

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2019
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.
ТУР № 2



Самара, 2019 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 18 оригинальных задач трех уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В) и «Профи» (уровень С). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2019 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 2». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/solutions>

Автор задач – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СДДЮТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе *ИТ_ЕX* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника SamRAS-2019

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

<http://vk.com/samrasolimp>

3. Сроки подачи работ SamRAS-2019 тура № 2 на проверку:

15.02.2019-15.05.2019!!!

4. Электронный ящик SamRAS-2019:

samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2019:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

https://vk.com/doc-57032141_451699934

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2019, **внимательно** ознакомьтесь с **«Руководством зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2019»!** Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника.**

Уровень «Новичок» (уровень А)***Задача № 1. «Луна, звезды и созвездия»***

На рис. 1 представлена фотография участка звездного неба, полученная астрофотографом-любителем. Определите по фотографии:

1. В каком созвездии находилась Луна на момент съемки? (1 балл).
2. Как называется ярчайшая звезда созвездия, в котором прибывала Луна? (1 балл).
3. Назовите пять ярчайших звезд, запечатленных на фотографии. (1 балл).
4. Как называется ярчайшее рассеянное скопление, изображенное на фотографии? (1 балл).
5. Как называется ярчайшая эмиссионная туманность (заметна на пределе видимости), запечатленная на фотографии? В каком созвездии она расположена? (1 балл).

Задача № 2. «Звезда с неопределенным азимутом»

Чему равно склонение звезды, наблюдаемой в г. Самаре ($\varphi_S = 53^\circ 12'$), у которой, как минимум 1 раз в сутки, азимут становится неопределенным? В какой точке кульминирует эта звезда? К какому классу (незаходящих, восходящих и заходящих, невосходящих) светил ее можно отнести? (3 балла).

Задача № 3. «Самый быстрый во вращении галилеев спутник»

Какой из галилеевых спутников Юпитера характеризуется наименьшим периодом вращения вокруг своей оси? Свой ответ поясните. (3 балла).

Задача № 4. «Луна в первой и последней четверти»

Луна наблюдается в г. Самаре ($\varphi_S = 53^\circ 12'$) в верхней кульминации в а) первой четверти, б) последней четверти. В какое время года ее высота над горизонтом будет 1) максимальной? 2) минимальной? Чему равны соответствующие значения высоты. Следует полагать наклонение лунной орбиты равным $i_\zeta = 5^\circ 09'$. (4 балла).



Рис. 1: фотография звездного неба (автор – Юрий Звездный).

Задача № 5. «Когда метеороидов падает больше?»

Как известно, на поверхность Земли непрерывно падают метеороиды. В какую часть суток на территорию Самарской области выпадает, в среднем, наибольшее количество метеороидов? Как этот результат зависит от времени года? (4 балла).

Задача № 6. «Уравнение гидростатического равновесия и его вывод»

Как известно, уравнение гидростатического равновесия является одним из главных уравнений физики внутреннего строения звезд и планет. Данное уравнение, в случае сферически симметричного распределения вещества в телах указанных объектов, представляется в виде:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G \rho(r) M(r)}{r^2}, \quad (1)$$

здесь p – давление вещества, $\rho(r)$ – его плотность на расстоянии r от геометрического центра тела, $M(r)$ – масса вещества, заключенного внутри сферы радиуса r . С использованием законов классической механики получите данное уравнение. Для каких типов астрофизических объектов данное уравнение не применимо? (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Фаза Луны и разность гелиоцентрических расстояний»

Одним из луноходов была получена фотография Земли (см. рис. 2). Определите, чему была равна фаза Луны в это момент? Какое количество дней спустя после последнего полнолуния была получена эта фотография? Чему равна разность гелиоцентрических расстояний Луны и Земли в момент получения фото? (6 баллов).



Рис. 2: фотография Земли, полученная с поверхности Луны.

Задача № 8. «Проект получения термоядерной энергии на орбите»

Юными исследователями предложен проект будущего по освоению энергии термоядерного синтеза для мирных нужд человека, который подразумевает установку параболического зеркала на орбите Земли. В фокусе зеркала должна располагаться черная сферическая капсула с водородом радиуса $r = 0.90 f \rho_{\odot}$, где f – фокусное расстояние зеркала, $\rho_{\odot}$ – угловой радиус Солнца. Определите, является ли реалистичным данный проект? Для этого следует оценить относительное отверстие зеркала и учесть, что температура поджига водорода должна быть не менее $T_{\min} = 10^7$ К. (7 баллов).

Задача № 9. «Минимальная дистанция до объекта, изображение которого является четким»

У начинающего астрофотографа-любителя есть зеркальный цифровой фотоаппарат, матрица которого содержит N мегапикселей (Мп), ее кроп-фактор равен k , а объектив с фокусным расстоянием f и относительным отверстием χ . Последний сфокусирован на бесконечность (для съемки звездного неба). Изображение на матрице следует считать резким, если вместо идеального изображения в виде точки, на матрице получается изображение в форме пятна, диаметр которого не превосходит $n = 4$ пикселей. Если объектив находится на фокусном расстоянии от матрицы, то резкими считаются не только бесконечно удаленные предметы, но и все предметы, находящиеся дальше некоторого минимального расстояния $L_{\min}$. Оцените величину расстояния $L_{\min}$. Численный расчет провести для фотоаппарата Canon 600D, с

$N = 18$ Мп, кроп-фактором $k = 1.6$ в связке с объективом Canon ($f = 50$ мм, $\chi = 1 : 1.8$). При решении задачи следует обязательно сделать рисунок, поясняющий решение. (8 баллов).

Задача № 10. «Третий обобщенный закон Кеплера для двух пар тел»

С использованием законов классической механики докажите, что для двух пар гравитирующих тел с массами $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ и $(\mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4)$, движущихся вокруг их центров масс, по эллиптическим орбитам, с периодами T_1 и T_2 , и большими полуосями a_1 и a_2 орбит относительного движения соответственно, справедлив третий обобщенный закон Кеплера в виде:

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)T_1^2}{(\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4)T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2)$$

Предположим, что второй парой тел является система «Солнце-Земля» с периодом $T_{\oplus} = 1$ год, и большой полуосью относительного движения $a_{\oplus} = 1$ а.е., а первой парой тел является двойная звезда. Полагая, что массы звезд выражаются в массах Солнца, период обращения в годах, а большая полуось a_1 – в а.е., докажите, что закон (2) можно записать в виде:

$$\tilde{\mathfrak{M}}_1 + \tilde{\mathfrak{M}}_2 = \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{T}^2}, \quad (3)$$

здесь знаком « $\sim$ » отмечены безразмерные величины, соответствующие размерным, в указанных выше единицах. (8 баллов).

Задача № 11. «Движение строго "за Солнцем"»

Житель Самарской области отправился в необычное путешествие: в день летнего солнцестояния (21 июня) он прибыл на северный тропик и стал следовать строго за Солнцем на винтокрылой машине так, чтобы каждый следующий полдень Солнце наблюдать в зените. Определите

1. Среднюю скорость движения путешественника относительно поверхности Земли. (2 балла).
2. Расстояние, которое он преодолел от дня летнего до дня зимнего солнцестояния. (1 балл).
3. Максимальные скорости изменения его географических координат и дни, в которые достигались указанные значения. (4 балл).
4. Какие расстояния путешественник преодолел вдоль а) меридиана, б) экватора? (2 балла).

Задача № 12. «Связь светимости и яркости для ламбертовского излучателя»

В фотометрии небесных тел, для описания протяженного источника света, часто используют понятие **фотометрической светимости**¹ (M). Под ней понимается световой поток, отбрасываемой единицей поверхности наружу по всем направлениям (в пределах значений θ от 0 до $\pi/2$, где θ – угол, образуемый данным направлением с внешней нормалью к поверхности):

$$M = \frac{d\Phi_{\ell}^{\text{ext}}}{dS}, \quad (4)$$

здесь $d\Phi_{\ell}^{\text{ext}}$ – световой поток, испускаемый наружу по всем направлениям элементом поверхности dS источника. Если светимость характеризует излучение света данным элементом поверхности по всем направлениям, то для характеристики излучения света в заданном направлении служит **яркость** L . Направление всегда можно задать полярным углом θ (отсчитываемым от внешней нормали $\vec{n}$ к излучающей площадке ΔS) и азимутальным углом φ . **Яркость** определяется

как отношение потока света, отброшенного элементарной площадкой ΔS в данном направлении, в телесный угол $d\Omega$, к данному углу и проекции площадки ΔS на плоскость, перпендикулярную к выбранному направлению (см. рис. 3):

$$L = \frac{d\Phi_{\ell}^{\text{extr}}}{d\Omega \Delta S \cos \theta}. \quad (5)$$

В общем случае яркость различна для разных направлений, т.е. $L = L(\theta, \varphi)$.

Одной из самых популярных моделей источника излучения является модель **ламбертовского излучателя** – это излучатель, у которого яркость постоянна и не зависит от направления. Докажите, что для ламбертовского источника справедливо равенство вида:

$$M = \pi L. \quad (6)$$

(10 баллов).

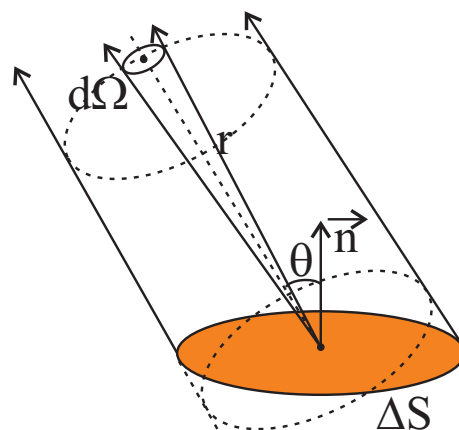


Рис. 3: к определению яркости.

¹Не путать с астрофизической светимостью!

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Современный планетарий с ламбертовским куполом»

В одном из современных планетариев звездный зал имеет равномерно светящийся купол, в форме полусферы, опирающейся на горизонтальную поверхность. Определите освещенность в центре этой поверхности, если яркость купола равна L и не зависит от направления. (11 баллов).

Задача № 14. «Строгое математическое обоснование второго закона Кеплера для двойной системы»

С использованием второго закона Ньютона, закона всемирного тяготения, докажите строго математически выполнение второго закона Кеплера для каждого из компонентов системы двух гравитирующих тел с массами $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно. Как соотносятся секторные скорости данных тел? (12 баллов).

Задача № 15. «Площадь весеннего треугольника»

Докажите, что площадь части сферической поверхности радиуса R , ограниченная сферическим треугольником, представляется в виде:

$$S_{\Delta} = (\angle A + \angle B + \angle C - \pi)R^2, \quad (7)$$

здесь $\angle A, \angle B, \angle C$ – углы при вершинах сферического треугольника. С использованием результата (91) вычислите угловую площадь (телесный угол) весеннего треугольника, образованного Арктуром ($14^{\text{h}}15^{\text{m}}40^{\text{s}}, +19^{\circ}10'57''$), Спикой ($13^{\text{h}}25^{\text{m}}12^{\text{s}}, -11^{\circ}09'41''$) и Денебой ($11^{\text{h}}49^{\text{m}}04^{\text{s}}, +14^{\circ}34'19''$). (13 баллов).

Задача № 16. «Оптическая поверхность без сферической аберрации»

Параллельный пучок света падает из вакуума на поверхность, которая ограничивает область с показателем преломления n (см. рис. 4). Найдите уравнение профиля этой поверхности $y(x)$, при которой пучок будет сфокусирован в точке F на расстоянии f от вершины O . Пучок какого максимального радиуса (r_{max}) сечения может быть сфокусирован? (13 баллов).

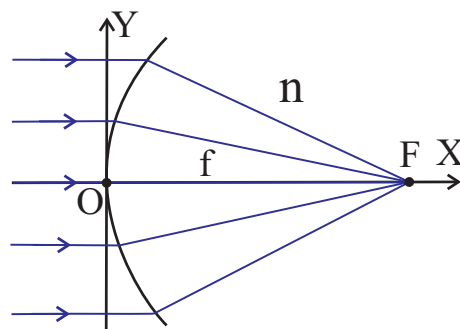


Рис. 4: к определению профиля поверхности и хода световых лучей.

Задача № 17. «Задача Кеплера для μ -точки в гравитационном поле неподвижного силового центра»

В задаче № 18, тура № 1, SamRAS-2019 было строго доказано, что описание движения двух точечных гравитирующих тел (или шаров со сферически

симметричным распределением вещества) с массами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ можно свести к описанию движения одной фиктивной μ -точки с приведенной массой $\mu = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 / (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)$ относительно неподвижной фиктивной материальной точки с массой $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$. С использованием второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения

1. Запишите уравнение движения μ -точки в поле неподвижной материальной точки с массой $\mathfrak{M}$ в векторной форме. (1 балл).
2. Используйте полярную систему координат. Запишите полученное уравнение в проекциях на орты $(\vec{n}_r, \vec{n}_\varphi)$ полярной системы координат. (2 балла).
3. Докажите, что уравнение в проекциях на орт $\vec{n}_\varphi$ можно преобразовать к виду:

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad (8)$$

здесь (r, φ) – полярные радиус-вектор и угол соответственно. (1 балл).

4. Докажите, что данную константу можно представить в виде:

$$\text{const} = \frac{L}{\mu}, \quad (9)$$

здесь L – момент количества движения μ -точки. (2 балла).

5. Преобразуйте уравнение движения в проекциях на орт $\vec{n}_r$ к уравнению гармонических колебаний для траектории μ -точки, посредством замены вида $r = 1/\rho$. (3 балла).
6. Докажите, что его решение можно представить в следующем виде:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (10)$$

здесь p – фокальный параметр, ε – эксцентриситет орбиты. (2 балла).

7. Получите выражение для эксцентриситета орбиты μ -точки в форме:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E_0 L^2}{\mu (G \mu \mathfrak{M})^2}} \quad (11)$$

и покажите строго математически, что у μ -точки возможны три семейства траекторий, одним из которых является семейство эллипсов. (2 балла).

8. Запишите законы движения μ -точки в форме обратных зависимостей $t = t(r)$ и $t = t(\varphi)$, в интегральной форме. (1 балл).

Задача № 18. «Эволюция орбит планет земной группы и астероидов главного пояса»

Возраст, $\times 10^9$ лет	4.58 (на- стоящее время)	12.17 (крас- ный гигант)	12.30 (вто- ричное расширение)	12.38 (белый карлик)
$\mathfrak{M}_{\odot}/\mathfrak{M}_{\odot}^{(0)}$	1.000	0.668	0.546	0.541
$\beta_{\odot}$, %	00.0	33.2	45.4	45.95
$\mathfrak{R}_{\odot}/\mathfrak{R}_{\odot}^{(0)}$ (a.e.)	1.000 ($4.65 \cdot 10^{-3}$)	256 (1.19)	149 (0.69)	≤ 0.1 ($4.65 \cdot 10^{-4}$)
Тело	Радиус орбиты, а.е.			
Меркурий	0.3871			
Венера	0.7233			
Земля	1.0000			
Марс	1.5237			
Паллада	2.773			
Юнона	2.672			
Веста	2.361			
Астрея	2.573			
Геба	2.426			
Гигия	3.139			

Примечание: здесь и далее $\beta_{\odot}$ – относительное изменение массы Солнца, определяемое выражением

$$\text{вида } \beta_{\odot} = \frac{(\mathfrak{M}_{\odot}^{(0)} - \mathfrak{M}_{\odot})}{\mathfrak{M}_{\odot}^{(0)}} \cdot 100\%.$$

Таблица 1: параметры Солнца, планет земной группы и некоторых астероидов главного пояса (в приближении круговых орбит).

Как известно, масса Солнца непрерывно уменьшается, в результате термоядерного синтеза и излучения образовавшейся энергии. Уменьшение массы приводит к уменьшению силы притяжения, что неминуемо должно сказываться на форме и размерах орбит тел, движущихся вокруг центрального светила.

1. Определите изменение (Δa) большой полуоси орбиты Земли за 1 год. (2 балла).
2. Получите закон изменения радиуса круговой орбиты небесного тела, как функцию а) массы Солнца, б) ее относительного изменения. Вычислите значения радиусов круговых орбит для некоторых тел Солнечной системы, для трех будущих эпох в эволюции Солнца. Заполните таблицу 1, сделайте выводы. (5 баллов).
3. С использованием результатов предыдущей задачи, получите законы изменения большой полуоси и эксцентриситета эллиптической орбиты небесного тела, как функции а) массы Солнца, б) ее относительного изменения. Вычислите значения указанных элементов орбит для некоторых тел Солнечной системы, для трех будущих эпох в эволюции Солнца. Заполните таблицу 2, сделайте выводы. Как сильно поменяется образ внутренней части Солнечной системы за последующие 7.8 млрд.

лет? (8 баллов).

Возраст, $\times 10^9$ лет	4.58 (на- стоящее время)	12.17 (крас- ный гигант)	12.30 (вто- ричное расширение)	12.38 (белый карлик)
$M_{\odot}/M_{\odot}^{(0)}$	1.000	0.668	0.546	0.541
$\beta_{\odot}$, %	00.0	33.2	45.4	45.95
$\mathcal{R}_{\odot}/\mathcal{R}_{\odot}^{(0)}$ (a.e.)	1.000 ($4.65 \cdot 10^{-3}$)	256 (1.19)	149 (0.69)	≤ 0.1 ($4.65 \cdot 10^{-4}$)
Тело	Большая полуось орбиты, а.е.			
Меркурий	0.3871			
Венера	0.7233			
Земля	1.0000			
Марс	1.5237			
Паллада	2.773			
Юнона	2.672			
Веста	2.361			
Астрея	2.573			
Геба	2.426			
Гигия	3.139			
	эксцентриситет орбиты			
Меркурий	0.2056			
Венера	0.0068			
Земля	0.0167			
Марс	0.0933			
Паллада	0.231			
Юнона	0.256			
Веста	0.089			
Астрея	0.193			
Геба	0.202			
Гигия	0.117			

Таблица 2: параметры Солнца, планет земной группы и некоторых астероидов главного пояса (в случае эллиптических орбит).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Луна, звезды и созвездия»

Решение.

1. Луна находилась в созвездии Тельца.
2. Ярчайшей звездой этого созвездия является Альдебаран.
3. Ярчайшими звездами на фото являются: Сириус (α Большого пса), Бетельгейзе (α Ориона), Ригель (β Ориона), Альдебаран (α Тельца), Беллатрикс (γ Ориона).
4. Ярчайшим скоплением на фото является скопление Плеяды (М45, созвездие Тельца).
5. Ярчайшей эмиссионной туманностью является Большая туманность Ориона (М42, созвездие Ориона). ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 2. «Звезда с неопределенным азимутом»

Решение. Если азимут становится неопределенным, следовательно, данная звезда должна в этот момент прибывать в зените, ее высота равна 90° . Воспользуемся далее формулой для звезды в верхней кульминации:

$$h_* = 90^\circ - \varphi + \delta_* = 90^\circ, \quad \delta_* = \varphi = 53^\circ 12' \quad (12)$$

т.е. звезда кульминирует в зените и ее склонение равно широте места наблюдения. Звезда является незаходящей в городе Самаре, если ее высота в нижней кульминации равна

$$h_* = \varphi + \delta_0 - 90^\circ = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = 90^\circ - \varphi = 36^\circ 48'. \quad (13)$$

Поскольку $\delta_* > \delta$, то данную звезду следует отнести к незаходящим.

Ответ: $\delta_* = \varphi = 53^\circ 12'$; в зените; незаходящая. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Самый быстрый во вращении галилеев спутник»

Решение. Как известно, все галилеевы спутники имеют вращение вокруг оси, синхронизированное с орбитальным вращением вокруг Юпитера (т.е. периоды этих вращательных движений одинаковы, $P_s = T_s$). Следовательно, наименьшим периодом вращения обладает Ио, ближайший к Юпитеру галилеев спутник, поскольку, согласно третьему закону Кеплера,

$$T_s \sim a_s^{3/2}$$

и чем меньше большая полуось (a_s) орбиты, тем меньше период обращения (T_s) спутника.

Ответ: Ио. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Луна в первой и последней четверти»Дано:

$$\varphi = 53^\circ 12',$$

$$i_\zeta = 5^\circ 09'.$$

Найти:

время года – ?

 $h_{\min}, h_{\max}$ – ?

на и заключена в интервале

Решение:

Высота Луны над горизонтом определяется, главным образом, положением эклиптики по отношению к горизонту.

Наибольшим положительным склонением обладает точка летнего солнцестояния ($\delta_S = \varepsilon = +23^\circ 26'$). Если Луна будет пребывать в ее окрестности, то ее высота будет максимальной и заключена в интервале

$$90^\circ - \varphi + \varepsilon - i_\zeta \leq h_{\max} \leq 90^\circ - \varphi + \varepsilon + i_\zeta,$$

$$\text{или } 55^\circ 05' \leq h_{\max} \leq 65^\circ 23'. \quad (14)$$

Если Луна при этом, наблюдается в первой четверти, то Солнце отстоящее от Луны на 90° должно быть в окрестности точки весеннего равноденствия (т.е. около 20 марта), т.е. *весной*. Если Луна наблюдается в последней четверти, то Солнце в этот момент должно быть в окрестности точки осеннего равноденствия (23 сентября), т.е. *осенью*.

Высота Луны будет минимальна, если последняя находится в окрестности точки зимнего солнцестояния ($\delta_W = -\varepsilon = -23^\circ 26'$). При этом высота Луны принадлежит интервалу:

$$90^\circ - \varphi - \varepsilon - i_\zeta \leq h_{\min} \leq 90^\circ - \varphi - \varepsilon + i_\zeta,$$

$$\text{или } 8^\circ 13' \leq h_{\min} \leq 18^\circ 31'. \quad (15)$$

Если Луна, при этом, наблюдается в первой четверти, то Солнце должно пребывать в этот момент окрестности точки осеннего равноденствия (23 сентября), т.е. *осенью*. Если Луна наблюдается в последней четверти, то Солнце должно находиться в окрестности точки весеннего равноденствия (20 марта), т.е. *весной*.

Ответ: к задаче представляется интервалами (14) и (15); высота Луны максимальна в первой четверти весной; в последней четверти – осенью; высота светила минимальна в первой четверти осенью, в последней четверти – весной. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Когда метеороидов падает больше?»

Решение. Одной из фракций *межпланетной среды Солнечной системы* являются **метеороиды** – это малые тела, являющиеся продуктами деструкции комет и астероидов. Пусть в окрестности Земли концентрация этих тел равна n_m , их средняя гелиоцентрическая скорость – $\bar{v}_m$, а всевозможные направления их скоростей равновероятны. Метеороиды на Землю падают со скоростью v_{rel} :

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_m - \vec{v}_\oplus \quad (16)$$

где $\vec{v}_{\oplus}$ – вектор гелиоцентрической скорости Земли.

Поток метеороидов, падающих на территорию Самарской области можно записать так:

$$\Phi = (\vec{j} \vec{k}) S_S = j_n S_S = n_m (v_{\text{rel}})_k S_S, \quad (17)$$

здесь $\vec{k}$ – единичная нормаль к поверхности Земли в данном месте, $(v_{\text{rel}})_k$ – проекция вектора $\vec{v}_{\text{rel}}$ на нормаль $\vec{k}$; S_S – площадь Самарской области. Очевидно, полный поток максимален, когда

1) v_{rel} достигает максимального значения, что реализуется в случае, когда $\vec{v}_m$ и $\vec{v}_{\oplus}$ противоположно направлены, т.е. в случае метеороидов, движущихся навстречу Земле.

2) проекция $(v_{\text{rel}})_k$

максимальна. Это достигается в случае, когда Самарская область будет ориентирована по направлению движения Земли, т.е. утром (см. рис. 5.а). В этом случае угол (α) между векторами $\vec{v}_{\text{rel}}$ и $\vec{k}$ будет минимальным, а его косинус будет принимать максимальное значение.

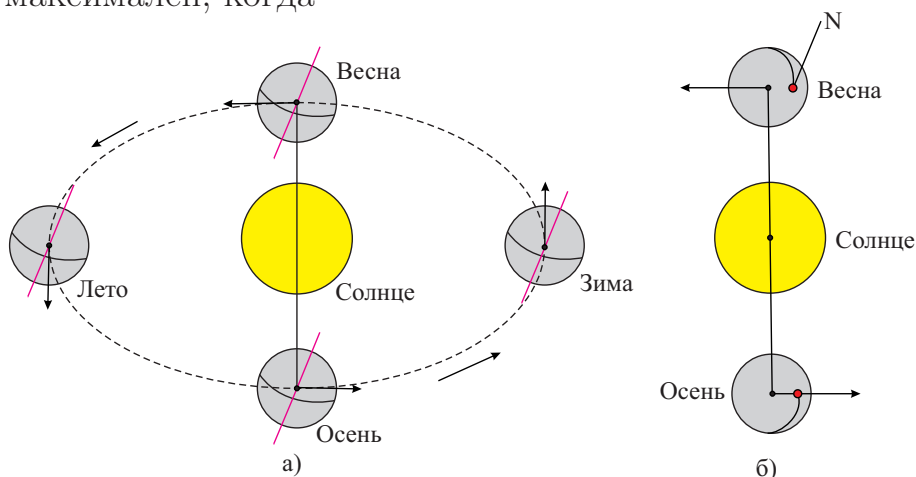
Заметим, что минимальный угол $\alpha_{\min}$ между $\vec{k}$ и $\vec{v}_{\text{rel}}$ в течение года не постоянен: он будет минимален когда Земля ориентирована северным географическим полюсом на направление движения (см. рис. 5.б), что достигается осенью, вблизи осеннего равноденствия.

Ответ: утром; осенью, в окрестности дня осеннего равноденствия. (\$_{\max} = 4\$ балла).

Задача № 6. «Уравнение гидростатического равновесия и его вывод»

Решение. Рассмотрим массивное тело (звезда или планета), имеющее форму, близкую к форме шара, со сферически симметричным распределением вещества. В данном теле рассмотрим тонкий сферический слой с внутренним радиусом r и внешним – $r + dr$ (см. рис. 6). В данном слое рассмотрим бесконечно малый элемент объемом dV .

Поскольку данное тело находится в механическом равновесии, то сумма всех внешних сил, приложенных к данному элементу равна нулю. Очевидно, на данный элемент вещества действуют три силы: 1) $d\vec{F}_{\text{at}}$ – сила притяжения, действующая со стороны части тела, имеющей форму шара радиуса r , и на-



правлена так, как показано на рис. 6; 2) $d\vec{F}_{p1}$ – сила давления, действующая со стороны ниже лежащих слоев вещества и направлена от центра масс данного тела; 3) $d\vec{F}_{p2}$ – сила давления, действующая со стороны выше лежащих слоев вещества и направлена к центру масс данного тела.

Запишем второй закон Ньютона для данного элемента:

$$d\vec{F}_{p1} + d\vec{F}_{p2} + d\vec{F}_{at} = 0.$$

В проекциях на ось OX последнее уравнение представляется в виде:

$$dF_{p1} - dF_{p2} - dF_{at} = 0. \quad (18)$$

Запишем данные силы в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} dF_{at} &= \frac{G dm M(r)}{r^2}, & dm &= \rho dV, \\ dF_{p1} &= p_1 dS, & dF_{p2} &= p_2 dS \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

здесь G – универсальная гравитационная постоянная, dm – масса данного бесконечно малого элемента, ρ – плотность его вещества, $M(r)$ – масса шара радиуса r данного небесного тела, p_1, p_2 – давления на нижнем и верхнем основании элемента, dS – величина площадки его основания.

Тогда уравнение (18) можно переписать так

$$(p_2 - p_1) dS = -\frac{G dm M(r)}{r^2}, \Rightarrow \frac{dp}{dr} = -\frac{G \rho(r) M(r)}{r^2}, \quad (20)$$

где $dp = p_2 - p_1$, $dV = dS dr$. Очевидно, что результат (20) идентичен уравнению (1), что и требовалось доказать!

Отметим, что зная зависимости $\rho = \rho(r)$, $M = M(r)$ и граничное условие для $p(r)$, можно решить полученное дифференциальное уравнение и получить явную зависимость $p = p(r)$. (\$_{\max} = 5\$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Фаза Луны и разность гелиоцентрических расстояний»

Решение. По рис. 2 легко определить фазу Земли

$$\Phi_E = \frac{d_E}{D_E}, \quad (21)$$

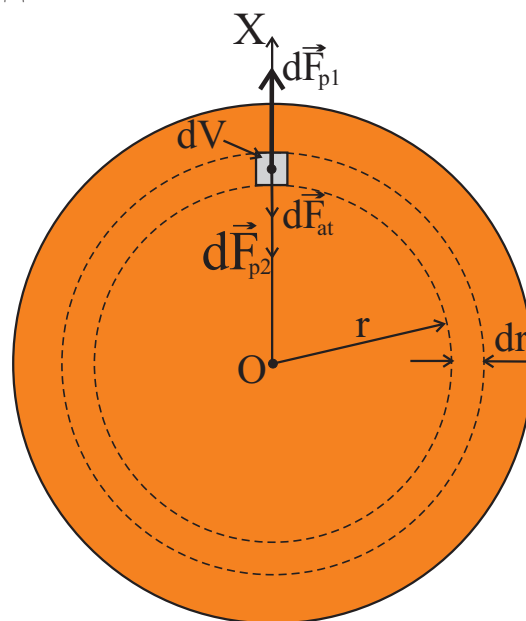


Рис. 6: к определению сил, действующих на элемент вещества небесного тела.

здесь d_E – минимальная величина освещенной части диаметра (D_E) Земли, перпендикулярного терминатору. Иначе Φ_E можно представить в виде:

$$\Phi_E = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi_E), \Rightarrow \varphi_E = \arccos(2\Phi_E - 1), \quad (22)$$

где φ_E – фазовый угол Земли для наблюдателя, находящегося на поверхности Луны. Поскольку расстояние от Земли до Солнца много больше расстояния от Земли до Луны, то можно полагать, согласно рис. 7, что фазовый угол Луны φ_M есть

$$\varphi_M = \pi - \varphi_E, \quad (23)$$

а фаза:

$$\Phi_M = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi_M) = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi_E) = 1 - \Phi_E. \quad (24)$$

Измерив с помощью линейки по рис. 2 $d_E=70$ мм, $D_E=91$ мм получаем, согласно (21), $\Phi_E=0.77$. Тогда, согласно (24), имеем $\Phi_M=0.23$, что соответствует $\varphi_M = 122.6^\circ$.

Именно на угол φ_M отстояла Луна от направления на полнолуние. Полагая, что орбита Луны круговая, а ее синодический месяц равен $S_\zeta = 29.53$ сут, то можно найти искомое время после последнего полнолуния:

$$t = \frac{\varphi_M}{360^\circ} S_\zeta = 10.1 \text{ сут.} \quad (25)$$

Из рисунка видно, что разность гелиоцентрических расстояний Земли и Луны равна

$$\Delta = a_\zeta \sin(90^\circ - \varphi_E) = a_\zeta (2\Phi_E - 1) = 2.08 \cdot 10^5 \text{ км.} \quad (26)$$

Ответ: к задаче представлен формулами (24), (25), (26); $\Phi_M=0.23$. (6 баллов).

Задача № 8. «Проект получения термоядерной энергии на орбите»

Дано:

$$r = 0.9 f \rho_\odot, \\ T_{\min} = 10^7 \text{ К.}$$

Найти:

$$R = \frac{D}{f} - ?$$

Решение:

Поскольку капсула черная, то она поглощает все падающее на нее излучение. Полагая, что данное зеркало является идеальным, то поток, собираемый им и направляемый на капсулу будет равен

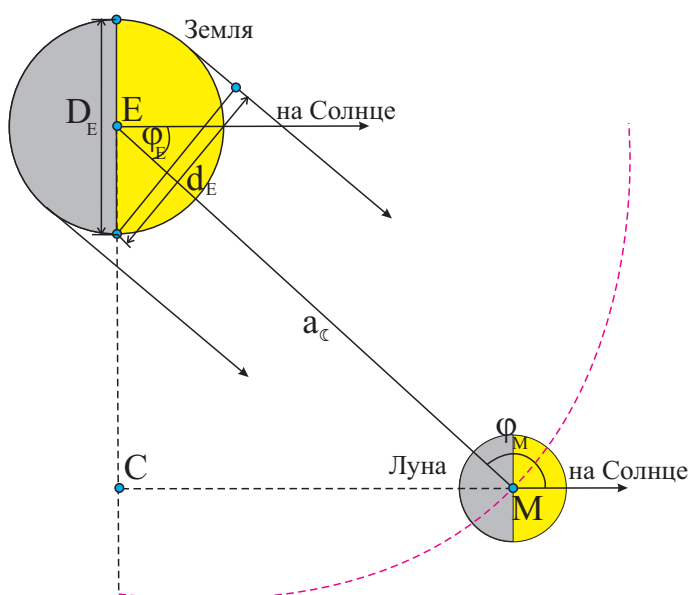


Рис. 7: к определению искомой фазы Луны и разности гелиоцентрических расстояний.

$$\Phi_0 = E_\odot \frac{\pi}{4} D^2. \quad (27)$$

В фокальной плоскости зеркала должно сформироваться светлое пятно радиусом $r_S = f \rho_\odot$. Следовательно, капсула принимает поток

$$\Phi_{\text{abs}} = \Phi_0 \left(\frac{r}{r_S} \right)^2 = 0.81 E_\odot \frac{\pi}{4} D^2. \quad (28)$$

Запишем далее уравнение энергетического баланса для капсулы:

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = \Phi_{\text{abs}}, \text{ или } 4\pi 0.81 \rho_\odot^2 f^2 \sigma T^4 = 0.81 E_\odot \frac{\pi}{4} D^2, \Rightarrow$$

$$\frac{D}{f} = 4\rho_\odot T^2 \sqrt{\frac{\sigma}{E_\odot}} = 1.20 \cdot 10^7, \quad (29)$$

здесь $\rho_\odot = 16' = 4.65 \cdot 10^{-3}$ рад – угловой радиус Солнца $T = T_{\text{min}} = 10^7$ К; $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(К⁴ м²) – постоянная Стефана-Больцмана, $E_\odot = 1361$ Вт/м² – солнечная постоянная на земной орбите. Однако, для изготавливаемых сегодня параболических зеркал отношение D/f достигает значений порядка единицы. Следовательно, с полученным значением D/f создать зеркало невозможно, поэтому данный проект является нереалистичным.

Ответ: нет, проект нереалистичный. (7 баллов).

Задача № 9. «Минимальная дистанция до объекта, изображение которого является четким»

Дано:

$N, k, f, \chi,$
 $n = 4$ п,
 $N = 18$ Мп,
 $k = 1.6,$
 $f = 50$ мм,
 $\chi = 1 : 1.8.$

Найти:

$L_{\text{min}} - ?$

Решение:

Объектив фотоаппарата можно моделировать тонкой собирающей линзой, в заднем фокусе которой расположена матрица (см. рис. 8). Точечный источник света, расположенный на бесконечности, очевидно, будет иметь точечное изображение, расположенное в задней фокальной плоскости объектива. Однако, если источник расположен на конечном расстоянии L_{min} от объектива, то его изображение будет расположено за фокальной плоскостью. На матрице

источник будет изображаться пятном $B_1 B_2$, диаметр которого не должен превышать четырех пикселей (см. рис. 8), чтобы последнее можно было по-прежнему считать резким изображением. Очевидно, диаметр пятна $B_1 B_2 = d$ можно определить из подобия $\triangle L A' O$ и $\triangle B_1 A' F_2$

$$\frac{d}{2(b-f)} = \frac{D}{2b}, \Rightarrow b = \frac{Df}{(D-d)}. \quad (30)$$

Далее воспользуемся формулой тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b}, \Rightarrow a = \frac{fb}{b-f}. \quad (31)$$

Из (30) и (31) следует, что

$$a = \frac{D f^2}{f d} = \frac{\chi f^2}{d}. \quad (32)$$

При $a = L_{\min}$, $d = 4\ell$, где ℓ – характерный размер пикселя матрицы камеры.

$$L_{\min} = \frac{\chi f^2}{4\ell}. \quad (33)$$

Оценим размер стороны пикселя. Если матрица фотоаппарата имеет кроп-фактор (k), отличный от единицы, то ее стороны равны

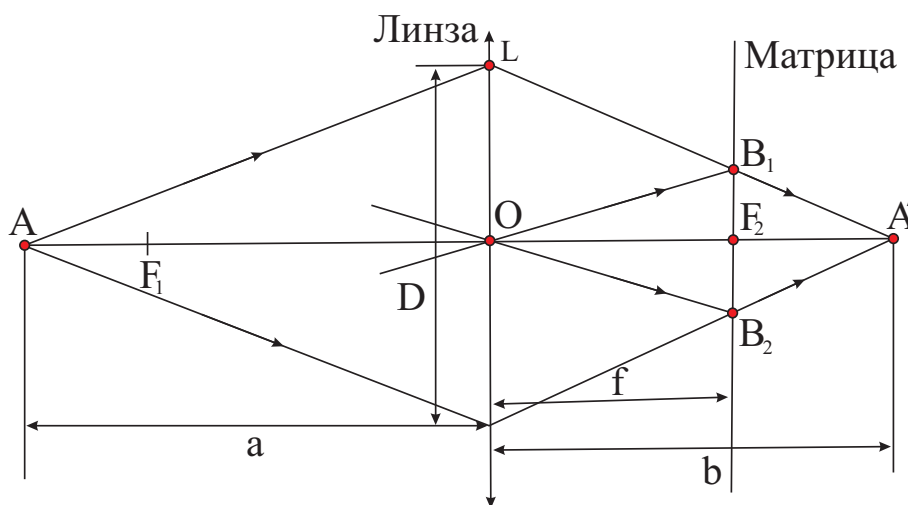


Рис. 8: к определению хода световых лучей и формированию изображения на матрице.

$$x = \frac{x_0}{k}, \quad y = \frac{y_0}{k}, \quad \text{где } x_0 = 36 \text{ мм}, \quad y_0 = 24 \text{ мм}, \quad (34)$$

где x_0, y_0 – размеры полнокадровой матрицы, а сторона пикселя есть

$$\ell = \sqrt{\frac{S}{N}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{S_0}{N}}, \quad \text{где } S_0 = x_0 \cdot y_0. \quad (35)$$

Из (33) и (35) следует итоговое выражение для $L_{\min}$:

$$L_{\min} = \frac{\chi f^2 k}{4} \sqrt{\frac{N}{x_0 y_0}}. \quad (36)$$

В случае Canon 600D + Canon (50 мм, 1 : 1.8) имеем $L_{\min}=80$ м.

Ответ: к задаче представляется формулой (36); $L_{\min}=80$ м. (8 баллов).

Задача № 10. «Третий обобщенный закон Кеплера для двух тел»

Решение. Рассмотрим систему двух гравитирующих тел с массами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ соответственно (причем $\mathfrak{M}_1 > \mathfrak{M}_2$). Запишем для каждого второй закон Ньютона в векторной форме:

$$\mathfrak{M}_1 \vec{W}_1 = + \frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad \mathfrak{M}_2 \vec{W}_2 = - \frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (37)$$

здесь $\vec{W}_1, \vec{W}_2$ – ускорения данных тел, $\vec{r}_{12}$ – вектор, соединяющий данные тела и направленный от первого ко второму (см. рис. 9). Поделим первое уравнение системы (37) на $\mathfrak{M}_1$, а второе – на $\mathfrak{M}_2$ и вычтем одно из другого:

$$\vec{W}_2 - \vec{W}_1 = -\frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (38)$$

Заметим далее, что ускорения тел и их разность можно представить в виде:

$$\vec{W}_1 = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}, \quad \vec{W}_2 = \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}, \quad \vec{W}_2 - \vec{W}_1 = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2}. \quad (39)$$

Согласно рис. 9, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12}$, тогда уравнение (38) можно записать так:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} = -\frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (40)$$

где $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор тела 2 относительно тела 1, причем уравнение (40) идентично уравнению движения материальной точки в гравитационном поле неподвижного силового центра масс ($\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$). Если рассмотреть частный случай ($\mathfrak{M}_1 \gg \mathfrak{M}_2$), то уравнение (40) можно привести к виду:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} = -\frac{G \mathfrak{M}_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (41)$$

здесь учтено, что

$$\lim_{\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1 \rightarrow 0} (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_1. \quad (42)$$

Уравнение (41) описывает невозмущенное (кеплевово) движение любой классической планеты в гравитационном поле Солнца. Рассмотрим движение классической планеты в гравитационном поле Солнца в рамках энергетического подхода. Согласно второму закону Кеплера (являющегося лишь следствием закона сохранения момента импульса планеты) секторная скорость планеты постоянная величина, которую можно записать в случае афелия и перигелия планеты так

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r_P \frac{v_P dt}{dt} = \frac{1}{2} r_A \frac{v_A dt}{dt}, \Rightarrow r_P v_P = r_A v_A,$$

или $\frac{1}{2} a(1 - \varepsilon) v_P = \frac{1}{2} a(1 + \varepsilon) v_A, \Rightarrow v_A = \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) v_P. \quad (43)$

Далее воспользуемся законом сохранения полной механической энергии планеты для тех же точек орбиты

$$\frac{\mathfrak{M}_p v_P^2}{2} - \frac{G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot}{r_P} = \frac{\mathfrak{M}_p v_A^2}{2} - \frac{G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot}{r_A}, \Rightarrow$$

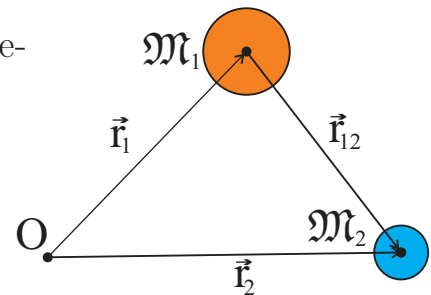


Рис. 9: к определению системы двух массивных гравитирующих тел.

$$v_P^2 - v_A^2 = 2 G \mathfrak{M}_\odot \left(\frac{1}{a(1-\varepsilon)} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)} \right), \Rightarrow \quad (44)$$

$$v_P^2 \left(1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^2 \right) = \frac{G \mathfrak{M}_\odot}{a(1-\varepsilon^2)} 4\varepsilon, \Rightarrow v_P^2 = \frac{G \mathfrak{M}_\odot (1+\varepsilon)^2}{a(1-\varepsilon^2)}, \Rightarrow$$

$$v_P = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\odot}{a} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)}, \quad v_A = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\odot}{a} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)}. \quad (45)$$

Вернемся ко второму закону Кеплера

$$\sigma = \frac{1}{2} a(1-\varepsilon) \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\odot}{a} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{G \mathfrak{M}_\odot a(1-\varepsilon^2)}. \quad (46)$$

Иначе σ можно записать так

$$\sigma = \frac{S_{el}}{T} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}, \quad (47)$$

здесь учтено, что площадь эллипса орбиты планеты $S_{el} = \pi a b$, где $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ – малая полуось эллипса; T – сидерический период обращения планеты.

Из (46) и (47) следует, что

$$\frac{1}{2} \sqrt{G \mathfrak{M}_\odot a(1-\varepsilon^2)} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}, \Rightarrow G \mathfrak{M}_\odot = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3. \quad (48)$$

Мы рассмотрели частный случай, когда $\mathfrak{M}_p \ll \mathfrak{M}_\odot$ (что аналогично $\mathfrak{M}_2 \ll \mathfrak{M}_1$). Выше было показано, что переход к частному случаю получается в пределе (42). Если мы стремимся перейти от частного случая к общему, то необходимо произвести замену $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{M}_\odot)$ на $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ в (48). В итоге получаем

$$G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3, \quad (49)$$

где a – большая полуось орбиты движения тела 2 относительно тела 1. Уравнение (49) – третий обобщенный закон Кеплера для пары гравитирующих тел. Если такое же уравнение записать для другой пары тел с массами $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$ в виде:

$$(\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4) T^2 = \frac{4\pi^2}{G} a_2^3 \quad (50)$$

и разделить (49) на (50), проиндексировав цифрой «1» параметры первой пары, то получим

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) T_1^2}{(\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4) T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (51)$$

что идентично (2).

Далее предположим что вторая пара тел есть система «Солнце-Земля», тогда $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_\odot$, $\mathfrak{M}_4 = \mathfrak{M}_\oplus$, $T_2 = T_\oplus = 1$ год, $a_2 = a_\oplus = 1$ а.е. Следовательно (51) можно переписать в виде:

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) T_1^2}{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus) T_\oplus^2} = \frac{a_1^3}{a_\oplus^3}. \quad (52)$$

Далее учтем, что масса Земли много меньше массы Солнца, следовательно слагаемым $\mathfrak{M}_\oplus$ в знаменателе (52) можно пренебречь. Выразим массы компонентов первой пары гравитирующих тел через массу Солнца.

$$\mathfrak{M}_1 = \tilde{\mathfrak{M}}_1 \cdot \mathfrak{M}_\odot, \quad \mathfrak{M}_2 = \tilde{\mathfrak{M}}_2 \cdot \mathfrak{M}_\odot, \quad (53)$$

а период и большую полуось в терминах земных аналогов:

$$T_1 = \tilde{T} \cdot T_\oplus, \quad a_1 = \tilde{a} \cdot a_\oplus. \quad (54)$$

Следовательно (52) можно переписать так

$$\frac{(\tilde{\mathfrak{M}}_1 + \tilde{\mathfrak{M}}_2) \mathfrak{M}_\odot T_\oplus^2 \cdot \tilde{T}^2}{\mathfrak{M}_\odot \cdot T_\oplus^2} = \frac{(\tilde{a} \cdot a_\oplus)^3}{a_\oplus^3}, \Rightarrow (\tilde{\mathfrak{M}}_1 + \tilde{\mathfrak{M}}_2) = \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{T}^2},$$

что и требовалось доказать. (8 баллов).

Задача № 11. «Движение строго "за Солнцем"»

Решение. 1. Если путешественник каждый день наблюдал Солнце в зените, то он двигался, очевидно, по большому кругу, являющемуся отображением эклиптики на поверхности Земли. Среднегодовое собственное движение Солнца по небосводу есть

$$\mu_\odot = \frac{360^\circ}{T_\oplus} = 0.986^\circ/\text{сут}, \quad (55)$$

где $T_\oplus = 365.2564$ сут – звездный год Земли. Таким же должно быть и собственное движение наблюдателя относительно центра Земли. Следовательно, средняя скорость движения путешественника есть

$$\bar{v}_\Pi = \mu_\odot \bar{\mathfrak{R}}_\oplus = 1.27 \text{ м/с} = 110 \text{ км/сут}, \quad (56)$$

здесь $\bar{\mathfrak{R}}_\oplus = 6371$ км – средний по объему радиус Земли.

2. Расстояние, которое он пролетел от дня летнего до дня зимнего солнцестояния

$$s = \bar{v}_\Pi \frac{T_\oplus}{2} = 20090 \text{ км}. \quad (57)$$

3. Максимальная скорость изменения долготы путешественника достигается в окрестности дней летнего и зимнего солнцестояния (здесь Солнце

движется, фактически, параллельно небесному экватору). Предположим, что Солнце за малый промежуток времени Δt проходит по эклиптике малую дугу $\Delta\gamma$, а путешественник по поверхности Земли – $\delta\ell = \Delta\gamma \bar{\mathfrak{R}}_{\oplus} = \mu_{\odot} \Delta t \bar{\mathfrak{R}}_{\oplus}$. Эта дуга должна, фактически, совпадать с дугой географической параллели на широте $\pm\varepsilon$. Последнюю можно записать иначе: $\delta\ell = r\Delta\lambda = \bar{\mathfrak{R}}_{\oplus} \cos(\pm\varepsilon)\Delta\lambda$, где $r = \bar{\mathfrak{R}}_{\oplus} \cos(\pm\varepsilon)$ – радиус данной параллели. Приравнивая данные результаты, в итоге получаем

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}\right)_{\max} = \frac{\mu_{\odot}}{\cos \varepsilon} = 1.075^{\circ}/\text{сут.} \quad (58)$$

Максимальная скорость изменения широты путешественника достигается вблизи экватора, в окрестности дней осеннего или весеннего равноденствий:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max} = \mu_{\odot} \sin \varepsilon = 0.392^{\circ}/\text{сут.} \quad (59)$$

4. Очевидно, что вдоль меридиана путешественник прошел путь

$$s_{\perp} = 2\varepsilon \bar{\mathfrak{R}}_{\oplus} = 5210 \text{ км.} \quad (60)$$

Вдоль экватора пройденное расстояние можно оценить по теории Пифагора

$$s_{\parallel} = \sqrt{s^2 - s_{\perp}^2} = 19400 \text{ км.} \quad (61)$$

Более точный расчет посредством процедуры интегрирования дает значение, близкое к (61).

Ответ: к задаче представлен формулами (56)-(61); максимальная скорость изменения широты достигается в дни осеннего и весеннего равноденствия максимальная скорость изменения долготы – в дни солнцестояний.

Задача № 12. «Связь светимости и яркости для ламбертовского излучателя»

Решение. Воспользуемся выражением (5) условия задачи и перепишем его в виде:

$$\frac{d\Phi_{\ell}^{\text{extr}}}{\Delta S} = L \cos \theta d\Omega.$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$\frac{1}{\Delta S} \int d\Phi_{\ell}^{\text{extr}} = L \int \cos \theta d\Omega, \Rightarrow \frac{\Delta\Phi_{\ell}^{\text{extr}}}{\Delta S} = L \int \cos \theta d\Omega. \quad (62)$$

Очевидно, что левая часть (62) равна светимости – M . Вычислим интеграл в правой части. Воспользуемся определением телесного угла (в случае сферической поверхности)

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} \quad (63)$$

где dS – элемент площади поверхности сферы, R – ее радиус. Согласно рис. 10

$$dS = da \cdot db. \quad (64)$$

Далее введем декартову систему координат $OXYZ$. Относительно нее определим сферическую систему координат (R, θ, φ) , посредством следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= R \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= R \cos \theta \end{aligned} \right\}. \quad (65)$$

Тогда стороны малого прямоугольника площадки dS запишутся так

$$\left. \begin{aligned} da &= r d\varphi = R \sin \theta d\varphi, \\ db &= R d\theta. \end{aligned} \right\}. \quad (66)$$

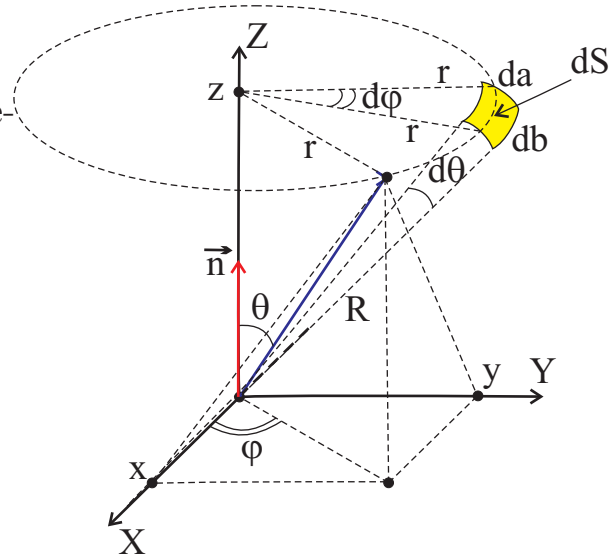


Рис. 10: к определению элементарного телесного угла $d\Omega$.

Из (64), (66) следует, что

$$dS = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta. \quad (67)$$

Из (63) и (67) получаем выражение для $d\Omega$:

$$d\Omega = \sin \theta d\varphi d\theta. \quad (68)$$

Очевидно, любая плоская площадка высвечивает излучение в полусферу, для которой границы изменения углов есть

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Следовательно, интеграл (62) можно записать двойным интегралом вида:

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta.$$

Последний интеграл можно легко свести к повторному интегралу, поскольку подынтегральная функция не зависит от угла φ :

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d(2\theta) = \pi. \quad (69)$$

Из (62) и (69) следует, что

$$M = \pi L,$$

что и требовалось доказать.

Ответ: ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Современный планетарий с ламбертовским куполом»

<u>Дано:</u> L .	<u>Решение:</u> Согласно условию задачи, яркость купола L не зависит от направления. Следовательно, любая площадка купола является ламбертовским источником излучения, для которого выполняется уравнение (6) задачи №12.
<u>Найти:</u> E – ?	

Любая малая площадка купола площадью dS высвечивает в полусфере энергию, характеризуемую светимостью M . Тогда освещенность в центре полусферы купола, создаваемой этой площадкой, можно представить так

$$dE = \frac{M dS}{2\pi R^2}, \quad (70)$$

здесь R – радиус купола. С учетом уравнения (6), последнее можно переписать в виде:

$$dE = \frac{\pi L}{2\pi R^2} dS. \quad (71)$$

Проинтегрируем последнее дифференциальное уравнение по всем таким элементарным площадкам купола:

$$\int dE = \frac{\pi L}{2\pi R^2} \int dS, \Rightarrow E = \frac{\pi L}{2\pi R^2} 2\pi R^2.$$

Окончательно имеем

$$E = \pi L. \quad (72)$$

Т.о., освещенность в центре купола однозначно определяется лишь его яркостью.

Ответ: к задаче представляется формулой (72). ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Строгое математическое обоснование второго закона Кеплера для двойной системы»

<u>Дано:</u> $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$.	<u>Решение:</u> Воспользуемся вторым законом Ньютона для каждого компонента двойной системы в виде (37) (см. задачу №10 настоящего релиза). Из (37) следует, что
<u>Доказать:</u> выполнение II-го закона Кеплера для каждой ком-ты – ?	$\vec{W}_1 = \frac{G \mathfrak{M}_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{W}_2 = -\frac{G \mathfrak{M}_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (73)$ Выберем декартову систему координат так, как показано на рис. 11. Причем начало координат совпадает с центром масс (точка О) системы.

Введем далее полярные координаты данных тел:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для 2-го тела: } x_2 = r_2 \cos \varphi, \\ y_2 = r_2 \sin \varphi, \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{для 1-го тела: } x_1 = r_1 \cos (\pi + \varphi), \\ y_1 = r_1 \sin (\pi + \varphi), \end{array} \right\}.$$

При этом единичные орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы (см. рис. 11) выражениями вида:

$$\vec{n}_r = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \quad \vec{n}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}. \quad (74)$$

Очевидно, что

$$r_{12} = r_1 + r_2 = r. \quad (75)$$

Воспользуемся также формулой для радиуса вектора центра масс системы

$$\vec{R}_c = \frac{\mathfrak{M}_1 \vec{r}_1 + \mathfrak{M}_2 \vec{r}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} = 0, \Rightarrow \quad (76)$$

$$\mathfrak{M}_1 r_1 = \mathfrak{M}_2 r_2.$$

Из (75) и (76) следует, что

$$r_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} r = \frac{\mu}{\mathfrak{M}_2} r,$$

$$r_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} r = \frac{\mu}{\mathfrak{M}_1} r,$$

где

$$\mu = \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}. \quad (77)$$

Запишем ускорение тел в проекциях на орты полярной системы:

$$\vec{W}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (r_2 \vec{n}_r) \right) = \frac{d}{dt} (\dot{r}_2 \vec{n}_r + r_2 \dot{\vec{n}}_r) = \frac{d}{dt} (\dot{r}_2 \vec{n}_r + r_2 \omega \vec{n}_\varphi) = \ddot{r}_2 \vec{n}_r +$$

$$+ \dot{r}_2 \dot{\vec{n}}_r + \dot{r}_2 \omega \vec{n}_\varphi + r_2 \dot{\omega} \vec{n}_\varphi + r_2 \omega \dot{\vec{n}}_\varphi = \vec{n}_r (\ddot{r}_2 - r_2 \omega^2) + (2\dot{r}_2 \omega + r_2 \dot{\omega}) \vec{n}_\varphi. \quad (78)$$

В последнем выражении точками отмечены производные от величин по времени и учтено, что

$$\dot{\vec{n}}_r = \frac{d}{dt} (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) = (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \vec{n}_\varphi, \quad (79)$$

$$\dot{\vec{n}}_\varphi = \frac{d}{dt} (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) = (-\cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j}) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \vec{n}_r. \quad (80)$$

Аналогично можно записать ускорение $\vec{W}_1$:

$$\vec{W}_1 = -\vec{n}_r (\ddot{r}_1 - r_1 \omega^2) - \vec{n}_\varphi (2\dot{r}_1 \omega + r_1 \dot{\omega}). \quad (81)$$

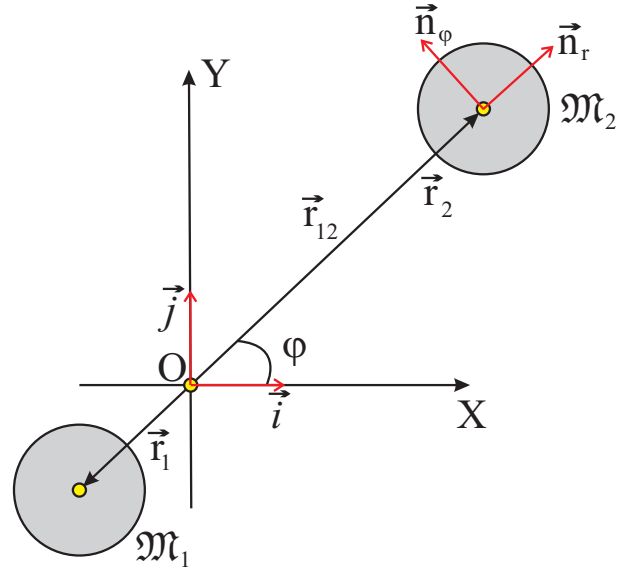


Рис. 11: к определению декартовой и полярной систем координат.

Очевидно, что уравнения (73) в проекциях на n_φ , с учетом (78), (81), запишутся так

$$2\dot{r}_1\omega + r_1\dot{\omega} = 0, \quad 2\dot{r}_2\omega + r_2\dot{\omega} = 0. \quad (82)$$

Умножим первое уравнение на r_1 , а второе – на r_2 и свернем полученные уравнения в полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r_1^2 \omega \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r_2^2 \omega \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} r_1^2 \omega = \text{const}_1, \quad \frac{1}{2} r_2^2 \omega = \text{const}_2. \quad (83)$$

Рассмотрим движение компонента № 1 по эллиптической орбите за малый промежуток времени dt . За данный промежуток времени радиус – вектор планеты замечает малый эклиптический сектор, который в силу малости dt можно принять за треугольник с углом раствора $d\varphi$ при центре масс (точка О на рис. 11), тогда его площадь будет равна

$$dS = \frac{1}{2} r_1 r_1 d\varphi = \frac{1}{2} r_1^2 d\varphi.$$

Разделим обе части уравнения на dt . По определению **секторной скорости** тела называется скалярная величина, равная отношению площади dS , замечаемой радиусом – вектором компонента за время dt , к данному промежутку времени, т.е.

$$\sigma_1 = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r_1^2 \omega = \text{const}_1. \quad (84)$$

Аналогично можно записать секторную скорость второго тела:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} r_2^2 \omega = \text{const}_2. \quad (85)$$

Что и требовалось доказать. Отношение секторных скоростей данных компонентов есть

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \right)^2. \quad (86)$$

Ответ: ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Площадь весеннего треугольника»

Решение: Рассмотрим, прежде всего, **сферический двуугольник** – фигуру на поверхности сферы, ограниченную двумя неидентичными большими кругами (см. рис. 13). Определим его площадь. Для этого учтем, что площадь поверхности всей сферы есть

$$S = 4\pi R^2, \quad (87)$$

где R – это радиус сферы. Мысленно разделим ее поверхность на N одинаковых сферических двугольников с общими вершинами, тогда площадь одного двугольника есть

$$S_N = \frac{S}{N} = \frac{4\pi}{N} R^2, \quad (88)$$

при этом ширина двугольника определяется углом (см. рис. 12):

$$\alpha = \frac{2\pi}{N}. \quad (89)$$

Очевидно, площадь двугольника должна быть пропорциональна α , тогда (88) можно переписать так

$$S_N = 2\alpha R^2. \quad (90)$$

Далее рассмотрим **сферический треугольник** – фигуру на поверхности сферы, образованную тремя большими кругами (см. рис. 13). Большие круги, образующие треугольник, образуют также три пары двугольников, покрывающих всю сферу. При этом треугольник $\Delta_S ABC$ и диаметрально противоположный ему треугольник $\Delta_S A'B'C'$ покрываются трехкратно (двугольником из каждой пары), а остальную часть сферы двугольники покрывают без перекрытий. Поэтому сумма площадей всех шести двугольников больше площади сферы S на 4 площади $\Delta_S ABC$, т.е.

$$2(2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2) - 4\pi R^2 = 4S_\Delta,$$

$$S_\Delta = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2. \quad (91)$$

Величина, представленная в скобках, называется **сферическим избытком** (ε).

Угловая площадь или **телесный угол** участка небосвода есть величина, равная отношению площади этого участка к квадрату радиуса небесной сферы:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

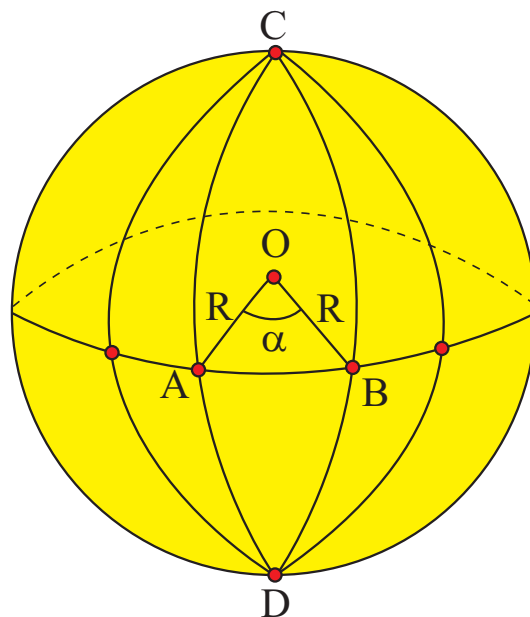


Рис. 12: к определению площади сферического двугольника.

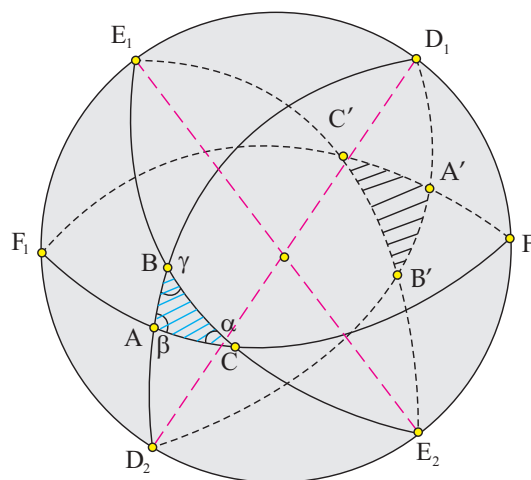


Рис. 13: к определению площади сферического треугольника.

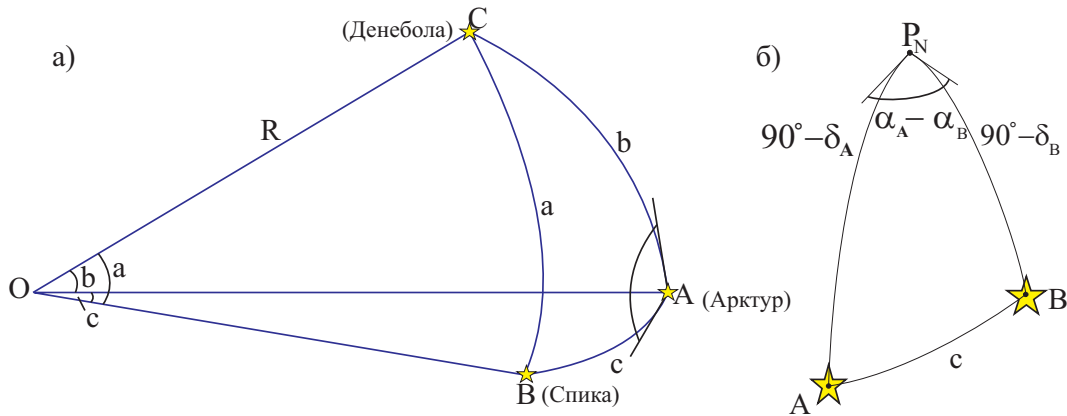


Рис. 14: к определению а) сторон и углов летне-осеннего треугольника, б) вспомогательного сферического треугольника.

В случае сферического треугольника

$$\Omega_{\Delta} = \frac{\varepsilon \cdot R^2}{R^2} = \frac{41253 \text{ кв. град.}}{4\pi} \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \quad (92)$$

здесь $[\Omega_{\Delta}]$ = квад. градусы, $[\varepsilon]$ = срад.

Т.о., необходимо вычислить углы при вершинах данного треугольника: $\angle A = \alpha$ (Арктур, α Волопаса), $\angle B = \beta$ (Спики, α Девы), $\angle C = \gamma$ (Денебола, β Льва) (см. рис. 14.а). Для определения данных углов необходимо воспользоваться теоремой косинусов для стороны треугольника $\Delta_S ABC$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \arccos \left[\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right], \\ B = \arccos \left[\frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \right], \\ C = \arccos \left[\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \right]. \end{array} \right. \quad (93)$$

Т.о., проблема определения углов при вершинах свелась к определению сторон треугольника.

Рассмотрим вспомогательную задачу определения стороны c . Для этого рассмотрим сферический треугольник $\Delta_S ABP_N$ (см. рис. 14.б), составленный из звезд A , B и северного полюса мира P_N . Здесь AP_N и BP_N есть дуги кругов склонений данных звезд и равны соответственно $90^\circ - \delta_A$ и $90^\circ - \delta_B$, где δ_A, δ_B – склонения данных звезд. Угол при вершине равен разности прямых восхождений данных звезд $\angle P_N = \alpha_A - \alpha_B$, тогда можно вновь воспользоваться теоремой косинусов для стороны c

$$\cos c = \cos(90^\circ - \delta_A) \cos(90^\circ - \delta_B) + \sin(90^\circ - \delta_A) \sin(90^\circ - \delta_B) \cos(\alpha_A - \alpha_B), \Rightarrow$$

$$c = \arccos [\sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B)], \quad (94)$$

причем $0 \leq c \leq \pi$. Аналогично рассуждая, можно определить стороны a и b . В итоге

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \arccos [\sin \delta_B \sin \delta_C + \cos \delta_B \cos \delta_C \cos(\alpha_B - \alpha_C)], \\ b = \arccos [\sin \delta_A \sin \delta_C + \cos \delta_A \cos \delta_C \cos(\alpha_A - \alpha_C)], \\ c = \arccos [\sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B)]. \end{array} \right\} \quad (95)$$

С использованием представленных в условии экваториальных координат звезд треугольника, получаем в итоге:

$$a = 35.064^\circ, \quad b = 35.309^\circ, \quad c = 32.792^\circ.$$

$$A = 64.956^\circ, \quad B = 65.713^\circ, \quad C = 58.662^\circ.$$

Тогда сферический избыток $\varepsilon = 0.162859$ срад, а угловая площадь треугольника, согласно (92), есть $\Omega_\Delta = 534.6$ кв. град.

Ответ: $\Omega_\Delta = 534.6$ кв. град. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Оптическая поверхность без сферической аберрации»

<u>Дано:</u> $f, n.$ <u>Найти:</u> $y(x), r_{\max} - ?$	<u>Решение:</u> Пусть узкий пучок света (1) падает в точку с координатами (x, y), а пучок (2) в геометрический центр O поверхности (см. рис. 15). До оси OY эти лучи находились в эквивалентных условиях. Согласно принципу Ферма, свет всегда распространяется по кратчайшему оптическому пути. При
---	---

этом оптические пути лучей 1 и 2 после OY должны быть одинаковыми, т.е.

$$fn = x + n\sqrt{(f-x)^2 + y^2}, \quad (96)$$

$$(fn - x)^2 = n^2((f-x)^2 + y^2), \Rightarrow$$

$$x^2(n^2 - 1) - 2fn(n-1)x + n^2y^2 = 0. \quad (97)$$

$$D = 4f^2n^2(n-1)^2 - n^2(n^2 - 1)y^2 \geq 0,$$

$$\text{при } y \leq f\sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}. \quad (98)$$

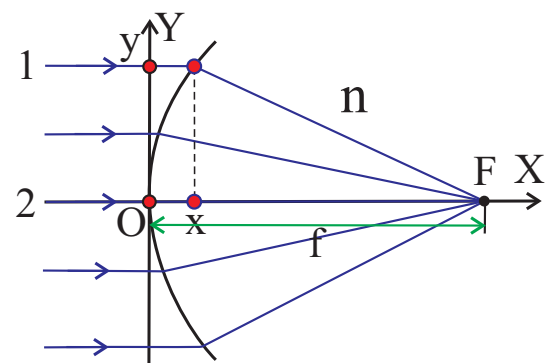


Рис. 15: к определению параметров задачи.

Последнее неравенство в пределе определяет максимальный радиус такого пучка

$$r_{\max} = f\sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}. \quad (99)$$

Уравнение (97), очевидно, имеет два корня

$$x = \frac{fn}{n+1} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_{\max}} \right)^2} \right). \quad (100)$$

Очевидно, при $y = 0$, $x = 0$. Этому условию удовлетворяет лишь корень со знаком «-». Следовательно уравнение профиля представляется в виде:

$$x(y) = \frac{fn}{n+1} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_{\max}} \right)^2} \right). \quad (101)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (99) и (101). ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Задача Кеплера для μ -точки в гравитационном поле неподвижного силового центра»

Решение.

1. Запишем уравнение движения (второй закон Ньютона) μ -точки в гравитационном поле неподвижной материальной точки с массой $\mathfrak{M}$ в векторной форме:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{G \mu \mathfrak{M}}{r^3} \vec{r}. \quad (102)$$

2. Далее введем декартову систему координат OXY , начало отсчета которой совпадает с точкой массы $\mathfrak{M}$. Относительно последней определим полярную систему (см. рис. 16) координат (r, φ) , посредством выражений вида:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (103)$$

Единичные орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы посредством системы выражений (74).

Определим следующие кинематические величины в полярной системе координат

радиус-вектор μ -точки: $\vec{r} = r \vec{n}_r$,

скорость μ -точки: $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{n}_r + r \dot{\vec{n}}_r = \dot{r} \vec{n}_r + r \dot{\varphi} \vec{n}_\varphi$,

ускорение μ -точки: $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{n}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{n}_\varphi$.

При записи скорости и ускорения были использованы результаты (78)-(80) (см. задачу №14). Тогда уравнение (102) в проекциях на орты $\vec{n}_r$, $\vec{n}_\varphi$ можно записать так

$$\text{на } \vec{n}_r : \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{G \mathfrak{M}}{r^2}, \quad \text{на } \vec{n}_\varphi : 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \quad (104)$$

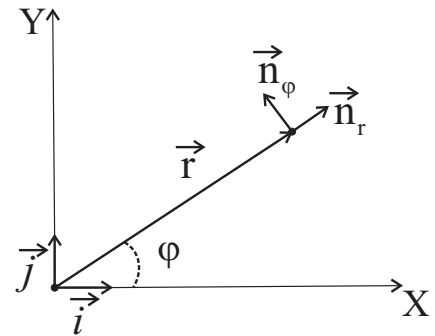


Рис. 16: к определению ориентации ортов полярной системы координат.

3. Умножим обе части второго уравнения (104) на r :

$$2r \dot{r} \dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0, \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad (105)$$

что и требовалось показать.

4. Для вычисления const воспользуемся определением момента $\vec{L}$ количества движения μ -точки. Как известно, последний можно представить через векторное произведение векторов $\vec{r}$ и $\vec{v}$ данной точки. Данная операция над векторами может быть сведена к вычислению детерминанта от их проекций:

$$\vec{L}_\mu = \mu[\vec{r}, \vec{v}] = \mu \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}, \quad \text{где} \quad (106)$$

$$L_x = \mu(yv_z - zv_y), \quad L_y = \mu(zv_x - xv_z), \quad L_z = \mu(xv_y - yv_x).$$

Поскольку движение μ -точки осуществляется в плоскости OXY , то $z, v_z = 0$, следовательно $\vec{L} = L_z \vec{k}$. Тогда

$$L_z = \mu(xv_y - yv_x) = \mu(r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi})) = \mu(r^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi} + r^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}) = \mu r^2 \dot{\varphi} = \mu \cdot \text{const},$$

откуда

$$\text{const} = \frac{L_z}{\mu} = \frac{L}{\mu},$$

что и требовалось показать.

5. С учетом (105), первое уравнение системы (104) представляется в виде:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} = -\frac{G \mathfrak{M}}{r^2}. \quad (107)$$

Получим уравнение траектории μ -точки в виде зависимости $r = r(\varphi)$. Для этого учтем, что

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}, \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} \dot{\varphi} + \frac{dr}{d\varphi} \ddot{\varphi} = \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{dr}{d\varphi} \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Согласно (105) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2},$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{L \dot{r}}{\mu r^3} = -\frac{L}{\mu} \frac{2}{r^3} \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\left(\frac{L}{\mu} \right)^2 \frac{2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right).$$

Следовательно, уравнение (107) можно переписать в виде:

$$\left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2}\right) \cdot \frac{L^2}{\mu^2 r^4} - 2 \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{L^2}{\mu^2 r^5} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} = -\frac{G \mathfrak{M}}{r^2}. \quad (108)$$

Перейдем к новой переменной $\rho = 1/r$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi} \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2} \rho'_{\varphi}, \\ \frac{d^2 r}{d\varphi^2} &= \frac{d}{d\varphi} \cdot \left(-\frac{1}{\rho^2} \cdot \rho'_{\varphi}\right) = \frac{2}{\rho^3} \cdot (\rho'_{\varphi})^2 - \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho''_{\varphi}. \end{aligned}$$

В итоге уравнение (108) можно представить в виде:

$$\rho^4 \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 \left(\frac{2}{\rho^3} \cdot (\rho'_{\varphi})^2 - \frac{1}{\rho^2} \rho''_{\varphi}\right) - 2(\rho'_{\varphi})^2 \cdot \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 \rho^5 - \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 \rho^3 = -G \mathfrak{M} \rho^2,$$

$$\text{или} \quad -\left(\frac{L}{\mu}\right)^2 \rho^2 \cdot \rho''_{\varphi} - \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 \rho^3 = -G \mathfrak{M} \rho^2.$$

Разделим последнее уравнение на $-\rho^2(L/\mu)^2$. В итоге получим

$$\rho''_{\varphi} + \rho = \frac{G \mu^2 \mathfrak{M}}{L^2}. \quad (109)$$

Последнее уравнение есть *уравнение гармонических колебаний* с ненулевой правой частью.

6. Решение последнего можно представить в виде:

$$\rho = A \cdot \cos \varphi + B \cdot \sin \varphi + D,$$

где A, B, D – числовые коэффициенты, подлежащие определению. Прямой подстановкой легко убедиться в том, что $D = G \mu^2 \mathfrak{M}/L^2$. Следовательно, решение можно представить в виде:

$$\rho = F(\cos \varphi \cdot \cos \alpha + \sin \varphi \cdot \sin \alpha) + \frac{G \mu^2 \mathfrak{M}}{L^2},$$

$$\text{где } F = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\text{или } \rho = F \cdot \cos(\varphi - \alpha) + \frac{G \mu^2 \mathfrak{M}}{L^2}.$$

Возвращаясь к полярному радиусу, уравнение траектории μ -точки можно представить в виде:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \alpha)}, \quad (110)$$

$$\text{где } p = \frac{L^2}{G \mu^2 \mathfrak{M}}, \quad \varepsilon = \frac{F L^2}{G \mu^2 \mathfrak{M}}, \quad (111)$$

здесь p , ε – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты соответственно. Очевидно, что в зависимости от значения параметра ε зависимость (110) может быть уравнением гиперболы ($\varepsilon > 1$), параболы ($\varepsilon = 1$) или эллипса ($0 \leq \varepsilon < 1$).

Всегда можно выбрать такое исходное направление полярной оси, что $\alpha = 0$. Тогда уравнение траектории принимает вид:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (112)$$

7. Выразим эксцентриситет орбиты через полную механическую энергию μ -точки (E_0), которая является сохраняющейся величиной в центральном силовом поле массы $\mathfrak{M}$. Для этого учтем, что кратчайшее расстояние (q) от тела массы $\mathfrak{M}$ до μ -точки, согласно (112), есть

$$q = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{L^2}{G \mathfrak{M} \mu^2 (1 + \varepsilon)}. \quad (113)$$

Полная механическая энергия μ -точки в этом положении

$$E_0 = \frac{\mu V_q^2}{2} - \frac{G \mu \mathfrak{M}}{q}, \quad (114)$$

здесь V_q – ее скорость в этой точке. Здесь ее радиус-вектор перпендикулярен скорости, тогда

$$L = \mu q V_q, \Rightarrow V_q = \frac{L}{\mu q} = \frac{G \mathfrak{M} \mu (1 + \varepsilon)}{L}. \quad (115)$$

Подставляя выражения (113) и (115) в выражение (134), в результате получаем

$$E_0 = \frac{\mu (G \mathfrak{M} \mu)^2 (1 + \varepsilon)^2}{2 L^2} - \frac{\mu (G \mathfrak{M} \mu)^2 (1 + \varepsilon)}{L^2} = \frac{\mu (G \mathfrak{M} \mu)^2 (\varepsilon^2 - 1)}{2 L^2},$$

откуда следует

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E_0 L^2}{\mu (G \mu \mathfrak{M})^2}}. \quad (116)$$

Очевидно, что полная механическая энергия E_0 μ -точки однозначно определяет значение эксцентриситета орбиты, и, следовательно, тип ее траектории:

$$\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ll} > 1, & \text{если } E_0 > 0, \text{ уравнение траектории – гипербола,} \\ = 1, & \text{если } E_0 = 0, \text{ уравнение траектории – парабола,} \\ 0 \leq \varepsilon < 1, & \text{если } E_0 < 0, \text{ уравнение траектории – эллипс} \end{array} \right\}.$$

8. Для определения обратной зависимости $t = t(\varphi)$ воспользуемся выражениями (105), (112):

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} = \frac{L(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{\mu p^2}, \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{\mu}{L}\right)^3 (G \mathfrak{M})^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2. \quad (117)$$

$$\left(\frac{L}{\mu}\right)^3 \frac{1}{(G \mathfrak{M})^2} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = dt, \Rightarrow \left(\frac{L}{\mu}\right)^3 \frac{1}{(G \mathfrak{M})^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{(1 + \varepsilon \cos \varphi')^2} = \int_0^t dt'$$

или

$$t = \left(\frac{L}{\mu}\right)^3 \frac{1}{(G \mathfrak{M})^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{(1 + \varepsilon \cos \varphi')^2}. \quad (118)$$

Интеграл в правой части для разных значений ε имеет различные первообразные (здесь φ_0, φ – начальное и конечное значения полярного угла). Чтобы получить зависимость $t = t(r)$, воспользуемся законом сохранения механической энергии для μ -точки:

$$E_0 = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} - \frac{G \mu \mathfrak{M}}{r} = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{G \mu \mathfrak{M}}{r} = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}},$$

$$\text{где } U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G \mu \mathfrak{M}}{r}.$$

Из последнего выражения следует

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_0 - U_{\text{eff}})}, \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_0 - U_{\text{eff}})}} = \pm dt, \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{2E_0}} \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{L^2}{2\mu E_0 r^2} + \frac{G \mu \mathfrak{M}}{r E_0}\right)}} = \pm dt.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\sqrt{\frac{\mu}{2E_0}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\left(1 - \frac{L^2}{2\mu E_0 r'^2} + \frac{G \mu \mathfrak{M}}{r' E_0}\right)}} = \pm \int_0^t dt'$$

или

$$t = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2E_0}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\left(1 - \frac{L^2}{2\mu E_0 r'^2} + \frac{G \mu \mathfrak{M}}{r' E_0}\right)}}. \quad (119)$$

Далее в качестве конкретного примера рассмотрим случай эллиптической орбиты ($E_0 < 0, \varepsilon < 1$). Интеграл (118) можно представить в виде:

$$t = \left(\frac{L}{\mu}\right)^3 \frac{1}{(G \mathfrak{M})^2} (F(\varphi) - F(\varphi_0)), \quad (120)$$

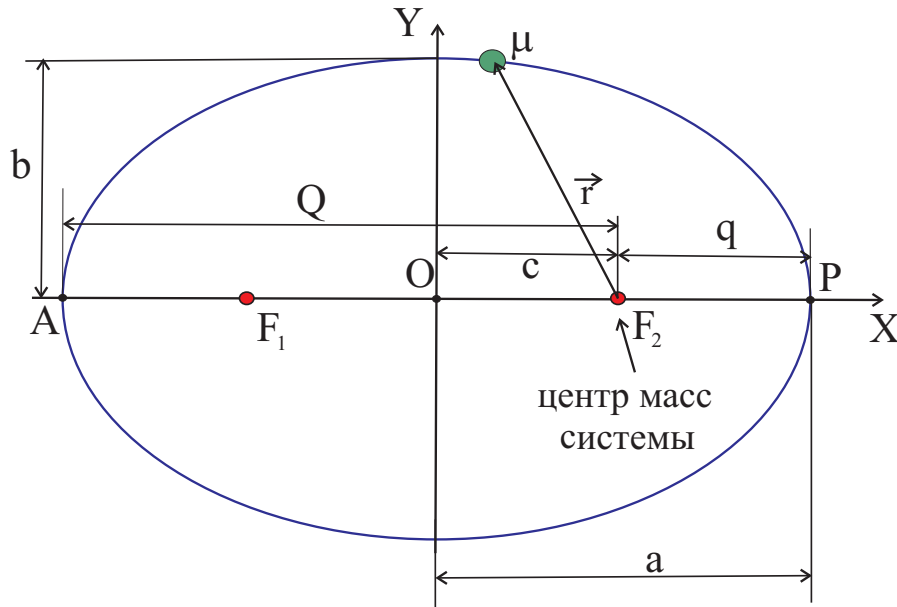


Рис. 17: к определению основных параметров эллипса.

где

$$F(\varphi) = -\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)} \frac{\sin \varphi}{(1+\varepsilon \cos \varphi)} + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right] + C_3,$$

где C_3 – константа интегрирования.

Учтем далее, что расстояния от второго фокуса эллипса (где находится центр масс системы) до самой далекой (А) и самой ближней (Р) точек эллипса (см. рис. 17) есть

$$\begin{aligned} r_{\max} = Q = \frac{p}{1-\varepsilon}, \quad r_{\min} = q = \frac{p}{1+\varepsilon}, \quad r_{\min} + r_{\max} = 2a = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}, \Rightarrow \\ a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{G\mu\mathfrak{M}}{2|E_0|}, \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{L}{\sqrt{2\mu|E_0|}}, \end{aligned} \quad (121)$$

тогда (119) можно представить в виде:

$$t = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2|E_0|}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{(-r'^2 + 2ar' - b^2)}} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2|E_0|}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (r' - a)^2}}.$$

В итоге закон движения по переменной r можно представить в виде:

$$t = \mp \sqrt{\frac{\mu}{2|E_0|}} (G(r) - G(r_0)), \quad \text{где} \quad (122)$$

$$G(r) = \sqrt{(a\varepsilon)^2 - (r-a)^2} - a \operatorname{arctg} \left[\frac{(r-a)}{\sqrt{(a\varepsilon)^2 - (r-a)^2}} \right] + C_4.$$

В последнем выражении C_4 – константа интегрирования. Функции $F(\varphi)$, $G(r)$ получены автором с использованием системы аналитических вычислений Mathematica.

Ответ: к задаче представляется выражениями (102), (104), (109), (112), (116), (118), (118), (119). (\$_{\max} = 14\$ баллов).

Задача № 18. «Эволюция орбит планет земной группы и астероидов главного пояса»

Решение. 2. Как известно, орбиты большинства планет земной группы и многих астероидов главного пояса характеризуются относительно малыми значениями эксцентриситета, следовательно данные эллиптические орбиты в низшем приближении можно рассматривать как круговые. Определим закон изменения радиуса круговой орбиты небесного тела (планеты) Солнечной системы, обусловленного уменьшением массы Солнца.

Заметим, что с уменьшением массы Солнца остаются неизменными масса планеты $\mathfrak{M}_p$ и ее момент количества движения (МКД) тела – L^2 . Последний, во-первых, явно не зависит от $\mathfrak{M}_\odot$, во-вторых, его изменение возможно, если только на планету будет действовать нецентральная сила, которая будет порождать ненулевой момент, но источников такой силы не существует³, в силу сферически симметричного характера сброса плазмы с поверхности Солнца.

Для МКД планеты, движущейся по круговой орбите радиуса r_p , со скоростью V_p , справедливо равенство вида:

$$L_p = \mathfrak{M}_p r_p V_p, \Rightarrow r_p = \frac{L_p}{\mathfrak{M}_p V_p}. \quad (123)$$

Далее воспользуемся вторым законом Ньютона для планеты:

$$\mathfrak{M}_p \frac{V_p^2}{r_p} = \frac{G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot}{r_p^2}, \Rightarrow V_p = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_\odot}{r_p}}. \quad (124)$$

Из выражений (123) и (124) следует, что

$$r_p = \frac{1}{G \mathfrak{M}_\odot} \left(\frac{L}{\mathfrak{M}_p} \right)^2. \quad (125)$$

Полагая, что $r_p^{(0)}$, $\mathfrak{M}_\odot^{(0)}$ – радиус орбиты планеты и масса Солнца в данный момент времени, а r_p , $\mathfrak{M}_\odot$ – те же параметры в момент времени t . В итоге получаем выражение для радиуса орбиты планеты в виде:

$$r_p = r_p^{(0)} \left(\frac{\mathfrak{M}_\odot^{(0)}}{\mathfrak{M}_\odot} \right). \quad (126)$$

²Далее будем пренебрегать изменением массы ближайших к Солнцу планет, обусловленным потерей атмосферы, океанов жидкой воды (в случае Земли) и тонкого слоя коры планеты, в силу краткосрочного действия сброшенной Солнцем плазменной оболочки, на стадии красного гиганта.

³За исключением кратковременного действия силы сопротивления, действующей со стороны сброшенных Солнцем расширяющихся слоев плазмы, чем далее будем пренебрегать.

Возраст, $\times 10^9$ лет	4.58 (на- стоящее время)	12.17 (крас- ный гигант)	12.30 (вто- ричное расширение)	12.38 (белый карлик)
$\mathfrak{M}_{\odot}/\mathfrak{M}_{\odot}^{(0)}$	1.000	0.668	0.546	0.541
$\beta_{\odot}$, %	00.0	33.2	45.4	45.95
$\mathfrak{R}_{\odot}/\mathfrak{R}_{\odot}^{(0)}$ (a.e.)	1.000 ($4.65 \cdot 10^{-3}$)	256 (1.19)	149 (0.69)	≤ 0.1 ($4.65 \cdot 10^{-4}$)
Тело	Радиус орбиты, а.е.			
Меркурий	0.3871	0.5795	0.7090	0.7162
Венера	0.7233	1.0828	1.3247	1.3383
Земля	1.0000	1.4970	1.8315	1.8501
Марс	1.5237	2.2809	2.7906	2.8190
Паллада	2.773	4.151	5.079	5.130
Юнона	2.672	4.000	4.894	4.944
Веста	2.361	3.534	4.324	4.368
Астрея	2.573	3.852	4.712	4.760
Геба	2.426	3.632	4.443	4.488
Гигия	3.139	4.699	5.749	5.808

Таблица 3: Параметры Солнца, планет земной группы и некоторых астероидов главного пояса, а также вычисленные значения радиусов их орбит.

Далее будем использовать параметр β – *относительное изменение массы Солнца*:

$$\beta_{\odot} = \frac{(\mathfrak{M}_{\odot}^{(0)} - \mathfrak{M}_{\odot})}{\mathfrak{M}_{\odot}^{(0)}} \cdot 100\%, \Rightarrow \frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{\mathfrak{M}_{\odot}^{(0)}} = \left(1 - \frac{\beta_{\odot}}{100\%}\right). \quad (127)$$

Следовательно, радиус орбиты есть

$$r_p = r_p^{(0)} \left(1 - \frac{\beta_{\odot}}{100\%}\right)^{-1}. \quad (128)$$

В случае $\beta_{\odot} \ll 100\%$, имеем следующее приближенное выражение для r_p :

$$r_p \approx r_p^{(0)} \left(1 + \frac{\beta_{\odot}}{100\%}\right). \quad (129)$$

В частности, последним выражением удобно пользоваться для оценки изменения радиуса орбиты планеты на стадии желтого карлика, где масса Солнца уменьшается крайне медленно.

С использованием данных модели эволюции Солнца, представленных в таблице 1, здесь вычислены радиусы орбит планет земной группы и некоторых астероидов. Численные результаты представлены в таблице 3. Очевидно, к финальной стадии эволюции Солнца радиусы орбит всех рассматриваемых тел в рамках данного приближения увеличатся почти 2 раза!

3. В предыдущем пункте был рассмотрен вопрос эволюции орбит тел внутренней части Солнечной системы в приближении круговых орбит. Однако, рассмотренный подход является ограниченным, поскольку дает лишь очень грубую картину эволюции орбит и не учитывает характер движения тела (финитное или инфинитное движение), который определяется его полной механической энергией E_0 . В настоящем параграфе мы получим аналитические зависимости для большой полуоси – $a = a(\mathfrak{M}_\odot)$, и эксцентриситета орбиты – $\varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{M}_\odot)$ произвольного тела Солнечной системы.

Согласно выражениям (116), (121) эксцентриситет и большая полуось кеплеровой орбиты тела зависят от значений четырех параметров: $\mathfrak{M}_\odot$, $\mathfrak{M}_p$, L , E_0 . Как было уже сказано выше, параметры $\mathfrak{M}_p$, L в процессе эволюции Солнечной системы у данного тела остаются постоянными.

Полная механическая энергия планеты (E_0), очевидно, с уменьшением $\mathfrak{M}_\odot$ будет изменяться. Определим ее характер изменения. Воспользуемся выражением (134) и учтем, что первое слагаемое в нем, определяющее кинетическую энергию тела, явно не зависит от массы Солнца, следовательно, оно должно оставаться неизменным. Как было показано в задаче №10, скорость какого-либо небесного тела Солнечной системы в перигелии определяется выражением (45). Тогда полную механическую энергию планеты можно представить в виде:

$$\begin{aligned} E_0(\mathfrak{M}_\odot) &= \frac{G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot^{(0)}}{2 a^{(0)}} \left(\frac{1 + \varepsilon^{(0)}}{1 - \varepsilon^{(0)}} \right) - \frac{G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot}{a^{(0)}(1 - \varepsilon^{(0)})} = \\ &= -\frac{G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot^{(0)}}{2 a^{(0)}(1 - \varepsilon^{(0)})} \left[2 \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_\odot^{(0)}} - (1 + \varepsilon^{(0)}) \right], \end{aligned} \quad (130)$$

здесь и далее индексом «0» обозначены текущие значения параметров планеты и Солнца, $\mathfrak{M}_\odot$ – масса Солнца в будущий момент времени t . Из последнего выражения очевидно, что полная механическая энергия планеты равна нулю, если

$$\mathfrak{M}_\odot^{(c)} = \frac{1}{2} \mathfrak{M}_\odot^{(0)} (1 + \varepsilon^{(0)}). \quad (131)$$

Последнее равенство есть *условие для оставшейся массы Солнца – критической массы $\mathfrak{M}_\odot^{(c)}$, при которой планета становится свободной (преодолевает гравитационное поле Солнца) и навсегда покидает пределы Солнечной системы, приобретая статус блуждающей планеты*. Очевидно, что чем больше настоящий эксцентриситет орбиты, тем больше критическая масса $\mathfrak{M}_\odot^{(c)}$ Солнца. Следовательно, Солнечную систему, в первую очередь, должны покидать тела с большими эксцентриситетами.

Полную механическую энергию небесного тела (планеты) с учетом (127)

можно представить в виде:

$$E_0(\mathfrak{M}_\odot) = -\frac{G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot^{(0)}}{2 a^{(0)} (1 - \varepsilon^{(0)})} \left[1 - \varepsilon^{(0)} - 2 \frac{\beta_\odot}{100\%} \right], \quad (132)$$

отсюда следует, что критическое значение параметра $\beta_\odot^{(c)}$ представляется в виде:

$$\beta_\odot^{(c)} = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^{(0)}) \cdot 100\%. \quad (133)$$

Окончательно, энергию можно представить в виде:

$$E_0(\mathfrak{M}_\odot) = -\frac{G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot^{(0)}}{2 a^{(0)}} \left[1 - \frac{\beta_\odot}{\beta_\odot^{(c)}} \right]. \quad (134)$$

В итоге большая полуось и эксцентриситет орбиты небесного тела (планеты) представляются в виде:

$$a = \frac{G \mathfrak{M}_\odot \mathfrak{M}_p}{2 |E_0|} = a^{(0)} \left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_\odot^{(0)}} \right) \left[1 - \frac{\beta_\odot}{\beta_\odot^{(c)}} \right]^{-1} = a^{(0)} \frac{(1 - \beta_\odot/100\%)}{(1 - \beta_\odot/\beta_\odot^{(c)})}. \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{1 + \frac{2 E_0 L^2}{\mathfrak{M}_p (G \mathfrak{M}_\odot \mathfrak{M}_p)^2}} = \sqrt{1 - \frac{2 G \mathfrak{M}_p \mathfrak{M}_\odot^{(0)} L^2 (1 - \beta_\odot/\beta_\odot^{(c)})}{2 a^{(0)} \mathfrak{M}_p (G \mathfrak{M}_\odot \mathfrak{M}_p)^2}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{L^2 (1 - \beta_\odot/\beta_\odot^{(c)})}{a^{(0)} G \mathfrak{M}_\odot^{(0)} \mathfrak{M}_p^2 (1 - \beta_\odot/100\%)^2}} = \\ &= \sqrt{1 - (1 - \varepsilon^{(0)})^2 \frac{(1 - \beta_\odot/\beta_\odot^{(c)})}{(1 - \beta_\odot/100\%)^2}}. \end{aligned} \quad (136)$$

В таблице 4 представлены значения параметров орбит планет земной группы и некоторых астероидов главного пояса, вычисленные на начало четырех эпох жизненного цикла Солнца по формулам (135)-(136). Из полученных данных, очевидно, что Солнечная система существенным образом меняет свой облик в процессе эволюции Солнца. Уже на стадии красного гиганта большие полуоси планет земной группы увеличиваются в несколько раз: у Меркурия – в 4 раза, у Венеры и Земли – в 2 раза, у Марса – в 2.5 раза. Еще бóльшими темпами растут эксцентриситеты их орбит. Большинство рассматриваемых астероидов (за исключением Весты) удалятся от Солнца на расстояния $8 \div 16$ а.е.

Спустя 7.72 млрд. лет от настоящего времени Солнце испытает повторное расширение конвективной оболочки. К этому моменту масса центрального тела станет меньше критической для большинства рассматриваемых тел (см.

Возраст, $\times 10^9$ лет	4.58 (на- стоящее время)	12.17 (крас- ный гигант)	12.30 (вто- ричное расширение)	12.38 (белый карлик)
$\mathcal{M}_{\odot}/\mathcal{M}_{\odot}^{(0)}$	1.000	0.668	0.546	0.541
$\beta_{\odot}$, %	00.0	33.2	45.4	45.95
$\mathcal{R}_{\odot}/\mathcal{R}_{\odot}^{(0)}$ (а.е.)	1.000 ($4.65 \cdot 10^{-3}$)	256 (1.19)	149 (0.69)	≤ 0.1 ($4.65 \cdot 10^{-4}$)
Тело	Большая полуось орбиты, а.е.			
Меркурий	0.3871	1.5756	∞	∞
Венера	0.7233	1.4578	4.6039	5.2332
Земля	1.0000	2.0572	7.1309	8.2669
Марс	1.5237	3.8035	∞	∞
Паллада	2.773	13.5664	∞	∞
Юнона	2.672	16.5995	∞	∞
Веста	2.361	5.8169	391.459	∞
Астрея	2.573	9.6996	∞	∞
Геба	2.426	9.6509	∞	∞
Гигия	3.139	8.4544	∞	∞
	эксцентриситет орбиты			
Меркурий	0.2056	0.8048	1.2081	1.2305
Венера	0.0068	0.5072	0.8440	0.8627
Земля	0.0167	0.5220	0.8621	0.8810
Марс	0.0933	0.6368	1.0026	1.0229
Паллада	0.231	0.8428	1.2545	1.2775
Юнона	0.256	0.8802	1.3004	1.3238
Веста	0.089	0.6302	0.9945	1.015
Астрея	0.193	0.7859	1.1850	1.2072
Геба	0.202	0.7994	1.2014	1.2239
Гигия	0.117	0.6722	1.0458	1.0666

Таблица 4: Параметры Солнца, планет земной группы и некоторых астероидов главного пояса, а также вычисленные значения большой полуоси и эксцентриситета в случае эллиптических орбит.

таблицы 4 и 5), последние покинут Солнечную систему, уйдя в межзвездное пространство. Лишь Венера, Земля и Веста останутся в гравитационном поле Солнца. При этом большая полуось Земли увеличится в сравнение с сегодняшним значением в 7 раз, а большая полуось орбиты Весты – в 166 раз! На стадии белого карлика (спустя 7.80 млрд. лет) во внутренней части Солнечной системы останутся из 10 рассматриваемых тел только Венера и Земля!

1. Определим изменение (Δa) большой полуоси орбиты Земли за 1 год. Для это оценим изменение массы Солнца за 1 год. Как известно, масса Солн-

Тело	$\mathfrak{M}_{\odot}^{(c)}, \mathfrak{M}_{\odot}^{(0)}$	$\beta_{\odot}^{(c)}, \%$
Меркурий	0.6028	39.72
Венера	0.5034	49.66
Земля	0.5084	49.16
Марс	0.5467	45.33
Паллада	0.6155	38.45
Юнона	0.6280	37.20
Веста	0.5445	45.55
Астрея	0.5965	40.35
Геба	0.6010	39.90
Гигия	0.5585	44.15

Таблица 5: значения критических параметров для планет земной группы и некоторых астероидов главного пояса.

ца уменьшается в результате непрерывного испускания в окружающее пространство трех типов излучений: электромагнитного, нейтринного и солнечного ветра. Самым мощным излучением является электромагнитное излучение. Далее для оценки потери массы Солнцем будет учитывать лишь данное излучение.

Как известно, светимость Солнца есть

$$L_{\odot} = -\frac{dE}{dt} = -\frac{d\mathfrak{M}_{\odot}}{dt}c^2, \Rightarrow \frac{d\mathfrak{M}_{\odot}}{dt} = -\frac{L_{\odot}}{c^2}.$$

Поскольку светимость Солнца изменяется крайне медленно, то скорость изменения массы Солнца можно считать постоянной величиной. Следовательно, изменение массы Солнца за год составит

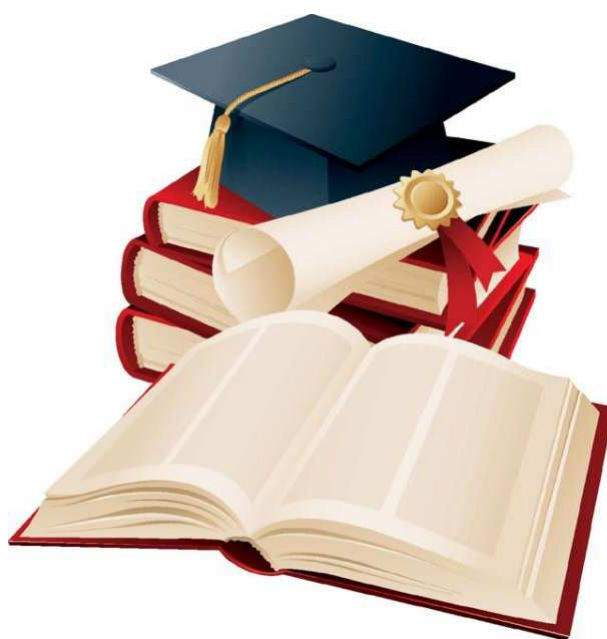
$$\Delta\mathfrak{M}_{\odot} = \left| \frac{d\mathfrak{M}_{\odot}}{dt} \right| T_{\oplus} = \frac{L_{\odot}}{c^2} T_{\oplus} = 1.34 \cdot 10^{17} \text{ кг},$$

где $T_{\oplus} = 365.2564$ сут – звездный год Земли. Этому значению соответствует относительное изменение $\beta_{\odot} = 6.75 \cdot 10^{-12}\%$. С использованием формулы (135) получаем искомое значение для Δa :

$$\Delta a = a^{(0)} \frac{(1 - \beta_{\odot}/100\%)}{(1 - \beta_{\odot}/\beta_{\odot}^{(c)})} - a^{(0)} = 0.01 \text{ м}. \quad (137)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (128), (135), (136), (137). ($\$_{\max} = 15$ баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

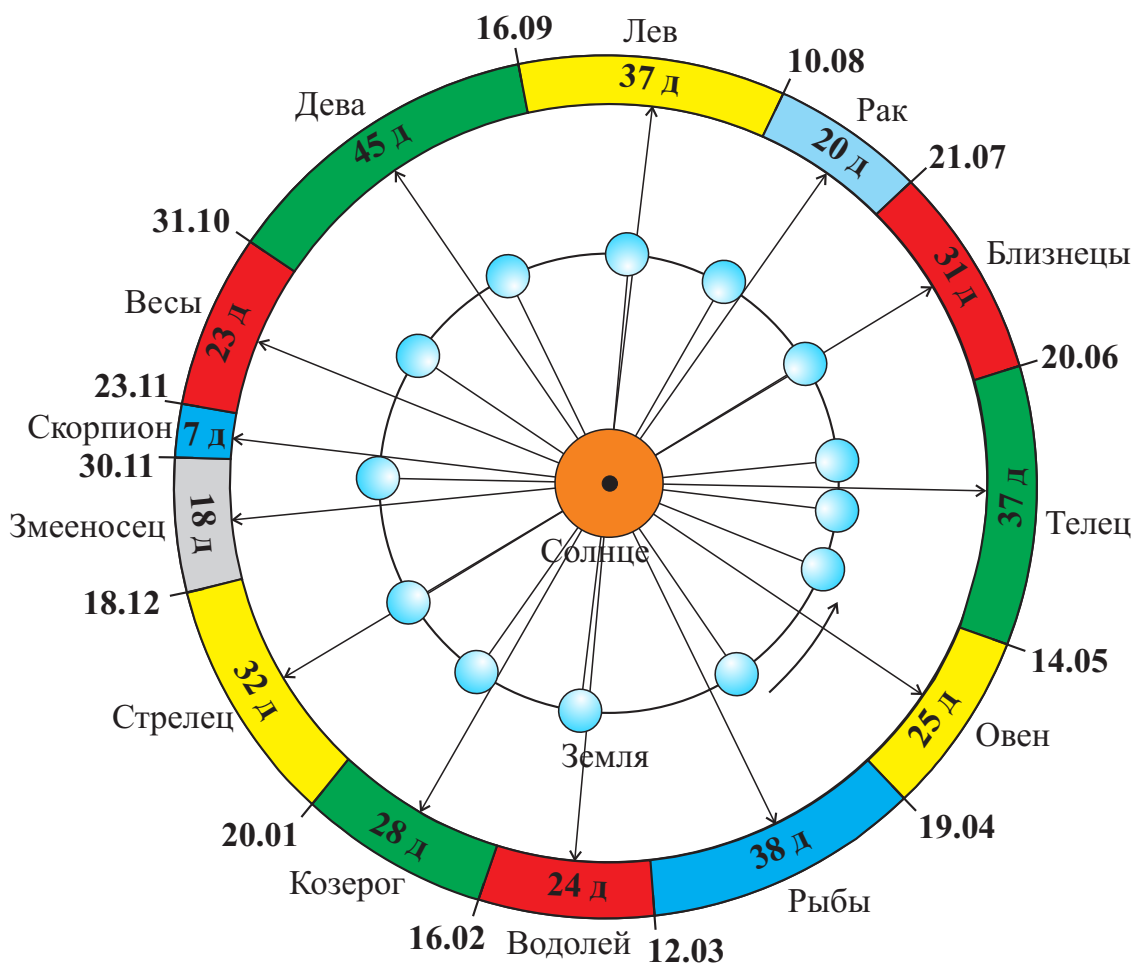


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

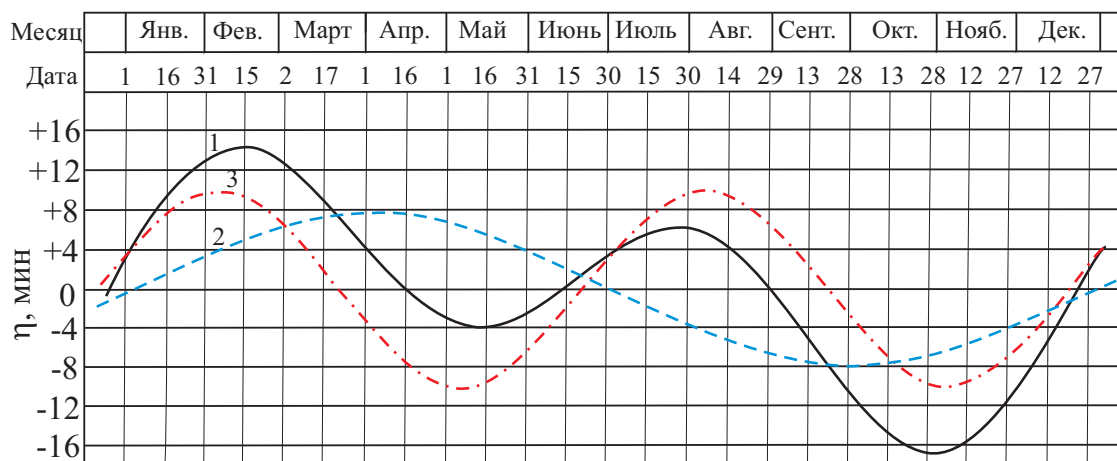


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

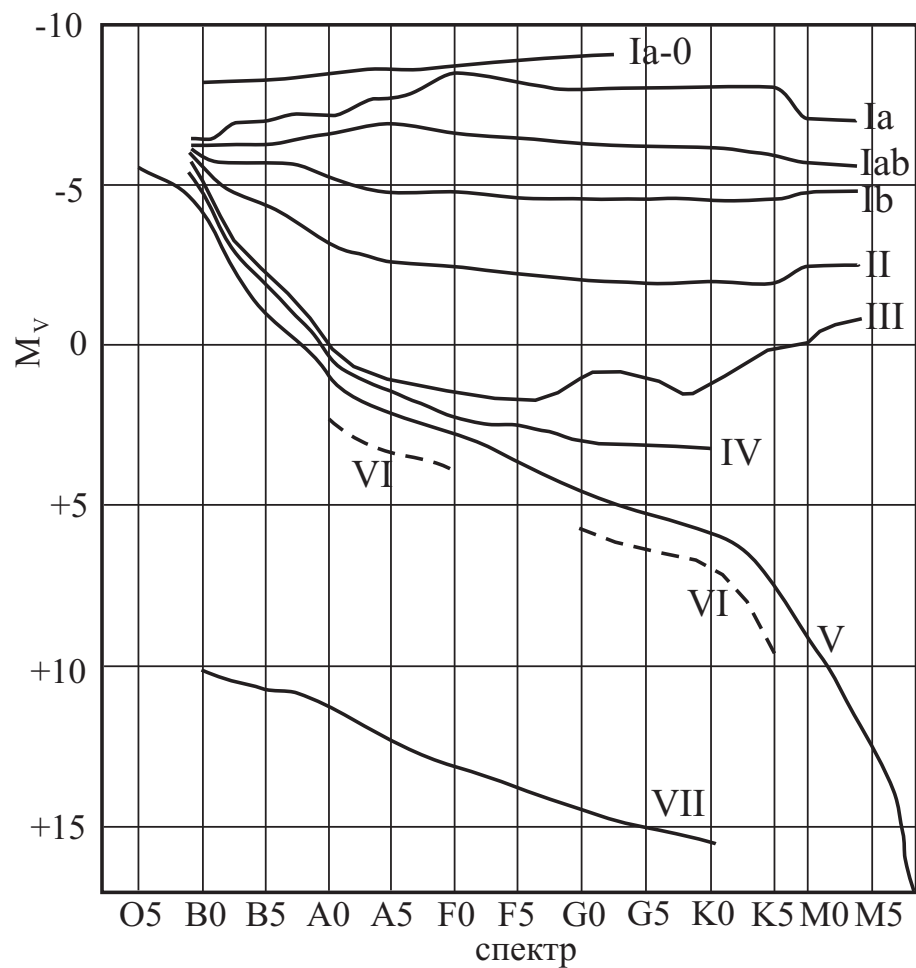


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ПЕРИОДЫ	A	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	(H)												
2	Li Литий	Be Бериллий	B Бор	C Углерод	N Азот	O Кислород	F Фтор	Ne Неон	He Гелий				
3	Na Натрий	Mg Магний	Al Алюминий	Si Кремний	P Фосфор	S Сера	Cl Хлор	Ar Аргон	Ne Неон				
4	K Калий	Ca Кальций	Sc Скандий	Ti Титан	V Ванадий	Cr Хром	Mn Марганец	Fe Железо	Co Кобальт	Ni Никель			
5	Rb Рубидий	Sr Стронций	Y Иттрий	Zr Цирконий	Nb Ниобий	Mo Молибден	Tc Технеций	Ru Рутений	Rh Родий	Pd Палладий			
6	Cs Цезий	Ba Барий	La* Лантан	Hf Гафний	Ta Тантал	W Вольфрам	Re Рений	Os Осмий	Ir Иридий	Pt Платина			
7	Fr Франций	Ra Радий	Ac** Актиний	Rf Рифтердий	Db Дубний	Sg Сибиргдий	Bh Борий	Hs Хассий	Mt Мейтнерий	RO ₄			
8	Ce Церий	Pr Протактиний	Nd Неодим	Pm Прометий	Sm Самарий	Eu Европий	Gd Гадолиний	Tb Тербий	Dy Диспрозий	Ho Гольмий	Er Эрбий	Tm Туллий	Yb Иттербий
9	Th Торий	Pa Протактиний	U Уран	Np Нептуний	Pu Плутоний	Am Америций	Cm Кюрий	Bk Берклий	Cf Калифорний	Es Эйнштейний	Fm Фермий	Md Менделевий	No Нобелий

Рис. А.4. Таблица Менделеева.