервала (3), $p_{\max}^{(\min)}$, $p_{\max}^{(\max)}$ – пограничные значения интервала (4). Значения масс и радиусов небесных тел, а также результаты численных расчетов представлены в таблице 3. Здесь в четвертой колонке представлены значения нижней границы $h_{\min}$ интервала возможных значений искомой величины. В пятом столбце представлены значения верхней границы $h_{\max}$ того же интервала.

Из сопоставления полученных результатов с данными наблюдений (см. таблицу 1) очевидно, что значения высот самых высоких горных массивов всех планет земной группы (за исключением Меркурия) лежат внутри полученных интервалов, что указывает на адекватность прогнозов предложенной модели и ее работоспособность.

2. Вычислим параметр β для каждой планеты, согласно (5). Значения данного параметра для рассматриваемых планет представлены в шестой колонке таблицы 3. Очевидно, что параметр β монотонно возрастает при переходе от более близкой к более далекой планете от Солнца, вплоть до Земли, а затем

Планета	$\mathcal{M}$, кг	$\mathcal{R}$, км	$h_{\min}$, км	$h_{\max}$, км	β	$r_{\min}^{(\min)}$, км	$r_{\min}^{(\max)}$, км	$M_{\min}^{(\min)}$, кг	$M_{\min}^{(\max)}$, кг
Меркурий	$3.30 \cdot 10^{23}$	2440	21.80	56.33	-0.501	31.15	80.46	$5.19 \cdot 10^{16}$	$1.16 \cdot 10^{18}$
Венера	$4.87 \cdot 10^{24}$	6052	9.09	23.48	0.133	12.98	33.54	$3.85 \cdot 10^{15}$	$8.58 \cdot 10^{16}$
Земля	$5.97 \cdot 10^{24}$	6371	8.22	21.23	0.152	11.74	30.32	$2.85 \cdot 10^{15}$	$6.34 \cdot 10^{16}$
Марс	$6.42 \cdot 10^{23}$	3390	21.63	55.89	0.127	30.90	79.84	$5.32 \cdot 10^{16}$	$1.18 \cdot 10^{18}$

Таблица 3: значения масс и радиусов планет земной группы; значения искомым величин для данных планет.

начинает убывать. Это указывает на то, что чем ближе планета к Солнцу и чем меньше ее масса, тем действительная высота гор меньше относительно возможной. Очевидно, что это связано с гравитацией Солнца: чем ближе планета к Солнцу, тем оно сильнее оказывало разрушительное действие своими приливными силами на горные массивы планеты. И чем меньше масса планеты, тем она "слабее" сопротивлялась этому воздействию, в течение всего времени существования Солнечной системы.

3. Рассмотрим гору, имеющую форму конуса с круглым основанием. Из рис. 19 очевидно, что радиус конуса можно представить как

$$r = h \operatorname{ctg} \alpha. \quad (97)$$

Чем больше угол α , тем меньше будет искомым радиус. Найдем максимальное значение $\alpha_{\max}$ угла наклона образующей конуса к горизонту. Для этого рассмотрим песчинку на поверхности горы (см. рис. 19). Запишем для нее второй закон Ньютона в предельном положении покоя:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0.$$

Рис. 19: к определению угла наклона образующей конуса горы.

В проекциях на ось OX последнее уравнение представляется в виде:

$$m g \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \Rightarrow m g \sin \alpha = \mu m g \cos \alpha, \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \mu, \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \mu = 35.0^\circ. \quad (98)$$

Следовательно, минимальный радиус кругового основания горы есть

$$r_{\min} = h / \operatorname{tg} \alpha_{\max} = h / \mu = 1.43 h. \quad (99)$$

А пограничные значения интервала возможных значений данной величины определяются формулами:

$$r_{\min}^{(\min)} = h_{\min} / \mu = 1.43 h_{\min}, \quad r_{\min}^{(\max)} = h_{\max} / \mu = 1.43 h_{\max}. \quad (100)$$

Численные значения последних величин представлены в 7-8 столбцах таблицы 3. Из таблицы очевидно, что у Меркурия и Марса, планет с самыми малыми массами, возможные размеры гор (без учета солнечных приливов) являются наибольшими!

4. Минимальная масса гор будет достигаться при минимальном объеме конуса, который определяется выражением вида:

$$V_k = \frac{\pi}{3} h r_{\min}^2, \quad (101)$$

тогда минимальная масса горы есть

$$M_{\min} = \frac{\pi}{3} \rho h r_{\min}^2 = \frac{\pi \rho h^3}{3 \mu^2}. \quad (102)$$

Пограничные значения интервала допустимых значений, очевидно, запишутся в виде:

$$M_{\min}^{(\min)} = \frac{\pi \rho_{\min} h_{\min}^3}{3 \mu^2}, \quad M_{\min}^{(\max)} = \frac{\pi \rho_{\max} h_{\max}^3}{3 \mu^2}. \quad (103)$$

Численные значения последних величин представлены в 9-10 столбцах таблицы 3. Тенденции в отношении массы аналогичны тенденциям в случае геометрических размеров гор.

Ответ: к задаче представлен результатами (96), (99), (103) и численными значениями таблицы 3. (14 баллов).

Задача № 18. «Свойства звезды 59 Девы и экзопланеты GJ 504b»

Дано:

$r_* = 57.27$ св.
лет,
 $M_* = 1.2 M_{\odot}$,
 $R_* = 1.36 R_{\odot}$,
 $T_* = 6205$ K,
 $M_p = 4 M_J$,
 $R_p = 0.96 R_J$,
 $T_p = 544$ K,
 $A = 0.50$.

Найти:

$a_p, T_p, \bar{\rho}_* - ?$
 $g_*, v_*^{(I)}, v_*^{(II)} - ?$
 $\rho_p, g_p, v_p^{(I)} - ?$
 $v_p^{(II)}, x, R_{\text{Roche}} - ?$

Решение:

1. Следует сразу заметить, что на фотографии указан масштаб. С использованием линейки определяем длину штриха, соответствующего одной угловой секунде $\ell = 35$ мм, тогда угловой масштаб есть

$$\mu_a = \frac{1''}{\ell} = 2.86 \cdot 10^{-2}''/\text{мм}. \quad (104)$$

Далее измеряем линейкой расстояние между планетой и звездой $\ell_p = 88$ мм (Ваши значения ℓ и ℓ_p могут быть иными при использовании фотографии с иными линейными размерами). Тогда определяем угловой радиус орбиты планеты:

$$\rho_p'' = \mu_a \ell_p = 2.51''. \quad (105)$$

Следовательно, радиус орбиты планеты есть

$$a_p = r_* \left(\frac{\rho_p''}{206265''} \right) = 44.2 \text{ a.e.} \quad (106)$$

Период обращения системы относительно центра масс системы можно определить с использованием третьего обобщенного закона Кеплера:

$$\frac{(\mathfrak{M}_* + \mathfrak{M}_p) T_p^2}{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus) T_\oplus^2} = \frac{a_p^3}{a_\oplus^3}, \Rightarrow T_p = T_\oplus \left(\frac{a_p}{a_\oplus} \right)^{3/2} \left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_* + \mathfrak{M}_p} \right)^{1/2} = 268 \text{ лет}, \quad (107)$$

здесь $\mathfrak{M}_\odot$, $\mathfrak{M}_\oplus$ – массы Солнца и Земли соответственно; $a_\oplus$ – большая полуось Земли и $T_\oplus$ – ее период обращения.

2. Для звезды имеем:

$$\bar{\rho}_* = \frac{\mathfrak{M}_*}{\frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_*^3} = 0.477 \bar{\rho}_\odot = 673 \text{ кг/м}^3, \quad (108)$$

$$g_* = \frac{G \mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*^2} = 0.649 g_\odot = 176 \text{ м/с}^2, \quad (109)$$

$$v_*^{(I)} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*}} = 0.939 v_\odot^{(I)} = 410 \text{ км/с}, \quad (110)$$

$$v_*^{(II)} = \sqrt{2} v_*^{(I)} = 580 \text{ км/с}, \quad (111)$$

где $\bar{\rho}_\odot = 1410 \text{ кг/м}^3$ – средняя массовая плотность Солнца, $g_\odot = 272 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения у поверхности Солнца, $v_\odot^{(I)} = 437 \text{ км/с}$ – первая космическая скорость у поверхности Солнца.

3. Для экзопланеты имеем

$$\bar{\rho}_p = \frac{\mathfrak{M}_p}{\frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_p^3} = 4.52 \bar{\rho}_J = 5995 \text{ кг/м}^3, \quad (112)$$

$$g_p = \frac{G \mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p^2} = 4.34 g_J = 108 \text{ м/с}^2, \quad (113)$$

$$v_p^{(I)} = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p}} = 2.04 v_J^{(I)} = 86 \text{ км/с}, \quad (114)$$

$$v_p^{(II)} = \sqrt{2} v_p^{(I)} = 121 \text{ км/с}, \quad (115)$$

здесь $\bar{\rho}_J = 1326 \text{ кг/м}^3$, $g_J = 24.79 \text{ м/с}^2$, $v_J^{(I)} = 42.07 \text{ км/с}$ – средняя массовая плотность, ускорение свободного падения и первая космическая скорость у поверхности Юпитера соответственно.

4. Определим полный поток энергии, падающий от звезды на планету. Светимость звезды есть

$$L_* = 4\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_*^4, \quad (116)$$

освещенность и поток у поверхности GJ504b тогда запишутся так

$$E_* = \frac{L_*}{4\pi a_p^2}, \quad \Phi_p = E_* \pi \mathfrak{R}_p^2 = 4\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_*^4 \frac{\mathfrak{R}_p^2}{4 a_p^2} = \pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_*^4 \left(\frac{\mathfrak{R}_p}{a_p} \right)^2.$$

Далее запишем уравнение энергетического баланса для экзопланеты

$$(1 - A_p)\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_*^4 \left(\frac{\mathfrak{R}_p}{a_p}\right)^2 + \Phi_{\text{int}} = 4\pi \mathfrak{R}_p^2 \sigma T_p^4.$$

Разделим последнее уравнение на его первое слагаемое:

$$1 + x = \frac{4}{(1 - A_p)} \left(\frac{a_p}{\mathfrak{R}_*}\right)^2 \left(\frac{T_p}{T_*}\right)^4, \Rightarrow$$

$$x = \frac{4}{(1 - A_p)} \left(\frac{a_p}{\mathfrak{R}_*}\right)^2 \left(\frac{T_p}{T_*}\right)^4 - 1 = 2.31 \cdot 10^4 \text{ раз!} \quad (117)$$

5. Как известно, **сферой Роша** называется область пространства вокруг материнской звезды, имеющая форму шара, радиус которого, равен радиусу круговой орбиты экзопланеты, обращающейся вокруг центрального тела, на которой приливные силы, вызванные гравитацией звезды, равны силам самогравитации планеты.

Получим явное выражение для радиуса сферы Роша. Рассмотрим силы, действующие на малые элементы тела экзопланеты массой Δm , находящиеся в самой удаленной (B) и самой близкой точке (A) к материнской звезде (см. рис. 20). Запишем второй закон Ньютона для данных элементов:

$$\Delta m \vec{a}_A = \vec{F}_A + \vec{F}'_A, \quad \Delta m \vec{a}_B = \vec{F}_B + \vec{F}'_B, \quad (118)$$

здесь $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ – силы притяжения, действующие со стороны звезды, $\vec{F}'_A, \vec{F}'_B$ – силы притяжения, действующие со стороны экзопланеты. Для экзопланеты, являющейся протяженным телом, находящимся в центральном гравитационном поле звезды, силы притяжения в ближайшей ($\vec{F}_A$) и самой далекой ($\vec{F}_B$) точках тела отличаются, а именно

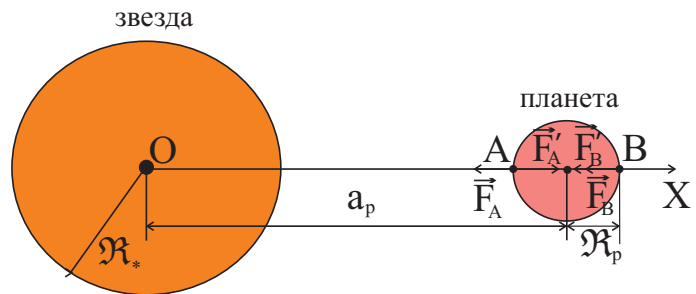


Рис. 20: к определению угла наклона образующей конуса горы.

$$F_A = \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_*}{(a_p - \mathfrak{R}_p)^2}, \quad F_B = \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_*}{(a_p + \mathfrak{R}_p)^2}. \quad (119)$$

Для данной системы (как и для большинства подобных систем) имеет место сильное неравенство вида $\mathfrak{R}_p \ll a_p$. Тогда, используя приближение вида $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, при $x \ll 1$, силы (119) можно представить в виде:

$$F_A \approx \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_*}{a_p^2} \left(1 + 2\frac{\mathfrak{R}_p}{a_p}\right), \quad F_B \approx \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_*}{a_p^2} \left(1 - 2\frac{\mathfrak{R}_p}{a_p}\right).$$

Разность этих сил

$$F_t = \Delta F = F_A - F_B \approx 4 \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_*}{a_p^2} \left(\frac{\mathfrak{R}_p}{a_p} \right) \quad (120)$$

ведет к растяжению тела экзопланеты в направлении «экзопланета-звезда». Последняя сила есть простейший пример приливной силы. Для того чтобы экзопланета оставалась единым телом, необходимо чтобы ее силы самогравитации были не меньше приливных сил звезды, при этом ускорения точек A и B были равны. Вычтем из первого уравнения системы (118) второе, в результате получаем

$$\vec{F}_A - \vec{F}_B + \vec{F}'_A - \vec{F}'_B = 0.$$

Спроецируем последнее уравнение на координатную ось OX :

$$-F_A + F_B + F'_A + F'_B = 0, \Rightarrow F'_A + F'_B = F_t. \quad (121)$$

Учтем также, что

$$F'_A = F'_B = \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p^2}. \quad (122)$$

С использованием (120), (122) уравнение (121) можно переписать в виде:

$$2 \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p^2} = 4 \frac{G \Delta m \mathfrak{M}_*}{a_p^2} \left(\frac{\mathfrak{R}_p}{a_p} \right), \Rightarrow \frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{R}_p^3} = 2 \frac{\mathfrak{M}_*}{a_p^3}.$$

Принимая во внимание, что $\mathfrak{M}_p = \rho_p \frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_p^3$, $\mathfrak{M}_* = \rho_* \frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_*^3$, последнее выражение можно представить в виде:

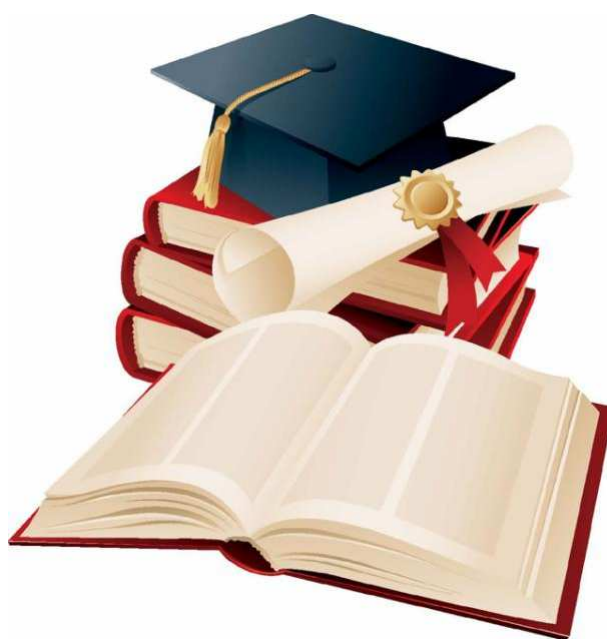
$$\rho_p = \frac{2\rho_* \mathfrak{R}_*^3}{a_p^3}, \Rightarrow$$

$$\mathfrak{R}_{\text{Roche}} = a_p = \mathfrak{R}_* \sqrt[3]{2 \left(\frac{\rho_*}{\rho_p} \right)} = 0.61 \mathfrak{R}_* = 0.830 \mathfrak{R}_{\odot} \approx 577000 \text{ км}, \quad (123)$$

т.е., полость Роша лежит внутри тела звезды. Поскольку радиус орбиты экзопланеты много больше $\mathfrak{R}_*$, то планете не угрожает попасть в полость Роша и быть разрушенной.

Ответ: к задаче представлен формулами (106)-(115), (117), (123), нет опасности. (15 баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альбедо – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

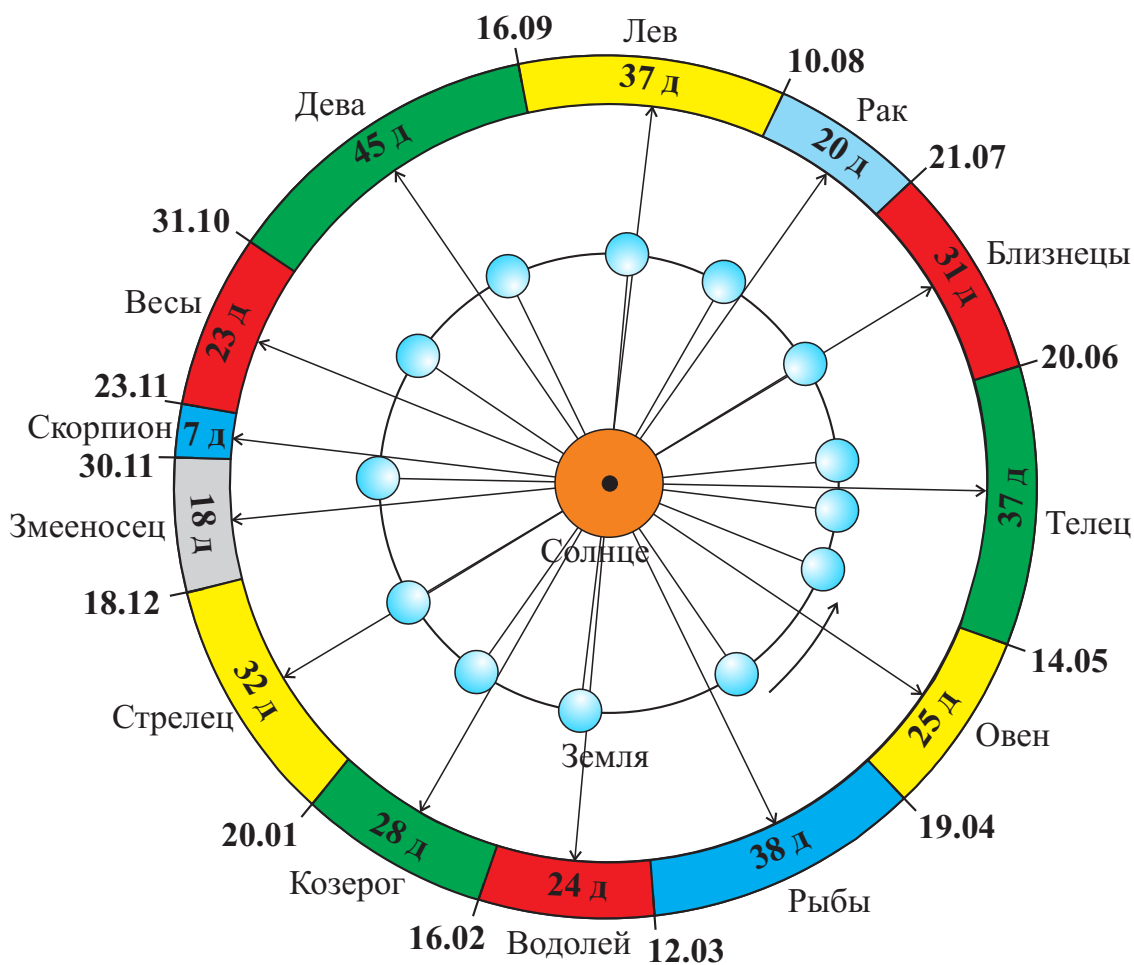


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

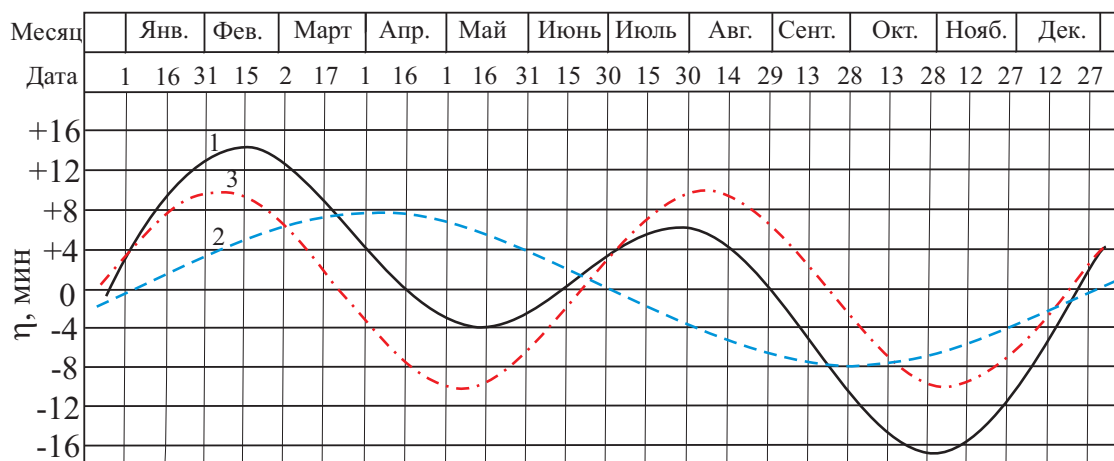


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

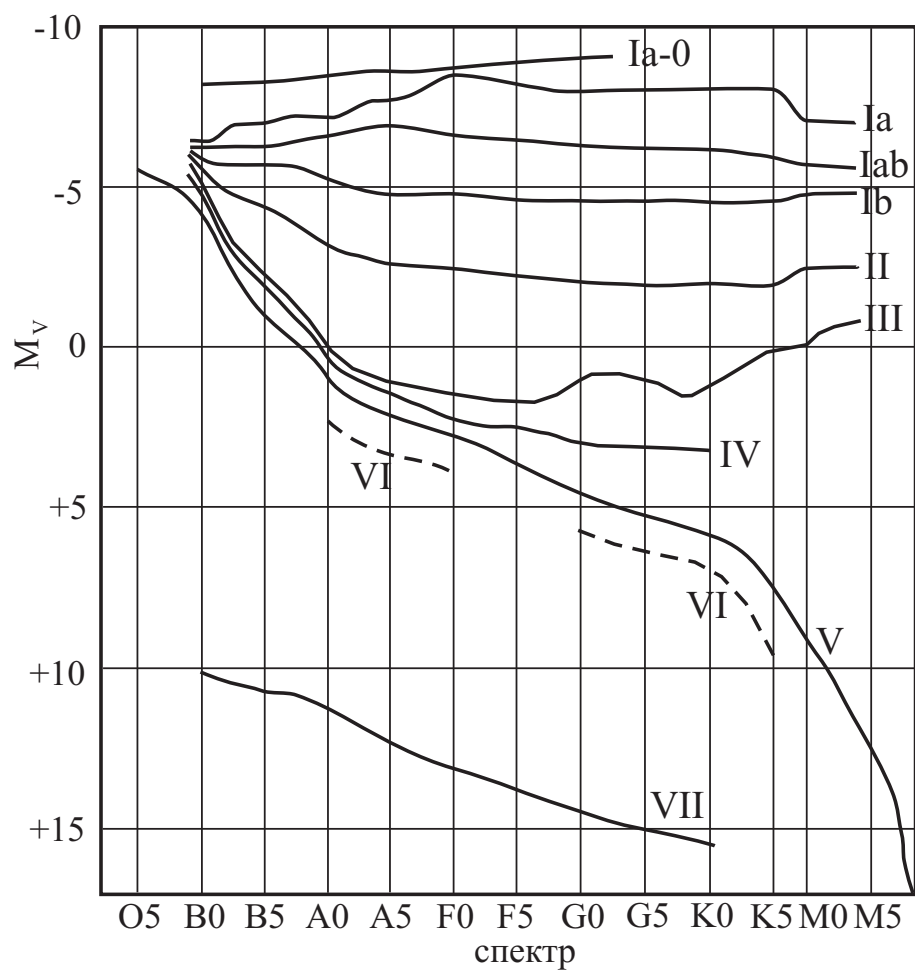


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

периоды	A I	A II	A III	A IV	V A	V B	A VI	A VII	B VIII	B IX
1	(H)							H Hydrogenium Водород	He Helium Гелий	
2	Li Lithium Литий	Be Beryllium Бериллий	B Borun Бор	C Carbonum Углерод	N Nitrogenium Азот	O Oxygenium Кислород	F Fluorum Фтор	Ne Neon Неон	Ar Argon Аргон	
3	Na Natrium Натрий	Mg Magnesium Магний	Al Aluminium Алюминий	Si Silicium Кремний	P Phosphorus Фосфор	S Sulfur Сера	Cl Chlorium Хлор	Ar Argon Аргон	Kr Krypton Криптон	Xe Xenon Ксенон
4	K Kalium Калий	Ca Calcium Кальций	Sc Scandium Скандий	Ti Titanium Титан	V Vanadium Ванадий	Cr Chromium Хром	Mn Manganum Марганец	Fe Ferrum Железо	Co Cobaltum Кобальт	Ni Niccolum Никель
5	Rb Rubidium Рубидий	Sr Strontium Стронций	Y Yttrium Иттрий	Zr Zirconium Цирконий	Nb Niobium Ниобий	Mo Molybdaenum Молибден	Tc Technetium Технеций	Ru Ruthenium Рутений	Rh Rhodium Родий	Pd Palladium Палладий
6	Cs Cesium Цезий	Ba Barium Барий	La* Lanthanum Лантан	Hf Hafnium Гафний	Ta Tantalum Тантал	W Wolframium Вольфрам	Re Rhenium Рений	Os Osmium Осий	Ir Iridium Иридий	Pt Platinum Платина
7	Fr Francium Франций	Ra Radium Радий	Ac** Actinium Актиний	Rf Rutherfordium Ферзерфордий	Db Dubnium Дубний	Sg Seaborgium Сиборгий	Bh Bohrium Борий	Hs Hassium Хассий	Mt Meitnerium Мейтнерий	Lr Lawrencium Лоренций
формулы летучих оксидов	R ₂ O	RO	R ₂ O ₃	RO ₂	RH ₃	RO ₃	RH ₂	R ₂ O ₇	RO ₄	
формулы летучих высших осоединений								RH		
лантаноиды*	Ce Cerium Церий	Pr Praeseodimium Прозеоимий	Nd Neodymium Неодиум	Sm Samarium Самарий	Eu Europium Европий	Gd Gadolinium Гадолиний	Tb Terbium Тербий	Dy Dysprosium Диспросий	Ho Holmium Гольшмий	Lu Lutetium Лютеций
актиноиды**	Th Thorium Торий	Pa Protactinium Протоактиний	U Uranium Уран	Np Neptunium Нептуний	Am Americium Америкий	Cm Curium Кюри	Bk Berkelium Берклий	Cf Californium Калифорний	Es Einsteinium Эйнштейний	Lr Lawrencium Лоренций

Рис. А.4. Таблица Менделеева.