

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА  
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

---

---

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ  
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ  
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ  
**SAMRAS-2019**  
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.  
ТУР № 1

---

---



Самара, 2019 г.

## *Дорогие Друзья!*

Вашему вниманию в данном релизе представлены 18 оригинальных задач трех уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В) и «Профи» (уровень С). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

**При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!**

**Ссылка:** «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2019 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 1». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/solutions>

**Автор задач** – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СДДЮТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

**Верстка в системе *ИТ<sub>Е</sub>X*** – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

### **Памятка участника SamRAS-2019**

**1. Официальный сайт Астрошколы:**

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

**2. Официальная группа в VK:**

<http://vk.com/samrasolimp>

**3. Сроки подачи работ SamRAS-2019 тура № 1 на проверку:**

**15.10.2018-15.01.2019!!!**

**4. Электронный ящик SamRAS-2019:**

[samrasolimp@mail.ru](mailto:samrasolimp@mail.ru)

**5. Руководство зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2019:**

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

[https://vk.com/doc-57032141\\_451699934](https://vk.com/doc-57032141_451699934)

---

---

# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

---

---



**Дорогие Друзья!**

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2019, **внимательно** ознакомьтесь с **«Руководством зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2019»!** Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника.**

**Уровень «Новичок» (уровень А)****Задача № 1. «Особые астеризмы и их звезды»**

Приведите 3-4 примера известных вам астеризмов, звезды которых принадлежат разным созвездиям. Как называются звезды этих астеризмов. Каким созвездиям они принадлежат? (1 балл за каждый пример).

**Задача № 2. «Суточные параллели и альмукантараты звезд»**

Чему равна географическая широта точек поверхности Земли, в которых суточные параллели звезд а) параллельны, б) перпендикулярны их альмукантаратам? Чему равна высота полюса мира в этих точках? (3 балла).

**Задача № 3. «Терминатор и фаза планеты»**

Что такое терминатор? Для каких тел Солнечной системы (назовите их собственные имена), имеющих сферическую форму, терминатор может совпадать с диаметром их видимого диска? (3 балла).

**Задача № 4. «Закон обратных квадратов для гелиоцентрической угловой скорости планеты»**

Опираясь лишь на качественную формулировку второго закона Кеплера, докажите, что для угловой скорости (определенной относительно Солнца) планеты, движущейся вокруг Солнца, справедлива зависимость вида:

$$\omega_p \sim \frac{1}{r_p^2}, \quad (1)$$

где  $r_p$  – гелиоцентрическое расстояние до планеты. (4 балла).

**Задача № 5. «Сторона света, меридиан и азимут...»**

На рис. 1 представлена фотография участка звездного неба, полученная астрономом-любителем в Подмоскowie, на широте  $\varphi = 55.7^\circ$ . Определите по фотографии: а) в какую (преимущественно) сторону света был направлен объектив фотоаппарата автора? б) на бумажной копии данной фотографии укажите приближенное положение небесного меридиана, в) оцените азимут



Рис. 1: фотография звездного неба (автор – Алексей Крепак).

направления, вдоль которого ориентирован водный мостик, если известно, что время выдержки затвора для этой фотографии –  $t_0 = 110$  с. (5 баллов).

### **Задача № 6. «Транзит Нептуна в поле зрения телескопа»**

Как известно, Нептун движется вокруг Солнца по почти круговой орбите с большой полуосью  $a_{\Psi} = 30.10$  а.е., наклонение которой к плоскости эклиптики есть  $i_{\Psi} = 1^{\circ}46'$ . Астроном-любитель наблюдал 7 сентября 2018 года эту планету в телескоп, с угловым диаметром поля –  $D_T'' = 1^{\circ}$ , в момент ее противостояния. Оцените минимальное и максимальное возможные значения времени транзита Нептуна в поле зрения телескопа. Считать началом транзита – момент появления диска планеты в поле зрения телескопа, а концом транзита – момент его исчезновения из поля зрения. Угловой диаметр Нептуна принять равным  $D_{\Psi} = 2''$ . (5 баллов).

## **Уровень «Знаток» (уровень В)**

### **Задача № 7. «Горизонтальные координаты полярной звезды»**

В каких пределах изменяются горизонтальные координаты полярной звезды для наблюдателя, находящегося на земном экваторе, если ее полярное расстояние равно  $p_* = 44'$ ? Какова продолжительность ее пребывания над горизонтом в данном месте наблюдения, с учетом явления рефракции? (6 баллов).

**Задача № 8. «Фаза классической планеты»**

Что такое фаза видимого диска планеты? Какие значения она может принимать для нижних планет Солнечной системы? В каких конфигурациях фаза нижней планеты принимает экстремальные значения? Чему равна фаза нижней планеты в момент ее наибольшей элонгации? Какие значения принимает фаза в случае верхних планет? В каких конфигурациях фаза верхней планеты принимает экстремальные значения? У какой верхней классической планеты некруговая форма видимой части диска наиболее отчетливо выражена в момент ее наименьшей фазы? Чему она равна в приближении круговых орбит планет. (7 баллов).

**Задача № 9. «Рокировка "Луна-Меркурий"»**

Как известно, Меркурий является наиболее похожей на Луну классической планетой Солнечной системы. Определите геоцентрическое расстояние до данной планеты, на котором его можно было бы спутать с Луной? Чему будет равна при этом его видимая звездная величина в фазе, аналогичной полнолунию? (8 баллов).

**Задача № 10. «Массовые потери водяного льда транснептунового объекта»**

Далекий транснептуновый объект движется по сильно вытянутой эллиптической орбите. На малой дуге эллипса (части его орбиты, заключенной между точками, где расстояние от Солнца до объекта равно фокальному параметру) он теряет в результате сублимации массу льда  $m_0$ . Чему равна масса льда, теряемого объектом на большой дуге эллипса, заключенного между теми же точками? Считать что процесс сублимации льда не зависит от температуры поверхности ядра и количество теплоты, необходимой для возгонки 1 кг льда в пар равно  $L$ . (8 баллов).

**Задача № 11. «Правило "600" в астрофотографии»**

При создании фотографий небосвода с помощью неподвижного штатива важно добиться выполнения условия "точечности звезд". Данное условие может быть нарушено, если время ( $\tau$ ) выдержки фотоаппарата будет больше некоторого предельного значения ( $\tau_{\max}$ ), в результате чего на фотографии появляются светлые полосы – *звездные треки* (см. рис. 1). Для приближенной оценки времени  $\tau_{\max}$  астрономы-любители часто используют правило "600", согласно которому, указанное время определяется формулой:

$$\tau_{\max} = \frac{600 \text{ с}}{F \cdot k}, \quad (2)$$

где  $F$  – фокусное расстояние объектива (выраженное в мм), используемого в астрофотосъемке;  $k$  – кроп-фактор матрицы (относительно полнокадровой).

| Модель                            | $a \times b$ , мм  | $n_a \times n_b$   | $N, \times 10^6$ | $k$  | $F$ , мм        | $\chi^{-1}$    |
|-----------------------------------|--------------------|--------------------|------------------|------|-----------------|----------------|
| Panasonic FZ28                    | $6.16 \times 4.62$ | $3648 \times 2736$ | 10.1             | 5.67 | $4.8 \div 86.4$ | $2.8 \div 8.0$ |
| Panasonic FZ82                    | $6.16 \times 4.62$ | $4896 \times 3672$ | 18.1             | 5.62 | $3.58 \div 215$ | $2.8 \div 5.9$ |
| Canon 100D + Canon 50mm           | $22.3 \times 14.9$ | $5184 \times 3456$ | 18.0             | 1.6  | 50              | 1.8            |
| Canon 600D + Yongnuo 35mm         | $22.3 \times 14.9$ | $5184 \times 3456$ | 18.0             | 1.6  | 35              | 2.0            |
| Canon 70D + SamYang 85mm          | $22.5 \times 15.0$ | $5472 \times 3648$ | 20.2             | 1.6  | 85              | 1.4            |
| Canon 5D Mark IV + SamYang 135 mm | $36 \times 24$     | $6720 \times 4480$ | 30.4             | 1.0  | 135             | 2.0            |

Таблица 1: некоторые модели фотоаппаратов и их характеристики.

Получите более общую формулу для времени  $\tau_{\max}$ , в случае зеркальной фотокамеры с  $N$ -пиксельной матрицей, размеры которой есть  $a \times b$ . При съемке небесного тела, склонение которого  $\delta$ , используется объектив с фокусным расстоянием  $F$  и относительным отверстием  $\chi = D/F$ , где  $D$  – диаметр диафрагмы. Для Вас может оказаться полезной *теорема Котельникова: для получения дискретного изображения одномерного профиля распределения интенсивности образа звезды необходимо не менее 3 пикселей*. Постройте формулы, аналогичные (2) для фотоаппаратов и их объективов, представленных в таблице 1. (9 баллов).

### Задача № 12. «Разрешающая способность системы "объектив+ПЗС-матрица" в астрофотографии»

Опираясь на данные и результаты решения предыдущей задачи, получите формулу для разрешающей способности оптической системы "объектив+ПЗС-матрица" на примере двойных звезд. При этом следует учесть, что с использованием критерия Релея разрешения двойной звезды и теоремы Котельникова можно строго показать, что для получения дискретного разрешенного изображения одномерного профиля распределения интенсивности света двойной звезды необходимо не менее 7 пикселей. (10 баллов).

## Уровень «Профи» (уровень С)

### Задача № 13. «Какой объектив для съемки DeepSky-объектов лучше?»

Вашему вниманию в таблице 2 представлен перечень из 10 объективов с байонетом Canon, которые планируется использовать для фотосъемки с неподвижного штатива (без трека) с короткими выдержками (чтобы избежать треков звезд). Выберите три наиболее подходящих объектива для съемки крупных DeepSky-объектов (например, галактики Андромеды). Главное требование к таким объективам – собрать как можно больше световой энергии от слабых источников света, при создании серии из  $N$  одинаковых снимков (путем их последующего программного сложения). Масштаб изображения при

| № | Модель            | $F$ , мм | $\chi^{-1}$ | №  | Модель              | $F$ , мм | $\chi^{-1}$ |
|---|-------------------|----------|-------------|----|---------------------|----------|-------------|
| 1 | Canon 50mm STM    | 50       | 1.8         | 6  | Canon 85mm II L USM | 85       | 1.2         |
| 2 | Canon 40mm STM    | 40       | 2.8         | 7  | Canon 18-55mm STM   | 18 ÷ 55  | 3.5 ÷ 5.6   |
| 3 | Canon 24mm STM    | 28       | 2.8         | 8  | SamYang 85mm        | 85       | 1.4         |
| 4 | SamYang 14mm      | 14       | 2.8         | 9  | SamYang 135mm       | 135      | 2.0         |
| 5 | Canon EF 85mm USM | 85       | 1.8         | 10 | Sigma 70-300mm APO  | 70 ÷ 300 | 4.0 ÷ 5.6   |

Таблица 2: некоторые модели фотоаппаратов и их характеристики.

съемке не принципиален. Свой выбор обоснуйте строго математически. Как изменится Ваш выбор, если использовать вместе с фотоаппаратом звездный трекер? (11 баллов).

**Задача № 14. «Выбор бюджетного рефлектора со сферическим зеркалом»**

Одной из первых трудностей, встающих на пути начинающего астронома-любителя, является выбор первого недорогого телескопа с хорошим качеством изображения. Самые дешевые рефракторы-ахроматы страдают от остаточной хроматической аберрации и своими силами ее не устранить! Поэтому естественным образом внимание астронома концентрируется на бюджетных рефлекторах со сферическим зеркалом. Однако, из-за сферической аберрации на его диаметр накладываются жесткие ограничения. Вычислите радиус кружка сферической аберрации в фокусе главного сферического зеркала телескопа с диаметром  $D$  и фокусным расстоянием  $F$ , в случае, когда источником света является звезда, расположенная на главной оптической оси зеркала. Вычислите для телескопа с фокусным расстоянием  $F = 0.9$  м максимально допустимый диаметр сферического зеркала, при условии, чтобы радиус кружка сферической аберрации должен быть не более чем в 1.8 раза больше радиуса дифракционного кружка Эйри на длине волны 555 нм? Какую модель рефлектора (из ныне продающихся в магазинах) Вы посоветуете купить астроному-любителю, опираясь на проведенный анализ? (12 баллов).

**Задача № 15. «Плоская Земля и ее толщина»**

В настоящее время одним из самых популярных заблуждений об устройстве окружающего мира, бытующих в обществе – это миф о плоской Земле. Предположим (от противного), что наша Земля представляет собой безграничный однородной плоский слой вещества толщины  $L$ . Полагая, что средняя плотность шарообразной Земли равна плотности слоя, определите (с использованием теоремы Гаусса для напряженности гравитационного поля) величину  $L$ , при которой ускорение свободного падения на поверхности плоской Земли будет таким же как и на поверхности шарообразной. (13 баллов).

**Задача № 16. «Природа планеты-"бродяги"»**

Планета-"бродяга" – это планета, преодолевшая гравитационное при-

тяжение материнской звезды и ушедшая в межзвездное пространство. Причиной выхода из планетарной системы, как правило, служит гравитационный маневр, совершаемый близко расположенной планетой-гигантом, подобной Юпитеру. В 2011 году исследования ученых показали, что на данных планетах могут быть условия, пригодные для существования жизни. Как показывают исследования, температура поверхности этих планет является низкой и составляет около  $T_s = 30$  К, при этом температура в центре такой планеты может достигать значений  $T_c = 10^4$  К. Основным источником энергии в теле таких планет являются реакции радиоактивного распада. Будем представлять планету однородным шаром радиуса  $R$ , с равномерным распределением радиоактивного вещества по всему ее объему. Атмосфера у планеты отсутствует, и последняя непрерывно излучает энергию в межзвездное пространство. Период полураспада радиоактивных элементов составляет  $\tau_{1/2} = 3.76 \cdot 10^8$  лет. Полагая, что поверхность планеты излучает подобно абсолютно черному телу, а поток тепловой энергии внутри данного тела пропорционален радиальному перепаду температуры  $\Delta T / \Delta r$ , определите:

1. Настоящую температуру в точке планеты, отстоящей от ее центра на  $r = R/2$  (4 балла);
2. Температуру на поверхности планеты ( $T'_s$ ) через 5 млрд лет (5 баллов);
3. Температуру в центре планеты ( $T'_c$ ) через 5 млрд лет (4 баллов).

### Задача № 17. «Миф о плоской Луне»

Сторонники плоской Земли, чтобы удержать в умах необразованных людей свои парадигмы, предложили новый миф – *миф о плоской Луне*. Согласно их описанию, Луна представляет собой цилиндр, диаметр ( $D$ ) которого много больше толщины ( $L$ ), подобно хоккейной шайбе. Эта "шайба" повернута к нам всегда одной стороной. Полагая, что вещество в теле плоской Луны распределено равномерно по всему ее объему, а его плотность равна средней плотности шарообразной Луны (диаметр плоской Луны равен диаметру шарообразной), определите:

1. Толщину "плоской" Луны, если полагать, что силы притяжения, действующие на Землю, со стороны плоской и шарообразной одинаковы. При этом центр Земли находится на оси симметрии тела Луны, на расстоянии, равном большой полуоси лунной орбиты; (4 балла);
2. Массу Луны (2 балла);
3. Ускорение свободного падения у поверхности Луны, вблизи ее геометрического центра (2 балла);
4. Потенциальную энергию гравитационного притяжения Луной пробного тела массы  $\Delta m$ , находящегося на оси симметрии плоской Луны на расстоянии  $r$  от ее центра, в предположении, что на бесконечности эта энергия равна нулю (3 балла);

5. Вторую космическую скорость для КА в гравитационном поле Луны, уходящего от ее геометрического центра на бесконечность, вдоль оси симметрии плоской Луны (3 балла).

**Задача № 18. «Задача о движении двух гравитирующих тел»**

Предположим, что имеется система двух массивных тел со сферически-симметричным распределением вещества, образующих гравитационно связанную устойчивую физическую систему (например, физически двойная звезда). С использованием основных законов механики,

1. Строго докажите, что импульс центра масс данной системы тел является строго сохраняющейся величиной (3 балла);
2. Запишите закон изменения радиуса-вектора ( $\vec{R}_c$ ) центра масс от времени, если в начальный момент его значение было  $\vec{R}_c^{(0)}$ , а вектора скоростей тел –  $\vec{V}_1^{(0)}$ ,  $\vec{V}_2^{(0)}$ , массы данных тел –  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$  (2 балла);
3. Представьте радиуса-векторы ( $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ ) тел в лабораторной системе отсчета (ЛСО), в терминах  $\vec{R}_c$  и вектора  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  (2 балла);
4. Представьте векторы скоростей тел в лабораторной системе отсчета, в терминах скорости центра масс –  $\vec{V}_c$  и вектора  $d\vec{r}/dt = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ , где  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  – текущие значения скорости тел в ЛСО (2 балла);
5. Докажите, что полную энергию системы в ЛСО можно представить в виде двух слагаемых: кинетической энергии центра масс системы + полной механической энергии воображаемой материальной точки ( $\mu$ -точки), масса которой определяется выражением вида:

$$\mu = \frac{\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}. \quad (3)$$

Покажите, что если полная механическая энергия системы является сохраняющейся величиной, то и энергия  $\mu$ -точки сохраняется. (3 балла);

6. Докажите, что полный момент импульса системы в ЛСО можно представить в виде двух слагаемых: момента импульса центра масс системы + момента импульса  $\mu$ -точки. Покажите, что если полный момент импульса системы является сохраняющейся величиной, то и момент импульса  $\mu$ -точки сохраняется. Сделайте вывод о преимуществе такого представления в описании движения. (3 балла).

---

---

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

---

---



## Уровень «Новичок» (уровень А)

### Задача № 1. «Особые астеризмы и их звезды»

**Решение.** К таким астеризмам можно отнести, например,

1. *Летне-осенний треугольник*, который состоит из Веги ( $\alpha$  Лиры), Альтаира ( $\alpha$  Орла), Денеба ( $\alpha$  Лебедя).

2. *Зимний треугольник*, который состоит из Сириуса ( $\alpha$  Большого Пса), Прокциона ( $\alpha$  Малого Пса), Бетельгейзе ( $\alpha$  Ориона).

3. *Весенний треугольник*, который состоит из Арктура ( $\alpha$  Волопаса), Спика ( $\alpha$  Девы), Денеболы ( $\beta$  Льва).

4. *Большой квадрат Пегаса*, который состоит из Маркаба ( $\alpha$  Пегаса), Шеата ( $\beta$  Пегаса), Альгениба ( $\gamma$  Пегаса) и Альфераца ( $\alpha$  Андромеды).

**Ответ:** ( $S_{\max} = 3$  балла).

### Задача № 2. «Суточные параллели и альмукантараты звезд»

**Решение.** Как известно, *суточная параллель* – это малый круг небесной сферы, плоскость которого параллельна плоскости небесного экватора.

*Альмукантарат* – это малый круг небесной сферы, параллельный плоскости математического горизонта.

Если малые круги:

а) параллельны друг другу, то математический горизонт совпадает с небесным экватором, следовательно, ось мира совпадает с отвесной линией, а зенит совпадает с одним из полюсов мира.

Поскольку высота полюса мира равна модулю широты места наблюдения, т.е.  $h_P = |\varphi| = 90^\circ$ ,  $\Rightarrow \varphi = \pm 90^\circ$ . Т.е., данная ситуация имеет место быть на географических полюсах.

б) Если плоскости данных кругов взаимно перпендикулярны, то ось мира напротив должна лежать в плоскости экватора, следовательно высота полюсов мира  $\varphi = 0^\circ$ , т.е. эта ситуация реализуется на географическом экваторе, где  $h_P = 0^\circ$ .

**Ответ:** а)  $\varphi = \pm 90^\circ, h_P = 90^\circ$ , б)  $h_P = 0^\circ, \varphi = 0^\circ$ . ( $S_{\max} = 3$  балла).

### Задача № 3. «Терминатор и фаза планеты»

**Решение.** *Терминатор* – это линия, разделяющая освещенную и неосвещенную части поверхности небесного тела. Если терминатор совпадает с диаметром видимого диска сферического тела, то диск данного тела должен быть освещен ровно на половину. Такая ситуация может быть реализована только лишь в случае Луны и нижних планет: Меркурия и Венеры.

**Ответ:** Луна, Меркурий, Венера. ( $S_{\max} = 3$  балла).

### Задача № 4. «Закон обратных квадратов для гелиоцентрической угловой скорости планеты»

**Решение.** Согласно второму закону Кеплера, *радиус-вектор планеты за*

равные промежутки времени описывает равные площади. Согласно рис. 2 площади эллиптических секторов  $A_1 F_2 A_2$ ,  $B_1 F_2 B_2$ ,  $C_1 F_2 C_2$  равны. Поскольку дуга  $C_1 C_2$  малая, то ее можно заменить прямым отрезком. Следовательно, площадь сектора можно определить как площадь треугольника:

$$S_{\Delta C_1 F_2 C_2} = \frac{1}{2} C_1 F_2 \cdot C_2 F_2 \cdot \sin \angle C_1 F_2 C_2. \quad (4)$$

Заметим далее, что  $C_1 F_2 \approx C_2 F_2 = r_p$ ,  $\angle C_1 F_2 C_2 = \Delta\alpha$  – малый угол, тогда (4) можно переписать в виде:

$$S_{\Delta C_1 F_2 C_2} \approx \frac{1}{2} r_p^2 \Delta\alpha, \quad (5)$$

разделим обе части уравнения на  $\Delta t$  и введем секторную скорость –  $\sigma = S/\Delta t$  – скалярную величину, тогда

$$\sigma = \frac{1}{2} r_p^2 \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{1}{2} r_p^2 \omega_p, \quad (6)$$

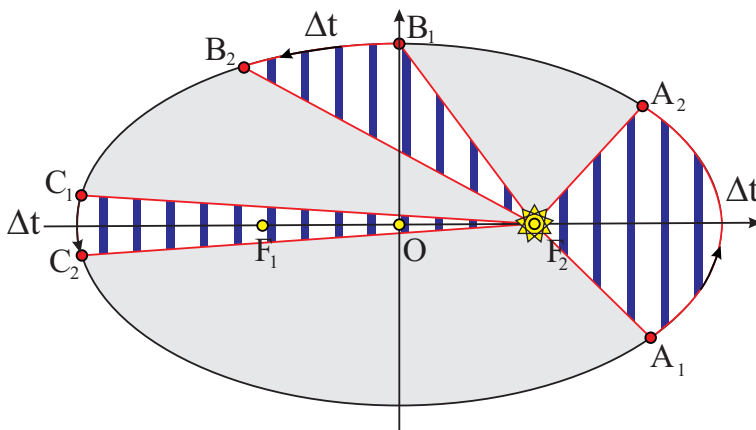


Рис. 2: к определению искомой зависимости.

очевидно,  $\sigma$  – постоянная ве-

личина,  $\omega_p$  – угловая гелиоцентрическая скорость планеты. Из (6) следует, что

$$\omega_p = \frac{2\sigma}{r_p^2}, \Rightarrow \omega_p \sim \frac{1}{r_p^2}, \quad (7)$$

что и требовалось доказать. ( $S_{\max} = 4$  балла).

### Задача № 5. «Сторона света, меридиан и азимут...»

#### Дано:

$\varphi = 55.7^\circ$ ,  
 $t_0 = 110$  с.

#### Найти:

сторона света – ?  
неб. меридиан – ?  
 $A_M$  – ?

#### Решение:

На фотографии (см. рис. 1) предоставлены короткие концентрические треки звезд, которые если дорисовать в полные дуги суточных параллелей, то все они будут иметь наинизшую точку по отношению к горизонту, следовательно все звезды запечатлены вблизи своих нижних кульминаций, следовательно объектив фотоаппарата был направлен (преимущественно) *на север*.

Положение меридиана можно показать, проводя линию через горизонтальные треки звезд, поскольку они ближе прочих к своим нижним кульминациям (см. рис. 3).

Для определения азимута направления, вдоль которого ориентирован водный мостик, определим сначала масштаб фотографии. Для этого измерим длину яркого трека звезды, наиболее близкого к горизонту –  $\ell = 3$  мм (ваши



Рис. 3: к определению положения меридиана и азимута направления.

значения измеренных величин могут отличаться от указанных, при использовании фотографии в ином масштабе!), его полярное расстояние есть  $p = \varphi$ , следовательно, угловая длина трека есть

$$\ell' = \omega_{\oplus} \sin p \Delta t = 22.72' \quad (8)$$

тогда угловой масштаб есть

$$\mu_a = \frac{\ell'}{\ell} = 7.57' / \text{мм}. \quad (9)$$

Определим длину отрезка  $NM = L_m = 60$  мм, тогда искомый азимут есть

$$A_M = 180^\circ + \mu_a L_m \approx 187.6^\circ, \quad (10)$$

здесь учтено, что мостик расположен к востоку от меридиана.

**Ответ:** а) преимущественно на север; б) положение меридиана указано на рис. 3; в)  $A_M = 187.6^\circ$ . ( $\$_{\max} = 5$  балла).

### Задача № 6. «Транзит Нептуна в поле зрения телескопа»

Дано:

$$a_{\Psi} = 30.10 \text{ а.е.},$$

$$i_{\Psi} = 1^\circ 46',$$

$$D_T'' = 1^\circ,$$

$$D_{\Psi}'' = 2''.$$

Решение:

Поскольку угловой диаметр планеты много меньше диаметра поля зрения телескопа, то под временем транзита следует понимать величину:

**Найти:** $\tau_{\min} - ?$  $\tau_{\max} - ?$ 

$$\tau = \frac{D_T''}{\omega_{\text{vis}}} \quad (11)$$

здесь  $\omega_{\text{vis}}$  – угловая скорость суточного движения Нептуна по небосводу, которая может быть представлена в виде:

$$\omega_{\text{vis}} = \omega_{\oplus} \cos \delta_{\Psi}, \quad (12)$$

здесь  $\omega_{\oplus} = 15''/\text{с}$  – угловая скорость суточного вращения Земли,  $\delta_{\Psi}$  – склонение Нептуна. Для определения последней величины рассмотрим рис. 4. Здесь  $S$  – Солнце,  $E$  – Земля,  $N$  – Нептун, расположенный на наибольшем расстоянии от плоскости орбиты Земли (эклиптики). Определим  $\beta_{\Psi}$  – эклиптическую широту Нептуна в предельном положении:

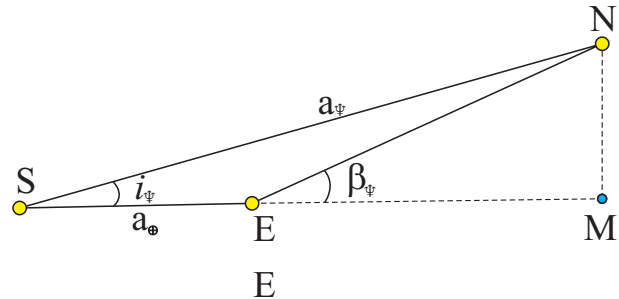


Рис. 4: к определению искомой величины.

$$\operatorname{tg} \beta_{\Psi} = \frac{NM}{EM} = \frac{a_{\Psi} \sin i_{\Psi}}{(a_{\Psi} \cos i_{\Psi} - a_{\oplus})} = \frac{\operatorname{tg} i_{\Psi}}{1 - \frac{a_{\oplus}}{a_{\Psi}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 i_{\Psi}}} = 3.189 \cdot 10^{-2}, \quad (13)$$

откуда  $\beta_{\Psi} = 1^{\circ}50'$ . Т.о., относительно эклиптики Нептун может отклоняться на угол не больший  $\beta_{\Psi}$ . Следовательно, склонение Нептуна может принимать значение из интервала:

$$-(\varepsilon + \beta_{\Psi}) \leq \delta_{\Psi} \leq \varepsilon + \beta_{\Psi} \quad \text{или} \quad -25^{\circ}16' \leq \delta_{\Psi} \leq +25^{\circ}16'. \quad (14)$$

Следовательно минимальное время транзита Нептуна будет достигаться, когда последний находится на экваторе ( $\delta_{\Psi} = 0^{\circ}$ ):

$$\tau_{\min} = \frac{D_T''}{\omega_{\oplus}} = 4^{\text{м}}0^{\text{с}}. \quad (15)$$

Максимальное время транзита будет достигаться в случае  $\delta_{\Psi}^{\max} = \pm 25^{\circ}16'$ .

$$\tau_{\max} = \frac{D_T''}{\omega_{\oplus} \cos \delta_{\Psi}} = 4^{\text{м}}25^{\text{с}}. \quad (16)$$

**Ответ:** к задаче представляется результатами (15) и (16). ( $\$_{\max} = 5$  баллов).

## Уровень «Знатор» (уровень В)

### Задача № 7. «Горизонтальные координаты полярной звезды»

**Дано:** $p_* = 44'$ **Решение:**

Для наблюдателя, находящегося на земном экваторе, полюса мира будут располагаться на математическом гори-

**Найти:** $h_{\min}, h_{\max} - ?$  $A_{\min}, A_{\max} - ?$  $\tau_{vis} - ?$ 

зонте, причем северный полюс мира совпадает с точкой севера, а южный полюс мира – с точкой юга. Следовательно, горизонтальные координаты северного полюса мира есть  $h_{p_N} = 0^\circ$ ,  $A_{p_N} = 180^\circ$ . Поскольку полярное расстояние

Полярной звезды известно и равно  $p_*$ , то ее высота будет заключена в интервале:

$$-p_* \leq h_*^{(0)} \leq p_*, \Rightarrow -44' \leq h_*^{(0)} \leq 44'. \quad (17)$$

Однако, явление рефракции "приподнимает" все светила у горизонта на величину  $\delta z = 35'$ , следовательно, с учетом последнего явления значения высоты звезды заключены в интервале:

$$-p_* + \delta z \leq h_* \leq p_* + \delta z, \Rightarrow -9' \leq h_* \leq 79', \quad (18)$$

а азимут

$$180^\circ - p_* \leq A_* \leq 180^\circ + p_*, \Rightarrow 179^\circ 16' \leq A_* \leq 180^\circ 44'. \quad (19)$$

Если бы не было рефракции света, то продолжительность пребывания Полярной звезды над горизонтом составляло бы  $\tau_{vis}^{(0)} = 12$  часов. Однако, из-за рефракции света в атмосфере Земли Полярная звезда будет видна вплоть до высоты  $h_*^{(0)} = -\delta z = -35'$ .

Рассмотрим рис. 5, соответствующий указанной ситуации. Здесь  $H_1 H_2$  – горизонт,  $A$  и  $B$  точки суточной параллели в которых еще видна звезда, определим угол  $\gamma$  из треугольника  $\Delta A P_N C$ . Очевидно, что

$$\cos \gamma = \frac{P_N C}{P_N A} = \frac{\delta z}{p_*}, \Rightarrow \gamma = 37.3^\circ. \quad (20)$$

Следовательно, угол который соответствует видимой части суточной параллели звезды

$$\Psi = 360^\circ - 2\gamma = 285.4^\circ. \quad (21)$$

Поскольку один оборот Полярная звезда делает по суточной параллели за время  $P_\oplus = 23^h 56^m 4^s = 86164^s$ , то время видимости  $\tau_{vis}$  определим из следующей пропорции:

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow 86164 \text{ с} \\ 285.4^\circ \rightarrow \tau_{vis}, \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{vis} = \left( \frac{285.4^\circ}{360^\circ} \right) 86164 \text{ с} = 68308 \text{ с} = 18^h 58.5^m. \quad (22)$$

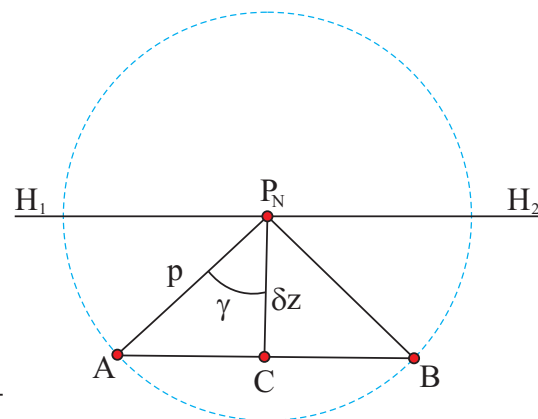


Рис. 5: к определению времени пребывания звезды над горизонтом.

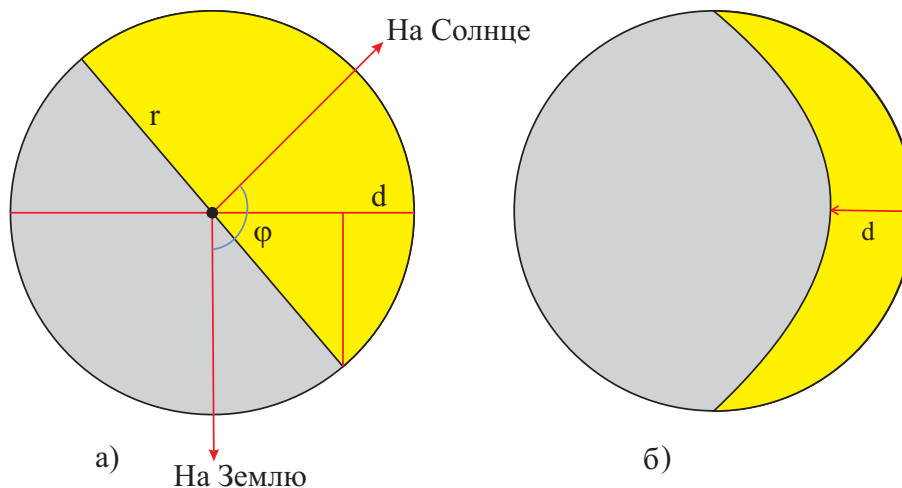


Рис. 6: к определению а) фазы видимого диска планеты, б) фазового угла планеты.

**Ответ:** к задаче представляется выражениями (18), (19), (22). (6 баллов).

### Задача № 8. «Фаза классической планеты»

**Решение.** Согласно определению, *фазой видимого диска планеты* называется скалярная величина, равная отношению площади ( $S_\ell$ ) освещенной части видимого диска планеты, к площади ( $S_{\text{tot}}$ ) всего видимого диска:

$$F = \frac{S_\ell}{S_{\text{tot}}}. \quad (23)$$

Можно показать, что фаза может быть представлена в виде:

$$F = \frac{d}{D} = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi), \quad (24)$$

здесь  $d$  – ширина двуугольника освещенной части видимого диска;  $D$  – его диаметр (см. рис. 6.а);  $\varphi$  – фазовый угол (см. рис. 6.б) – угол между направлением на Солнце и Землю, если смотреть из центра данного тела.

Согласно рис. 7, параметр  $F$ , в случае нижней планеты, принимает минимальное значение в нижнем соединении (НС,  $\varphi = \pi$ ,  $F = 0$ ), а максимальное значение – в верхнем соединении (ВС,  $\varphi = 0$ ,  $F = 1$ ). В случае наибольшей элонгации (ВЭ или ЗЭ)  $\varphi = \pi/2$ , следовательно  $F = 1/2$ , т.е. освещена ровно половина видимого диска.

В случае верхней планеты в соединении (точка С на рис. 7) и в противостоянии (точка П) фаза  $F = 1$ , поскольку  $\varphi = 0$ . Фаза принимает минимальное значение в случае, когда верхняя находится в квадрате (ВК или ЗК), при этом  $\varphi$  достигает максимума (поскольку в этом положении Земля для гипотетического наблюдателя, находящегося в окрестности верхней планеты, находится в наибольшей элонгации), причем  $\cos \varphi_{\text{max}}$  есть

$$\cos \varphi_{\text{max}} = \frac{\sqrt{a_p^2 - a_\oplus^2}}{a_p} = \sqrt{1 - \left(\frac{a_\oplus}{a_p}\right)^2}, \quad (25)$$

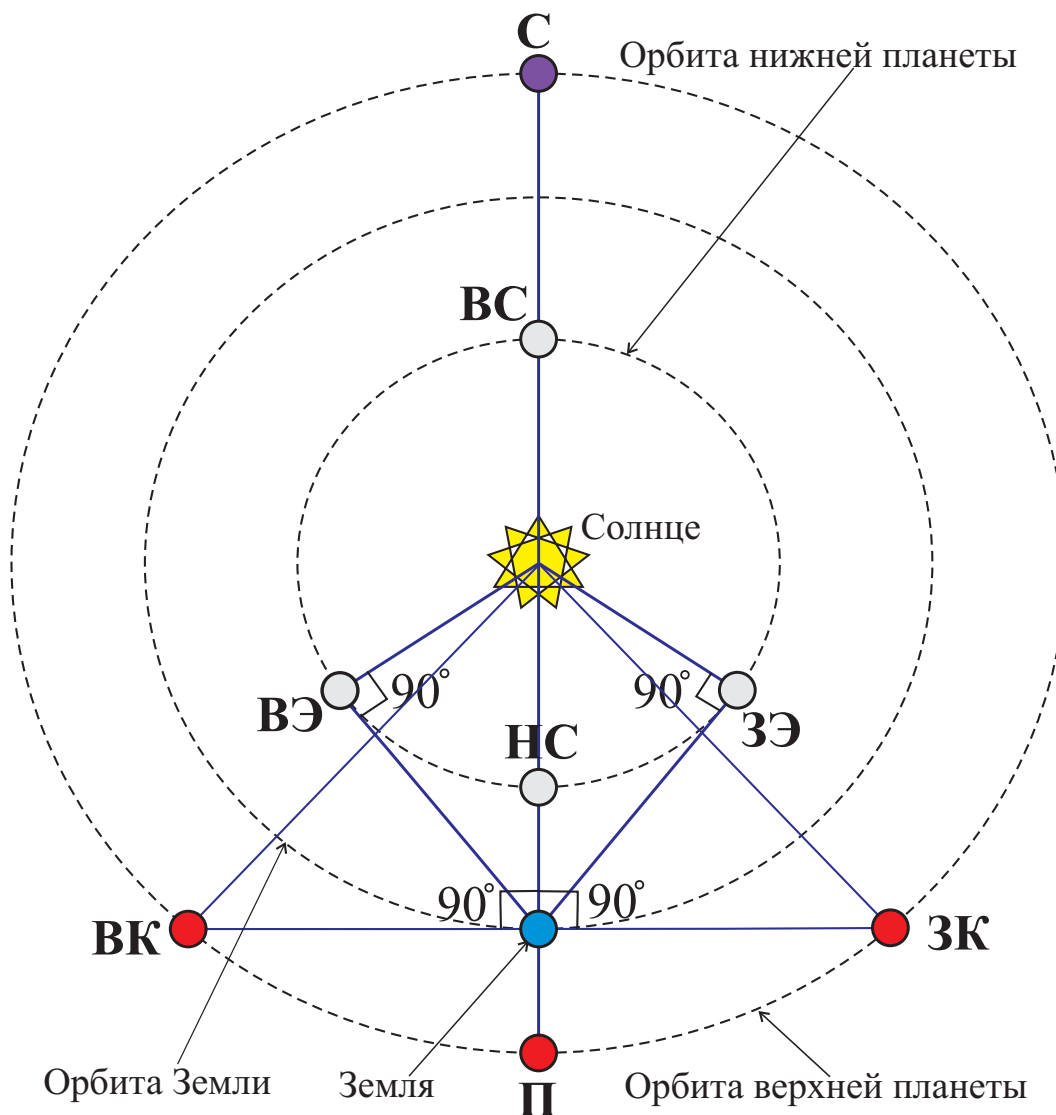


Рис. 7: к определению основных конфигураций нижних (внутренних) и верхних (внешних) планет.

тогда

$$F_{\min} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{a_{\oplus}}{a_p} \right)^2} \right) \quad (26)$$

т.о., области допустимых значений  $F$  для нижних и верхних планет есть

$$\text{ОДЗ для нижних планет: } 0 \leq F \leq 1, \quad (27)$$

$$\text{ОДЗ для верхних планет: } \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{a_{\oplus}}{a_p} \right)^2} \right) \leq F \leq 1. \quad (28)$$

Наиболее ярко выражена некруговая форма видимой части диска, очевидно, у верхней планеты наиболее близко расположенной к Земле, т.е. у Марса ( $a_{\odot} = 1.524$  а.е.), причем  $F_{\min}^{(\odot)} = 0.88$ .

**Ответ:** к задаче представляется интервалами (27) и (28) в случае нижних планет – нижнее и верхнее соединение;  $F = 0.5$ ; в случае верхних планет – соединение, противостояние и квадратура; Марс,  $F_{\min}^{(\odot)} = 0.88$ . (7 баллов).

**Задача № 9. «Рокировка "Луна-Меркурий"»**

**Решение.** Чтобы можно было спутать Меркурий с Луной необходимо, прежде всего, чтобы их угловые размеры оказались равными, например, угловые радиусы, т.е.

$$\rho''_{\zeta} = \rho''_{\sigma}, \Rightarrow \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\Delta_{\zeta}} = \frac{\mathfrak{R}_{\sigma}}{\Delta_{\sigma}}, \Rightarrow \Delta_{\sigma} = \left( \frac{\mathfrak{R}_{\sigma}}{\mathfrak{R}_{\zeta}} \right) \Delta_{\zeta} = 5.397 \cdot 10^5 \text{ км.} \quad (29)$$

Определим звездную величину Меркурия в фазе, аналогичной полнолунию, посредством формулы Погсона:

$$m_{\sigma} - m_{\zeta} = -2.5 \lg \left( \frac{E_{\sigma}}{E_{\zeta}} \right), \Rightarrow m_{\sigma} = m_{\zeta} - 2.5 \lg \left( \frac{E_{\sigma}}{E_{\zeta}} \right), \quad (30)$$

здесь  $m_{\zeta} = -12.7^m$  – звездная величина Луны в полнолуние,  $E_{\zeta}$  – соответствующая данной величине освещенность,  $E_{\sigma}$  – освещенность создаваемая Меркурием у поверхности Земли, на указанном расстоянии  $\Delta_{\sigma}$ . Определим  $E_{\zeta}$ . Заметим, что  $\Delta_{\sigma}, \Delta_{\zeta} \ll a_{\oplus}$  – большой полуоси земной орбиты, следовательно можно полагать, что Луна и Меркурий находятся на одном и том же расстоянии от Солнца, что и Земля. Освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности данных тел:

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2}, \quad (31)$$

где  $L_{\odot}$  – светимость Солнца. На Луну падает поток

$$\Phi_0 = E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_{\zeta}^2. \quad (32)$$

Поток, отраженный Луной назад, в фазе полнолуния, есть

$$\Phi_{\text{ref}} = A_{\zeta} \Phi_0. \quad (33)$$

Данный поток рассеивается в полусферу, тогда освещенность, создаваемая Луной у поверхности Земли, есть

$$E_{\zeta} = \frac{\Phi_{\text{ref}}}{2\pi \Delta_{\zeta}^2} = \frac{A_{\zeta} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 L_{\odot}}{8\pi a_{\oplus}^2 \Delta_{\zeta}^2} = A_{\zeta} \frac{L_{\odot}}{8\pi a_{\oplus}^2} \rho''_{\zeta}{}^2. \quad (34)$$

Аналогично рассуждая, можно записать освещенность, создаваемую Меркурием у поверхности Земли:

$$E_{\sigma} = \frac{A_{\sigma} \mathfrak{R}_{\sigma}^2 L_{\odot}}{8\pi a_{\oplus}^2 \Delta_{\sigma}^2} = A_{\sigma} \frac{L_{\odot}}{8\pi a_{\oplus}^2} \rho''_{\sigma}{}^2. \quad (35)$$

С учетом (34) и (36), выражение (30) можно переписать в виде:

$$m_{\sigma} = m_{\zeta} - 2.5 \lg \left[ \frac{A_{\sigma}}{A_{\zeta}} \left( \frac{\rho''_{\sigma}}{\rho''_{\zeta}} \right)^2 \right] = m_{\zeta} - 2.5 \lg \left[ \frac{A_{\sigma}}{A_{\zeta}} \right] = -12.5^m. \quad (36)$$

**Ответ:**  $\Delta_{\sigma} = 5.396 \cdot 10^5$  км;  $m_{\sigma} = -12.5^m$ . (8 баллов).

**Задача № 10.** «Массовые потери водяного льда транснептунового объекта»

**Решение.** Рассмотрим рис. 8, соответствующий условию задачи. Пусть в фокусе  $F_2$  находится Солнце, тогда уравнение эллипса в полярных координатах можно записать в виде:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (37)$$

где  $p$ ,  $\varepsilon$  – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты соответственно;  $\varphi$  – полярный угол, отсчитываемый от перигелия (П) орбиты. Очевидно, в точках  $B$ ,  $C$ ,  $\varphi = \pi/2$ , и  $r = p$ . Следовательно, на участке ВПС транснептуновый объект теряет массу льда  $m_0$ . Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  с поверхности объекта сублимирует масса льда  $\Delta m$  причем

$$\Delta m = \frac{\Delta Q}{L} = \frac{A E_{\odot} S \Delta t}{L}, \quad (38)$$

где  $A$ ,  $S$  – альбедо и площадь поперечного сечения объекта соответственно,  $E_{\odot}$  – освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности тела. Как известно, освещенность подчиняется закону обратных квадратов

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}. \quad (39)$$

Промежуток  $\Delta t$  можно записать как

$$\Delta t = \frac{\Delta \varphi}{\omega} = \frac{\Delta \varphi}{2\sigma} r^2, \quad (40)$$

в последнем выражении  $\omega$  – угловая гелиоцентрическая скорость объекта, которая также подчиняется закону обратных квадратов (7) (см. задачу №4 настоящего релиза);  $\Delta \varphi$  – изменение полярного угла объекта за время  $\Delta t$  в (40). С учетом (7) и (40) выражение (38) можно переписать так:

$$\Delta m = \frac{A}{L} \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \frac{\Delta \varphi}{2\sigma} r^2 S = \frac{A}{L} \frac{L_{\odot} S}{8\pi \sigma} \Delta \varphi. \quad (41)$$

Просуммируем по всем изменениям полярного угла при переходе объекта из точки  $C$  в точку  $B$ . Очевидно, что  $\Delta \varphi = \pi$ , тогда

$$m_0 = \frac{A}{L} \frac{L_{\odot} S}{8\pi \sigma} \pi. \quad (42)$$

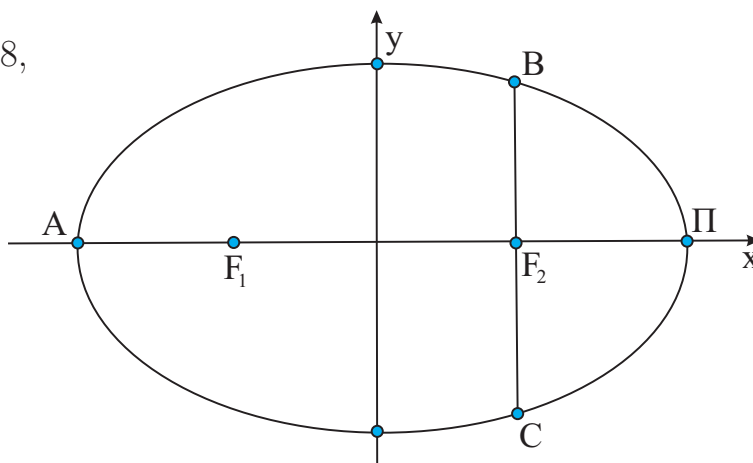


Рис. 8: к определению искомой величины.

При переходе из точки  $B$  в точку  $C$  по большой дуге эллипса, получаем аналогичный результат, поскольку по прежнему  $\Delta\varphi = \pi$ , следовательно  $m = m_0$ .

**Ответ:**  $m = m_0$ . (8 баллов).

### Задача № 11. «Правило "600" в астрофотографии»

**Решение.** Каждый пиксель матрицы представляет квадратную ячейку с размерами  $\ell \times \ell$ . Величину  $\ell$  легко определить, зная размеры матрицы  $a \times b$  и количество  $N$  пикселей, ее составляющих:

$$\ell = \sqrt{\frac{a \times b}{N}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{a_0 \times b_0}{N}} \quad (43)$$

здесь  $a_0 \times b_0$  – размеры полнокадровой матрицы,  $k$  – кроп-фактор, связывающий размеры матрицы данного фотоаппарата с размерами  $a_0, b_0$  в виде:

$$k = \frac{a_0}{a} = \frac{b_0}{b}. \quad (44)$$

Согласно **теореме Котельникова**, для формирования полноценного образа звезды необходимо использовать, как минимум, три пикселя. Следовательно, пока луч от звезды перемещается по указанным пикселям (см. рис. 9), образ звезды будет отчетливым шариком. Шарообразность звезды не будет нарушена, если луч пройдет не более 3.5 пикселя. В этом случае 4-ый пиксель не работает. Тогда

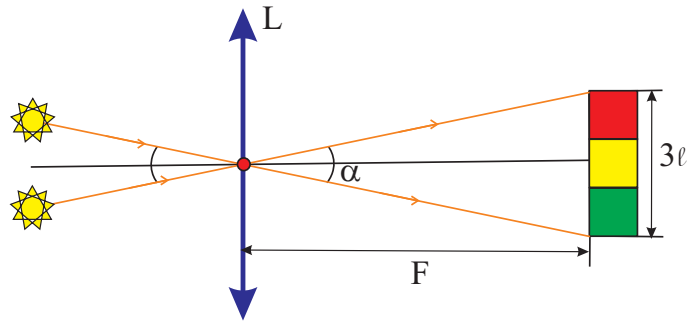


Рис. 9: к определению искомой величины.

$$\Delta\varphi = \frac{3.5\ell}{F} = \omega_{\text{vis}} \tau_{\text{max}}, \Rightarrow \tau_{\text{max}} = \frac{3.5\ell}{\omega_{\text{vis}} F} = \frac{3.5\sqrt{a_0 \times b_0}}{\omega_{\text{vis}}} \frac{1}{k F \sqrt{N}}, \quad (45)$$

где  $a_0=36$  мм,  $b_0=24$  мм – размеры полнокадровой матрицы,  $F$  – фокусное расстояние объектива;  $\omega_{\text{vis}}$  – угловая скорость видимого движения звезды, которую можно представить так

$$\omega_{\text{vis}} = \omega_{\oplus} \cos \delta, \quad (46)$$

здесь  $\omega_{\oplus} = 15''/\text{с}$  – угловая скорость суточного вращения Земли. В результате  $\tau_{\text{max}}$  можно представить в виде:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3.5\sqrt{36 \times 24\text{мм}}}{15''/\text{с} \cos \delta} \frac{206265''/\text{рад}}{k F \sqrt{N}} = \frac{1.4108 \cdot 10^6 \text{ с}}{\cos \delta} \frac{1}{k F \sqrt{N}}, \quad (47)$$

здесь и далее  $F$  выражено в мм.

Для звезд с разным склонением мы получаем разное значение  $\cos \delta$ . Поскольку  $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $0 \leq \cos \delta \leq 1$ , тогда усредним полученное значение:

$$\langle \cos \delta \rangle = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \delta \, d\delta = \frac{2}{\pi}.$$

Тогда

$$\bar{\tau}_{\max} = \frac{2.216 \cdot 10^6 \text{ с}}{k F \sqrt{N}}. \quad (48)$$

Одной из первых полнокадровых камер, получивших мировую популярность была Canon Mark I с  $N=12.8$  мегапикселей (Мп), ставшая эталоном для сравнения с другими камерами. Для нее формулу можно переписать так

$$\bar{\tau}_{\max} = \frac{619 \text{ с}}{F} \approx \frac{600 \text{ с}}{F}. \quad (49)$$

Для Canon Mark II с  $N=21.1$  Мп. Данную формулу можно записать так

$$\bar{\tau}_{\max} = \frac{483 \text{ с}}{F} \approx \frac{500 \text{ с}}{F}. \quad (50)$$

Для камер, подобных данной уже работает правило "500". Наиболее общей формулой следует считать формулу (47). Построим для камер, представленных в таблице 1, формулы, подобные (47).

**1. Для Panasonic FZ28:**

$$\tau_{\max} = \frac{78.29 \text{ с}}{\cos \delta F}. \quad (51)$$

В случае экваториальной звезды ( $\delta = 0$ ),  $\tau_{\max} = 0.91 \div 16.3 \text{ с}$ .

**2. Для Panasonic FZ82:**

$$\tau_{\max} = \frac{59.01 \text{ с}}{\cos \delta F}. \quad (52)$$

При данных значениях  $F$  для экваториальной звезды ( $\delta = 0$ ) имеем  $\tau_{\max} = 0.27 \div 16.5 \text{ с}$ .

**3-4. Для Canon 100D и Canon 600D:**

$$\tau_{\max} = \frac{207.83 \text{ с}}{\cos \delta F}. \quad (53)$$

Для данных значений фокусных расстояний объектов получаем  $\tau_{\max}^{100D} = 4.2 \text{ с}$  и  $\tau_{\max}^{600D} = 5.9 \text{ с}$ , в случае экваториальной звезды.

**5. Для Canon 70 D:**

$$\tau_{\max} = \frac{196.19 \text{ с}}{\cos \delta F}, \quad (54)$$

при  $F=85 \text{ мм}$ , для экваториальной звезды, имеем  $\tau_{\max} = 2.3 \text{ с}$ .

## 5. Для Canon 5D Mark IV:

$$\tau_{\max} = \frac{255.88 \text{ с}}{\cos \delta F}. \quad (55)$$

При данном  $F=135$  мм получаем, в случае экваториальной звезды,  $\tau_{\max} = 1.9$  с.

**Ответ:** к задаче представлен выражениями (47), (51)- (55). (9 баллов).

**Задача № 12. «Разрешающая способность системы "объектив+ПЗС-матрица" в астрофотографии»**

**Решение.** Разрешающая способность составной оптической системы "объектив-ПЗС-матрица" определяется худшей разрешающей способностью этих двух составляющих системы.

Согласно, критерию Релея разрешающую способность объектива можно представить как

$$\beta_{об} = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (56)$$

здесь  $\lambda$  – длина волны, на которой ведутся наблюдения,  $D$  – диаметр диаграммы объектива используемой при съемке. Поскольку

$$\chi = \frac{D}{F}, \Rightarrow D = \chi F, \quad (57)$$

где  $F$  – фокусное расстояние объектива. Следовательно, разрешающую способность объектива можно записать так

$$\beta_{об} = 1.22 \frac{\lambda}{\chi F} = 1.22 \lambda \left( \frac{\chi^{-1}}{F} \right). \quad (58)$$

Выполнили расчет искомой величины для объективов, представленных в таблице 1, в случае  $\lambda=430$  нм – длины волны, к которой наиболее чувствительна ПЗС-матрица. Результаты расчетов представлены в таблице 3.

| Модель                            | $\beta_{об}$ | $\beta_M$ | $\beta_c$ |
|-----------------------------------|--------------|-----------|-----------|
| Panasonic FZ28                    | 3.5"         | 15.5"     | 15.5"     |
| Panasonic FZ82                    | 1.4"         | 4.7"      | 4.7"      |
| Canon 100D + Canon 50mm           | 3.9"         | 71.4"     | 71.4"     |
| Canon 600D + Yongnuo 35mm         | 6.2"         | 102.0"    | 102.0"    |
| Canon 70D + SamYang 85mm          | 1.8"         | 39.7"     | 39.7"     |
| Canon 5D Mark IV + SamYang 135 mm | 1.6"         | 32.5"     | 32.5"     |

Таблица 3: некоторые модели фотоаппаратов и их характеристики.

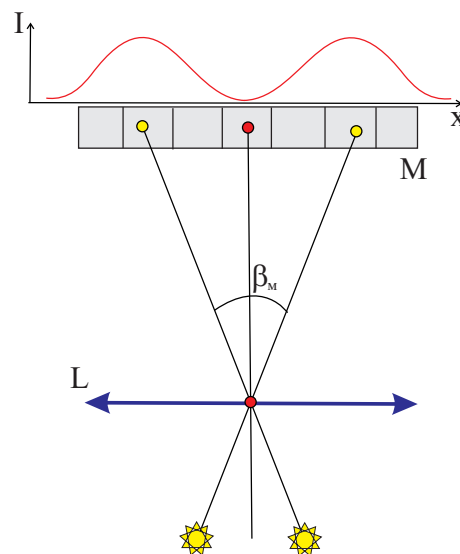


Рис. 10: к определению искомой величины.

Определим разрешающую способность ПЗС – матрицы ( $\beta_m$ , см. рис. 10). Для этого построим, приблизительно, профиль распределения интенсивности света для двойной звезды, формирующегося на ПЗС-матрице. Очевидно, что центры изображений (кружков) звезд должны быть расположены на  $4\ell$  друг от друга (здесь  $\ell$  – размер пикселя). Поскольку картина формируется в фокальной плоскости, то разрешающую способность  $\beta_m$  можно записать так

$$\beta_m = \frac{4\ell}{F} = 4\sqrt{a_0 \times b_0} \frac{1}{k F \sqrt{N}}. \quad (59)$$

Выполним численные расчеты  $\beta_m$  для фотоаппаратов, представленных в таблице 1 (см. результаты в таблице 3). Из сопоставления  $\beta_{об}$  и  $\beta_m$  очевидно, что  $\beta_m$  всегда больше  $\beta_{об}$ , следовательно именно  $\beta_m$  определяет итоговую разрешающую способность системы  $\beta_c$ .

**Ответ:** к задаче представлен формулами (58), (59) и численными значениями таблицы 3. ( $S_{max} = 10$  баллов).

## Уровень «Профи» (уровень С)

**Задача № 13.** «Какой объектив для съемки DeepSky-объектов лучше?»

**Решение.** В случае съемки с неподвижного штатива, определим максимально возможную энергию, которую можно собрать от DeepSky-объектов (без смазывания кадра):

$$W_{max} = E S \tau_{max}, \quad (60)$$

здесь  $E$  – освещенность, создаваемая данным DeepSky-объектом у поверхности Земли,  $S = \pi D^2/4$  – площадь поверхности объектива диаметром  $D$  и определяемым по формуле (57) предыдущей задачи;  $\tau_{max}$  – максимально допустимое время выдержки диафрагмы, при котором еще не возникает смаз образа, обусловленный суточным вращением Земли и определяемый формулой (47) задачи № 11 настоящего релиза.

В итоге (60) можно переписать так

$$W_{max} = E \frac{\pi (\chi F)^2}{4} \frac{1.4108 \cdot 10^6 \text{ с}}{\cos \delta} \frac{1}{k F \sqrt{N}}. \quad (61)$$

Для данного DeepSky-объекта, очевидно, освещенность  $E$ , создаваемая им, и его склонение  $\delta$  являются неизменными величинами; также постоянными величинами являются кроп-фактор  $k$  и количество  $N$  пикселей матрицы.

Следовательно,  $W_{max}$  можно представить так

$$W_{max} = A \chi^2 F = A \frac{F}{(\chi^{-1})^2}, \text{ где } A = \frac{\pi E}{4 k} \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1.4108 \cdot 10^6 \text{ с}}{\cos \delta}. \quad (62)$$

| № | Модель            | $F/(\chi^{-1})^2$ , мм | №  | Модель              | $F/(\chi^{-1})^2$ , мм |
|---|-------------------|------------------------|----|---------------------|------------------------|
| 1 | Canon 50mm STM    | 15.43                  | 6  | Canon 85mm II L USM | 59.03                  |
| 2 | Canon 40mm STM    | 5.10                   | 7  | Canon 18-55mm STM   | $1.47 \div 1.75$       |
| 3 | Canon 24mm STM    | 3.06                   | 8  | SamYang 85mm        | 43.37                  |
| 4 | SamYang 14mm      | 1.79                   | 9  | SamYang 135mm       | 33.75                  |
| 5 | Canon EF 85mm USM | 26.23                  | 10 | Sigma 70-300mm APO  | $4.38 \div 9.57$       |

Таблица 4: численные результаты для рассматриваемых объективов.

Очевидно, что чем больше  $F$  и при этом меньше  $\chi^{-1}$ , тем больше значение  $W_{\max}$ .

В таблице 4 представлены вычисленные значения  $F/(\chi^{-1})^2$  для данных объектов. Очевидно, что наилучшим для данного вида съемки DeepSky-объектов являются Canon 85 mm II LUSM (59.03) и SamYang 85 mm (43.37), SamYang 135 mm (33.75), поскольку они характеризуются наибольшими значениями отношения  $F/(\chi^{-1})^2$ .

Если использовать звездный трекер с фотоаппаратом, то это позволит существенно увеличить время выдержки диафрагмы, величина которого определяется, главным образом, точностью наведения главной оси трекера на полюс мира. В данном случае, согласно (60),  $W_{\max}$  определяется лишь диаметром диафрагмы объектива ( $W_{\max} \sim D^2$ ), т.е. чем больше  $D$ , тем больше  $W_{\max}$ . Из всех представленных объективов наибольшим  $D$  на полностью открытой диафрагме обладает Canon 85 mm II LUSM ( $D = \chi F = 70.8$  мм), за ним следует SamYang 135 mm ( $D = \chi F = 67.5$  мм) и SamYang 85 mm ( $D = 60.7$  мм).

**Ответ:** а) объективы с № 6, 8, 9; б) объективы с № 6, 9, 8. ( $S_{\max} = 11$  баллов).

#### Задача № 14. «Выбор бюджетного рефлектора со сферическим зеркалом»

**Решение.** Рассмотрим луч, идущий вдоль оптической оси на расстоянии  $h$  от последней (см. рис. 11). Этот луч, отразившись от зеркала, пересечет оптическую ось на расстоянии  $x$  от центра кривизны. Пусть угол отражения равен  $\alpha$ . Тогда с учетом закона отражения светового луча, из треугольника  $\triangle OAB$  следует, что

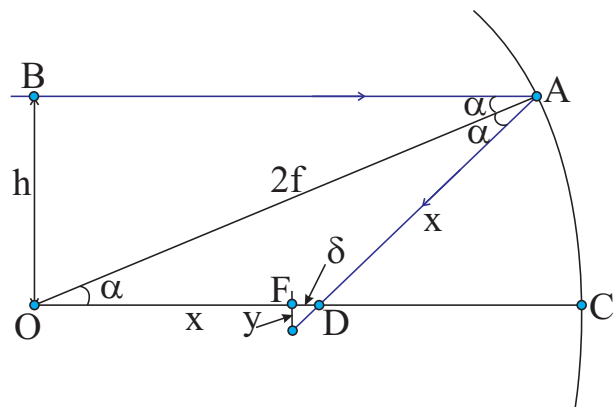


Рис. 11: к определению искомой величины.

$$\sin \alpha = \frac{h}{2f}. \quad (63)$$

Отметим, что угол  $\angle AOC$  между оптической осью зеркала и радиусом, проведенным в точку падения луча, также равен  $\alpha$ . Воспользуемся теоремой

синусов для  $\triangle OAD$ :

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{2f}{\sin(\pi - 2\alpha)}; \quad x = 2f \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{f}{\cos \alpha} = f \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

Из последнего результата очевидно, что чем дальше от оптической оси шел луч до отражения, тем дальше от фокуса он пересечет оптическую ось после отражения и, следовательно, тем дальше от оптической оси попадет на фокальную плоскость. Расстояние от точки пересечения оптической оси до фокуса составит

$$\delta = x - f = f \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - 1 \right) \approx f \frac{\sin^2 \alpha}{2} = \frac{h^2}{8f}. \quad (64)$$

Полученная величина называется *продольной сферической абберацией*. Продолжая свой путь, луч пересечет фокальную плоскость на расстоянии  $y$  от оптической оси. Поскольку  $\delta$  и  $y$  – стороны прямоугольного треугольника, то

$$y = \delta \operatorname{tg} 2\alpha = f \frac{\sin^2 \alpha}{2} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = f \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} \approx f \sin^3 \alpha = \frac{h^3}{8f^2}. \quad (65)$$

При записи последнего выражения, учтено, что угол  $\alpha$  является малым (в случае параксиальных лучей). Самое большое отклонение притерпит луч, попадающий на край зеркала, т.е. при  $h = D/2$  (где  $D$  – диаметр зеркала):

$$y_{\max} = f \sin^3 \alpha_{\max} = \frac{D^3}{64f^2}. \quad (66)$$

Эта величина называется *радиусом кружка поперечной сферической абберации*.

В тоже время, точечный источник, из-за дифракции света, будет виден в виде кружка (кружка Эйри) с угловым радиусом  $\beta = 1.22 \lambda / D$ . Таким образом, в фокальной плоскости получится кружок размером

$$r_d = f \beta = 1.22 \lambda \left( \frac{f}{D} \right). \quad (67)$$

Согласно условию задачи, радиус кружка сферической абберации должен быть не более  $1.8 r_d$ , т.е.

$$y_{\max} \leq 1.8 r_d, \Rightarrow \frac{D^3}{64f^2} \leq 1.8 \cdot 1.22 \lambda \left( \frac{f}{D} \right), \Rightarrow D \leq \sqrt[4]{140.544 f^3 \lambda}. \quad (68)$$

В случае  $F = 0.9$  м, при  $\lambda = 555$  нм имеем

$$D \leq 0.09 \text{ м} = 90 \text{ мм}.$$

Наиболее близки к данному ограничению (но все же имеют чуть больший диаметр сферического зеркала) такие модели как Sky-Watcher BK 1149EQ2, Synta BK 1149EQ1, Veber PolarStar 900/114 EQ.

**Ответ:** к задаче представляется выражениями (66), (68); Sky-Watcher BK 1149EQ2, Synta BK 1149EQ1, Veber PolarStar 900/114 EQ. ( $\$_{\max} = 12$  баллов).

### Задача № 15. «Плоская Земля и ее толщина»

**Дано:**

$$\rho_{\text{ш}} = \rho_c.$$

**Найти:**

$$L = ?$$

**Решение:**

Определим, прежде всего, плотность и ускорение свободного падения в случае шарообразной Земли:

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_{\oplus}^3} = 5.52 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad g_{\text{ш}} = \frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}^2} = 9.81 \text{ м/с}^2. \quad (69)$$

Рассмотрим безграничный однородный слой толщины  $L$  (см. рис. 12). Выберем декартову систему координат так, как показано на рисунке. Начало отсчета системы (точка  $O$ ) лежит в плоскости симметрии данного слоя. Запишем теорему Гаусса для гравитационного поля в интегральной форме: *поток вектора напряженности гравитационного поля через замкнутую поверхность равен произведению  $-4\pi$  на гравитационную постоянную  $G$  и полную массу вещества  $\mathfrak{M}_{\text{tot}}$ , находящуюся внутри замкнутой поверхности:*

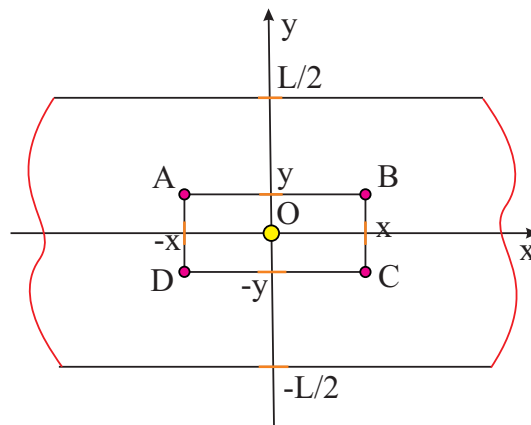


Рис. 12: к определению толщины безграничного слоя.

$$\oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = -4\pi G \mathfrak{M}_{\text{tot}}, \quad (70)$$

здесь  $\vec{E}$  – **напряженность гравитационного поля** – векторная физическая величина, являющаяся количественной характеристикой действия данного гравитационного поля (посредством силы  $\vec{F}_{\text{at}}$ ) на пробное тело массы  $m$ , помещенное в него:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{at}}}{m}. \quad (71)$$

Значок « $\oint_S$ » в (70) означает интегрирование по замкнутой поверхности,  $\vec{n}$  – единичный вектор – нормаль к элементарной площадке  $dS$  замкнутой поверхности.

Как известно, вектор  $\vec{E}$  всегда направлен по касательной к силовой линии гравитационного поля. В силу зеркальной симметрии распределения вещества в бесконечном слое, вектор  $\vec{E}$  также должен обладать зеркальной сим-

метрией в пространстве. Очевидно, что силовые линии должны быть перпендикулярны слою, а следовательно, вектор  $\vec{E}$  должен быть противоположно направлен по отношению к внешней нормали слоя и  $(\vec{E} \cdot \vec{n}) = -|\vec{E}| = -E$ .

В качестве замкнутой поверхности выберем параллелепипед ABCD длины  $2x$ , высоты  $2y$  и ширины  $2z$  (не показано на рис. 12). Следовательно, поток вектора через замкнутую поверхность можно представить в виде суммы потоков поля через боковую поверхность и основания параллелепипеда:

$$\oint (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 2 \int_{S_{\text{осн}}} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS + \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS. \quad (72)$$

Очевидно, что последний интеграл в (72) будет равен нулю, поскольку нормаль боковой поверхности перпендикулярна вектору  $\vec{E}$  и, следовательно  $(\vec{E} \cdot \vec{n}) = 0$ . В случае оснований:  $\vec{E} \updownarrow \vec{n}, \Rightarrow (\vec{E} \cdot \vec{n}) = -E$ . Поскольку точки оснований параллелепипеда равноудалены от плоскости симметрии слоя, следовательно, и поле  $E$  во всех этих точках будет одно и то же, тогда

$$2 \int_{S_{\text{осн}}} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = -2 E \int_{S_{\text{осн}}} dS = -2 E S_{\text{осн}}. \quad (73)$$

Определим массу параллелепипеда

$$\mathfrak{M}_{\text{tot}} = \rho_c S_{\text{осн}} 2y. \quad (74)$$

С учетом (72)-(74), уравнение (70) можно переписать в виде

$$-2 E S_{\text{осн}} = -4\pi G \rho_c S_{\text{осн}} 2y, \Rightarrow E = 4\pi G \rho_c y. \quad (75)$$

Последний результат определяет зависимость напряженности гравитационного поля внутри безграничного слоя от расстояния до плоскости его симметрии. Для поверхности слоя  $y = L/2$ ,  $E$  представляется в виде:

$$E = 4\pi G \rho_c \frac{L}{2}. \quad (76)$$

С другой стороны, в отсутствии вращения Земли, напряженность гравитационного поля равна ускорению свободного падения  $E = g_c = g_{\text{ш}}$ , тогда

$$2\pi G \frac{3 \mathfrak{M}_{\oplus}}{4\pi \mathfrak{R}_{\oplus}^3} L = \frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}^2}, \Rightarrow L = \frac{2}{3} \mathfrak{R}_{\oplus} = 4247 \text{ км}. \quad (77)$$

**Ответ:**  $L = \frac{2}{3} \mathfrak{R}_{\oplus} = 4247 \text{ км}$ . ( $\$_{\text{max}} = 13$  баллов).

#### Задача № 16. «Природа планеты- "бродяги"»

**Решение.** 1. Рассмотрим тепловой поток внутри планеты через сферу радиусом  $r < R$  (см. рис. 13):

$$\left( \frac{\Delta Q}{\Delta \tau} \right)_r = \kappa 4\pi r^2 \left| \frac{\Delta T}{\Delta r} \right|, \quad (78)$$

где  $\kappa$  – коэффициент, характеризующий теплопроводимость планеты. Поскольку охлаждение планеты происходит очень медленно, будем считать, что в каждый момент времени любой малой объем планеты находится в состоянии теплового равновесия.

Тогда через нашу сферу, в единицу времени проходит такое количество энергии, которое выделяется внутри нее, а через поверхность планеты – внутри всей планеты:

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}\right)_R = 4\pi R^2 \sigma T_s^4, \quad (79)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана. Поскольку радиоактивные элементы распределены равномерно по всему объему планеты, то

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}\right)_r = \frac{r^3}{R^3} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}\right)_R = \frac{r^3}{R^3} 4\pi R^2 \sigma T_s^4 = \kappa 4\pi r^2 \left|\frac{\Delta T}{\Delta r}\right|.$$

Из последнего равенства следует

$$\left|\frac{\Delta T}{\Delta r}\right| = \frac{\sigma}{\kappa} \frac{T_s^4}{R}, \Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta r} = -\frac{\sigma}{\kappa} \frac{T_s^4}{R} r. \quad (80)$$

Далее одним из двух альтернативных методов (либо непосредственным интегрированием дифференциального аналога уравнения (80) или методом малых приращений для линейной функции) можно получить уравнение вида:

$$T(r) - T_s = \frac{\sigma T_s^4}{2\kappa R} (R^2 - r^2). \quad (81)$$

Поскольку  $T(0) = T_c$ , последнее выражение можно привести к виду:

$$\frac{T(r) - T_s}{T_c - T_s} = \frac{R^2 - r^2}{R^2}, \Rightarrow T(r) = T_s + (T_c - T_s) \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]. \quad (82)$$

Из последнего результата вытекает:

$$T(R/2) = \frac{3}{4}T_c + \frac{1}{4}T_s \approx 7.5 \cdot 10^3 \text{ K}. \quad (83)$$

2. За время  $t_0 = 5 \cdot 10^9$  лет количество радиоактивных ядер уменьшится в

$$k = \frac{N_0}{N(t_0)} = 2^{(t_0/\tau_{1/2})} = 10070 \approx 10^4 \text{ раз}. \quad (84)$$

Это означает, что количество источников энергии и, следовательно, выделяемая ими энергия также уменьшится в  $k$  раз. Вся эта энергия излучается с

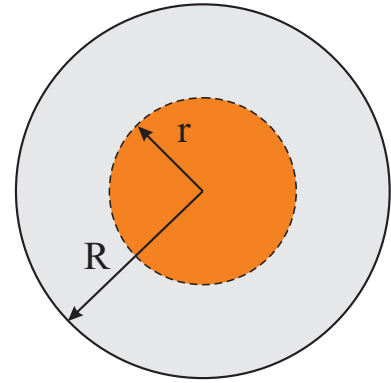


Рис. 13: к определению искомых величин.

поверхности планеты и, так как мощность излучения пропорциональна  $T^4$ , температура поверхности за 5 млрд. лет уменьшится в 10 раз, т.е.  $T'_s = 3$  К.

3. Найдем температуру в центре планеты через  $t_0 = 5 \cdot 10^9$  лет. Очевидно, при  $r = 0$  из выражения (81) получаем:

$$(T_c - T_s) = \frac{\sigma R}{2\kappa} T_s^4, \quad (T'_c - T'_s) = \frac{\sigma R}{2\kappa} T_s'^4, \Rightarrow$$

$$\frac{T'_c - T'_s}{T_c - T_s} = \left(\frac{T'_s}{T_s}\right)^4 = \frac{1}{k}, \Rightarrow T'_c = T'_s + \frac{1}{k}(T_c - T_s) \approx 4 \text{ К.} \quad (85)$$

Т.о., за время  $t_0$  в теле планеты фактически установится глобальное тепловое равновесие с окружающей межзвездной средой (температура последней составляет  $\approx 2.7$  К).

**Ответ:** к задаче представляется выражениями (83), (85);  $T'_s = 3$  К.

### Задача № 17. «Миф о плоской Луне»

**Решение. 1.** Поскольку толщина "шайбы" тела Луны много меньше ее диаметра, то для расчета ее силы притяжения будем моделировать данное небесное тело тонким диском диаметра  $D$  и поверхностной массовой плотностью  $\sigma$  вещества. Мысленно разобьем весь диск на тонкие кольца (см. рис. 14.а) и решим **вспомогательную задачу**: определим силу притяжения, создаваемую тонким кольцом массы  $\mathfrak{M}$  и радиуса  $R$  на пробное точечное тело массы  $m$  (см. рис. 14.б), находящееся на оси симметрии кольца, на расстоянии  $x$  от его центра. Разобьем кольцо на малые элементы массы  $\Delta m$  и рассмотрим два диаметрально противоположных элемента. Их силы притяжения, действующие на пробное тело есть

$$\vec{F}_1 = \frac{G \Delta m m}{r_1^3} \vec{r}_1, \quad \vec{F}_2 = \frac{G \Delta m m}{r_2^3} \vec{r}_2. \quad (86)$$

Очевидно, что результирующая этих сил есть

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

а ее проекция на ось  $OX$  есть

$$F_{\text{рез}x} = -\frac{2 G \Delta m m}{r^2} \cos \alpha, \quad (87)$$

здесь учтено, что  $r_1 = r_2 = r$  (в силу аксиальной симметрии системы) и  $F_1 = F_2 = \frac{G \Delta m m}{r^2}$ . Из  $\triangle ABC$  следует, что

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}, \quad r = \sqrt{R^2 + x^2}. \quad (88)$$

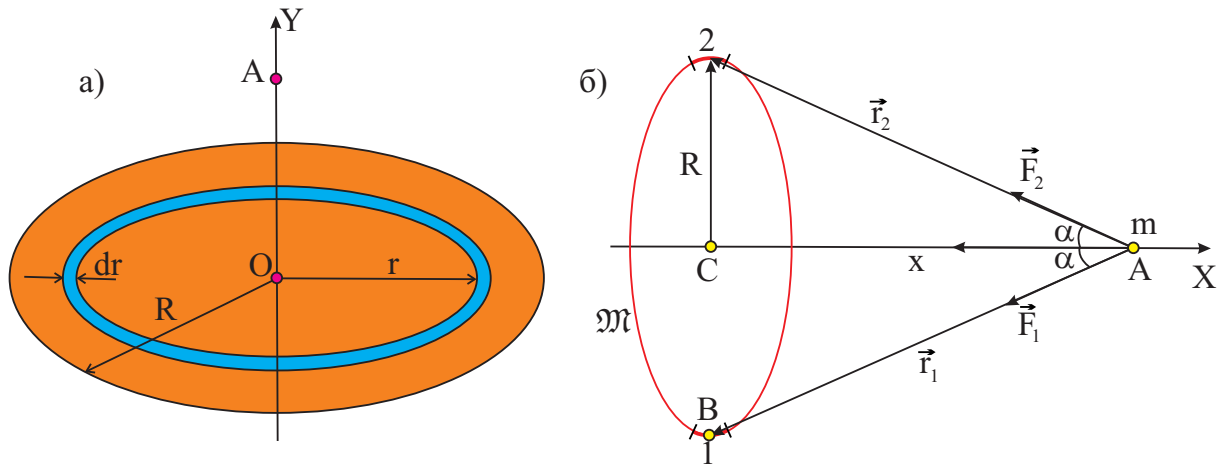


Рис. 14: к определению силы притяжения пробного тела а) тонким диском, б) тонким кольцом.

Следовательно

$$F_{\text{рез } x} = -\frac{2 G \Delta m m x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (89)$$

Выполним суммирование всех сил притяжения, действующих со стороны всех пар элементов,

$$F_{\text{tot } x} = \sum F_{\text{рез } x} = -\frac{G m x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \sum 2\Delta m = -\frac{G m M x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (90)$$

Вернемся к задаче о тонком диске и определим силу притяжения одного тонкого кольца диска. Согласно выражению (90),

$$dF_y = -\frac{G m dM y}{(r^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (91)$$

Массу тонкого кольца можно представить как

$$dM = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr, \quad (92)$$

здесь  $dS$  – площадь тонкого кольца; учтено также, что  $dS = 2\pi r dr$  (по аналогии с площадью прямоугольника).

Следовательно, элементарную силу можно записать так:

$$dF_y = -\frac{2\pi G m \sigma y r dr}{(r^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (93)$$

Проинтегрируем последнее уравнение: в левой части – по всем элементарным силам, а в правой части – по всем радиусам элементарных колец

$$\int dF_y = 2\pi G m \sigma y \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + y^2)^{3/2}}, \Rightarrow F_{\text{tot } y} = -2\pi G m y \sigma \left[ \frac{1}{|y|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + y^2}} \right]$$

или

$$F_{\text{tot } y} = -2\pi G m \sigma \left[ \text{sign } y - \frac{y}{\sqrt{D^2/4 + y^2}} \right], \quad (94)$$

здесь

$$\text{sign } y = \begin{cases} 1, & \text{если } y \geq 0, \\ -1, & \text{если } y < 0 \end{cases}.$$

В случае шарообразной Луны

$$F_{\text{tot}} = \frac{G m \mathfrak{M}_{\zeta}}{a_{\zeta}^2}. \quad (95)$$

Поскольку в случае плоской Луны  $y = a_{\zeta}$  – большая полуось лунной орбиты,

$$\sigma = \frac{\rho_{\text{ш}} V}{\pi \mathfrak{R}_{\zeta}^2} = \rho_{\text{ш}} L = \frac{6 \mathfrak{M}_{\zeta}}{\pi D^3} L. \quad (96)$$

Приравняем данные силы

$$|F_{\text{tot } y}| = F_{\text{tot}}, \Rightarrow 2\pi G m \frac{6 \mathfrak{M}_{\zeta}}{\pi D^3} L \left[ 1 - \frac{a_{\zeta}}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + a_{\zeta}^2}} \right] = \frac{G m \mathfrak{M}_{\zeta}}{a_{\zeta}^2}, \Rightarrow$$

$$L = \frac{D^3}{12 a_{\zeta}^2} \left[ 1 - \frac{a_{\zeta}}{\sqrt{a_{\zeta}^2 + D^2/4}} \right]^{-1} = \frac{2 \mathfrak{R}_{\zeta}^3}{3 a_{\zeta}^2} \left[ 1 - \frac{a_{\zeta}}{\sqrt{a_{\zeta}^2 + \mathfrak{R}_{\zeta}^2}} \right]^{-1} = 2317 \text{ км}. \quad (97)$$

Для толщины "шайбы" тела Луны можно получить упрощенное выражение:

$$L = \frac{2 \mathfrak{R}_{\zeta}^3}{3 a_{\zeta}^2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}^2}{a_{\zeta}^2} \right)^{-1/2} \right]^{-1} \approx \frac{2 \mathfrak{R}_{\zeta}^3}{3 a_{\zeta}^2} \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}^2}{a_{\zeta}^2} \right]^{-1} = \frac{4}{3} \mathfrak{R}_{\zeta} = 2317 \text{ км}.$$

При записи последнего результата учтено, что  $\mathfrak{R}_{\zeta} \ll a_{\zeta}$ . Очевидно, что условие  $L \ll D$  не выполняется при условии – плотность плоской Луны равна средней плотности шарообразной Луны. Следовательно, модель тонкого диска для корректного описания гравитационного поля Луны, строго говоря, не применима. Попробуем уточнить ее. Будем моделировать Луну однородным цилиндром с диаметром  $D$  и длиной  $L$  (см. рис. 15). Рассмотрим тонкий однородный диск в теле цилиндра толщины  $dz$ , центр которого находится в точке  $C$  с координатой  $z$ . Будем полагать, что пробное тело массы  $m$  находится на положительной части оси  $OZ$ , на расстоянии  $a > L/2$  от начала координат  $O$ . Тогда,

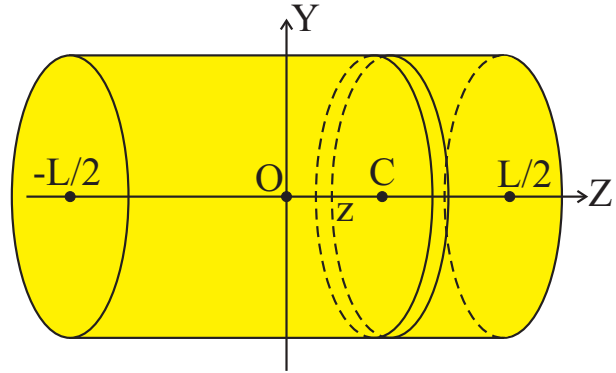


Рис. 15: к определению силы притяжения однородным цилиндром.

элементарную силу притяжения, действующую на пробное тело со стороны тонкого диска можно записать, согласно (94) и (96) так

$$dF_z = -\frac{3 G m \mathfrak{M}_\zeta}{2 \mathfrak{R}_\zeta^3} \left[ \text{sign}(a - z) - \frac{a - z}{\sqrt{\mathfrak{R}_\zeta^2 + (a - z)^2}} \right] dz. \quad (98)$$

Проинтегрируем последнее уравнение: в левой части – по всем элементарным силам, действующим со стороны элементарных дисков на данное пробное тело, а в правой части – по координате  $z$  в пределах длины цилиндра:

$$\int_0^{F_{\text{tot}}} dF_z = -\frac{3 G m \mathfrak{M}_\zeta}{2 \mathfrak{R}_\zeta^3} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \text{sign}(a - z) - \frac{a - z}{\sqrt{\mathfrak{R}_\zeta^2 + (a - z)^2}} \right] dz, \Rightarrow$$

$$F_{\text{tot } z} = -\frac{3 G m \mathfrak{M}_\zeta}{2 \mathfrak{R}_\zeta^3} \left[ L \text{sign}(a) + \sqrt{\mathfrak{R}_\zeta^2 + (a - L/2)^2} - \sqrt{\mathfrak{R}_\zeta^2 + (a + L/2)^2} \right]. \quad (99)$$

В случае  $a = a_\zeta$  выполняется условие  $\mathfrak{R}_\zeta, L \ll a_\zeta$ , тогда последний результат можно записать в упрощенной форме:

$$F_{\text{tot } z} = -\frac{3 G m \mathfrak{M}_\zeta}{2 \mathfrak{R}_\zeta^3} \left[ L + a_\zeta \sqrt{1 - \left( \frac{L}{a_\zeta} - \frac{L^2}{4a_\zeta^2} - \frac{\mathfrak{R}_\zeta^2}{a_\zeta^2} \right)} - \right.$$

$$\left. - a_\zeta \sqrt{1 + \left( \frac{L}{a_\zeta} + \frac{L^2}{4a_\zeta^2} + \frac{\mathfrak{R}_\zeta^2}{a_\zeta^2} \right)} \right] \approx -\frac{3 G m \mathfrak{M}_\zeta}{2 \mathfrak{R}_\zeta^3} \frac{1}{2} \frac{L \mathfrak{R}_\zeta^2}{a_\zeta^2} =$$

$$= -\frac{3 G m \mathfrak{M}_\zeta}{4} \frac{L}{a_\zeta^2 \mathfrak{R}_\zeta}. \quad (100)$$

При записи последнего выражения было использовано приближение вида<sup>1</sup>:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

Приравнявая (95) и модуль выражения (100), получаем значение для  $L$ :  $L = \frac{4}{3}\mathfrak{R}_\zeta = 2317$  км. Т.о., более точная модель цилиндрической Луны дает тот же результат что и модель тонкого диска.

**2.** Масса "плоской Луны" есть

$$\mathfrak{M}'_\zeta = \rho_{\text{ш}} \frac{\pi D^2}{4} L = \frac{6 \mathfrak{M}_\zeta}{\pi D^3} \frac{\pi D^2}{4} \frac{4}{3} \mathfrak{R}_\zeta = \mathfrak{M}_\zeta = 7.348 \cdot 10^{22} \text{ кг}. \quad (101)$$

Т.о., масса плоской Луны равна массе шарообразной Луны (что и следовало ожидать при условии  $\mathfrak{R}_\zeta \ll a_\zeta$ ).

**3.** Определим ускорение свободного падения у поверхности Луны, вблизи ее геометрического центра. Согласно (99), при  $a = L/2$ , имеем

$$F_{\text{tot}} = \frac{3 G m \mathfrak{M}_\zeta}{2 \mathfrak{R}_\zeta^3} \left[ L + \mathfrak{R}_\zeta - \sqrt{\mathfrak{R}_\zeta^2 + L^2} \right] = m g_\zeta^{(c)}, \Rightarrow$$

<sup>1</sup> Данное приближение есть результат разложения указанной функции в ряд Маклорена и удержание слагаемых по переменной  $x$  вплоть до  $x^3$ .

$$g_{\zeta}^{(c)} = \frac{3 G \mathfrak{M}_{\zeta}}{2 \mathfrak{R}_{\zeta}^3} \left[ L + \mathfrak{R}_{\zeta} - \sqrt{\mathfrak{R}_{\zeta}^2 + L^2} \right] = 1.62 \text{ м/с}^2 = g_{\zeta}^{(0)}, \quad (102)$$

где  $g_{\zeta}^{(0)} = 1.62 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения на поверхности шарообразной Луны.

4. Для вычисления потенциальной энергии воспользуемся связью между работой и изменением потенциальной энергии

$$\begin{aligned} U_r - U_{\infty} = A &= \int_r^{\infty} F_{\text{tot } a} da = -\frac{3 G m \mathfrak{M}_{\zeta}}{2 \mathfrak{R}_{\zeta}^3} \int_r^{\infty} da \left[ L \operatorname{sign}(a) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\mathfrak{R}_{\zeta}^2 + (a - L/2)^2} - \sqrt{\mathfrak{R}_{\zeta}^2 + (a + L/2)^2} \right], \Rightarrow \\ U_r = U(r) &= \frac{3 G m \mathfrak{M}_{\zeta}}{2 \mathfrak{R}_{\zeta}^3} \left[ L r + \frac{1}{2} \left( r - \frac{L}{2} \right) \sqrt{\left( r - \frac{L}{2} \right)^2 + \mathfrak{R}_{\zeta}^2} + \frac{1}{2} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \times \right. \\ &\times \ln \left[ \left( r - \frac{L}{2} \right) + \sqrt{\left( r - \frac{L}{2} \right)^2 + \mathfrak{R}_{\zeta}^2} \right] - \frac{1}{2} \left( r + \frac{L}{2} \right) \sqrt{\left( r + \frac{L}{2} \right)^2 + \mathfrak{R}_{\zeta}^2} - \\ &\left. - \frac{1}{2} \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \ln \left[ \left( r + \frac{L}{2} \right) + \sqrt{\left( r + \frac{L}{2} \right)^2 + \mathfrak{R}_{\zeta}^2} \right] \right]. \quad (103) \end{aligned}$$

При записи последнего результата учтено, что на бесконечности  $U_{\infty} = 0$ .

5. Для определения второй космической скорости, учтем, что при данном значении  $V_{\text{II}}$  полная механическая энергия должна быть равна нулю (у торцевой поверхности цилиндра, в его геометрическом центре):

$$\begin{aligned} U(L/2) + \frac{m V_{\text{II}}^2}{2} &= 0, \Rightarrow \\ V_{\text{II}} &= \sqrt{\frac{3 G \mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{R}_{\zeta}^3} \left[ \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}^2}{2} \ln \left[ (L + \sqrt{L^2 + \mathfrak{R}_{\zeta}^2}) / \mathfrak{R}_{\zeta} \right] + \frac{L}{2} \left( \sqrt{L^2 + \mathfrak{R}_{\zeta}^2} - L \right) \right]} = \\ &= 2.46 \text{ км/с}. \quad (104) \end{aligned}$$

Заметим, что модель плоского диска дает тоже значение скорости. Следовательно, нарушение условия  $L \ll D$  не сказывается на итоговом результате для  $V_{\text{II}}$ .

**Ответ:** к задаче представляется выражениями (96), (101), (102), (103), (104). ( $\$_{\text{max}} = 14$  баллов).

**Задача № 18. «Задача о движении двух гравитирующих тел»**

**Решение. 1.** Рассмотрим физическую систему двух массивных тел со сферически-симметричным распределением вещества, образующих гравитационно связанную устойчивую физическую систему. Данные тела будем моделировать шарами, с массами  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M}_2$  (причем  $\mathfrak{M}_1 > \mathfrak{M}_2$ ), гравитационное взаимодействие которых подчиняется закону всемирного тяготения Ньютона:

$$F = \frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{r^2}, \quad (105)$$

здесь  $r$  – расстояние между телами,  $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  – универсальная гравитационная постоянная. Пусть  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  – радиусы-векторы центров шаров в лабораторной инерциальной системе отсчета (ЛИСО, см. рис. 16). Следовательно, второй закон Ньютона для данных тел можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \\ \mathfrak{M}_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \end{aligned} \right\}. \quad (106)$$

Умножим обе части первого уравнения системы (106) на  $\mathfrak{M}_2$ , а у второго уравнения – на  $\mathfrak{M}_1$  и вычтем из первого уравнение второе, тогда

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = -\frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

Перейдем к новой переменной  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , тогда уравнение принимает вид:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (107)$$

Полученное уравнение можно трактовать как уравнение движения материальной  $\mu$ -точки, находящейся в гравитационном поле другой неподвижной материальной точки массы  $(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)$ . Сложим уравнения системы (106), в итоге имеем

$$\mathfrak{M}_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \mathfrak{M}_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0. \quad (108)$$

С использованием определения радиуса-вектора центра масс системы

$$\vec{R}_c = \frac{\mathfrak{M}_1 \vec{r}_1 + \mathfrak{M}_2 \vec{r}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}, \quad (109)$$

уравнение (108) можно привести к виду:

$$\ddot{\vec{R}}_c = 0.$$

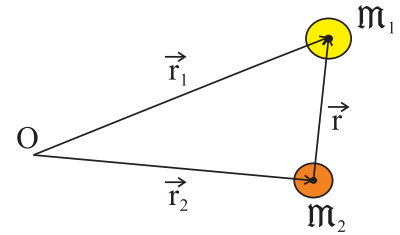


Рис. 16: к определению радиус-векторов тел системы.

Из последнего уравнения следует, что центр масс системы имеет нулевое ускорение и, следовательно движется с постоянной скоростью  $\vec{V}_c$ :

$$\vec{V}_c = \text{const.} \quad (110)$$

Из последнего выражения непосредственно следует, что в ЛИСО выполняется закон сохранения импульса центра масс системы:

$$\vec{P}_c = (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\vec{V}_c = \text{const.} \quad (111)$$

2. Тогда можно легко записать закон изменения радиуса-вектора  $\vec{R}_c$  со временем:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_c t, \text{ где } \vec{V}_c = \frac{\mathfrak{M}_1 \vec{V}_1^{(0)} + \mathfrak{M}_2 \vec{V}_2^{(0)}}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}, \quad (112)$$

где  $\vec{R}_0$  – начальное значение радиуса-вектора центра масс;  $\vec{V}_1^{(0)}$ ,  $\vec{V}_2^{(0)}$  – векторы начальных скоростей тел.

3. Представим радиуса-векторы  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  тел в ЛИСО, в терминах  $\vec{R}_c$  и вектора  $\vec{r}$ .

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \\ \vec{R}_c &= \frac{\mathfrak{M}_1 \vec{r}_1 + \mathfrak{M}_2 \vec{r}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R}_c + \frac{\mathfrak{M}_2 \vec{r}}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_c - \frac{\mathfrak{M}_1 \vec{r}}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \end{aligned} \right\}. \quad (113)$$

4. Представим векторы скоростей тел в ЛИСО, в терминах скорости центра масс –  $\vec{V}_c$  и вектора  $d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$  (для этого продифференцируем по времени предыдущие выражения):

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_1 = \dot{\vec{r}}_1 &= \vec{V}_c + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \dot{\vec{r}} = \vec{V}_c + \frac{\mu}{\mathfrak{M}_1} \dot{\vec{r}}, \\ \vec{V}_2 = \dot{\vec{r}}_2 &= \vec{V}_c - \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \dot{\vec{r}} = \vec{V}_c - \frac{\mu}{\mathfrak{M}_2} \dot{\vec{r}}, \end{aligned} \right\}, \quad (114)$$

здесь  $\mu$  – приведенная масса системы, определяемая выражением

$$\mu = \frac{\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}. \quad (115)$$

5. Итак, полная механическая энергия данной системы тел есть

$$E_{\text{tot}} = \frac{\mathfrak{M}_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{\mathfrak{M}_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - \frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (116)$$

Подставим (114) в (116):

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \frac{\mathfrak{M}_1}{2} \left( \vec{V}_c^2 + 2 \frac{\mu}{\mathfrak{M}_1} \vec{V}_c \dot{\vec{r}} + \left( \frac{\mu}{\mathfrak{M}_1} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 \right) + \\ &\quad \frac{\mathfrak{M}_2}{2} \left( \vec{V}_c^2 - 2 \frac{\mu}{\mathfrak{M}_2} \vec{V}_c \dot{\vec{r}} + \left( \frac{\mu}{\mathfrak{M}_2} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 \right) - \frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{|\vec{r}|} = \end{aligned}$$

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{2} \vec{V}_c^2 + \frac{\mu^2}{2\mathfrak{M}_1} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\mu^2}{2\mathfrak{M}_2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{G\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{|\vec{r}|},$$

то полную энергию можно представить в виде:

$$E_{\text{tot}} = E_c + E_\mu, \quad \text{где} \quad (117)$$

$$E_c = \frac{\mathfrak{M}_c \vec{V}_c^2}{2}, \quad E_\mu = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{G \mathfrak{M}_c \mu}{r}, \quad (118)$$

$$\mathfrak{M}_c = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2, \quad (119)$$

здесь  $E_c$  – кинетическая энергия центра масс;  $E_\mu$  – полная механическая энергия некоторой фиктивной точки –  $\mu$ -точки, находящейся в гравитационном поле неподвижной точки (центра масс) с массой  $\mathfrak{M}_c$ .

Как известно, полная механическая энергия системы, в которой действуют лишь потенциальные силы (в данном случае, гравитационные) является сохраняющейся величиной<sup>2</sup>. Очевидно, что  $E_c = \text{const}$ , следовательно  $E_\mu$  есть также сохраняющаяся величина, поскольку  $\mu$ -точка находится лишь в потенциальном гравитационном поле.

**Вывод:** описание движения исходной системы двух гравитирующих тел сводится к описанию движения фиктивной материальной  $\mu$ -точки (с массой  $\mu$ ) в гравитационном поле неподвижной материальной точки массы  $\mathfrak{M}_c$ .

6. Определим полный момент количества движения системы. Исходное выражение можно представить так

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\text{tot}} &= [\vec{r}_1, \vec{p}_1] + [\vec{r}_2, \vec{p}_2] = m_1[\vec{r}_1, \vec{v}_1] + m_2[\vec{r}_2, \vec{v}_2] = \\ &= \mathfrak{M}_1 \left[ \left( \vec{R}_c + \frac{\mu}{\mathfrak{M}_1} \vec{r} \right), \left( \vec{V}_c + \frac{\mu}{\mathfrak{M}_1} \dot{\vec{r}} \right) \right] + \mathfrak{M}_2 \left[ \left( \vec{R}_c - \frac{\mu}{\mathfrak{M}_2} \vec{r} \right), \left( \vec{V}_c - \frac{\mu}{\mathfrak{M}_2} \dot{\vec{r}} \right) \right] = \\ &= (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)[\vec{R}_c, \vec{V}_c] + \mu[\vec{r}, \vec{V}_c] + \mu[\vec{R}_c, \dot{\vec{r}}] + \frac{\mu^2}{\mathfrak{M}_1}[\vec{r}, \dot{\vec{r}}] - \mu[\vec{r}, \vec{V}_c] - \mu[\vec{R}_c, \dot{\vec{r}}] + \\ &+ \frac{\mu^2}{\mathfrak{M}_2}[\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = \mathfrak{M}_c[\vec{R}_c, \vec{V}_c] + \mu[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]. \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \mathfrak{M}_c[\vec{R}_c, \vec{V}_c] + \mu[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]. \quad (120)$$

Очевидно первое слагаемое – МКД центра масс системы есть сохраняющаяся величина:

$$\vec{L}_c = \mathfrak{M}_c[(\vec{R}_0 + \vec{V}_c t), \vec{V}_c] = \mathfrak{M}_c([\vec{R}_0, \vec{V}_c] + [\vec{V}_c, \vec{V}_c]t) = \mathfrak{M}_c[\vec{R}_0, \vec{V}_c] = \text{const}.$$

<sup>2</sup>См., например, Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – Ижевск: изд-во ПХД. – 2007.

Из курса механики известно, что если в системе присутствуют лишь центральные силы, то полный МКД системы является сохраняющейся величиной<sup>3</sup>. Следовательно, второе слагаемое в (120) есть МКД  $\mu$ -точки, находящейся в центральном силовом (гравитационном) поле, является также сохраняющейся величиной.

Отметим, что описание движения данных тел проще всего выполнить в **системе центра масс** (СЦМ) – инерциальной системе отсчета, начало которой совпадает с центром масс данных тел. В этом случае, согласно системам выражений (113), (114) радиусы-векторы, и скорости звезд представляются в виде:

$$\vec{r}_1 = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{M}_1}\right) \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\left(\frac{\mu}{\mathfrak{M}_2}\right) \vec{r}, \quad \vec{V}_1 = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{M}_1}\right) \dot{\vec{r}}, \quad \vec{V}_2 = -\left(\frac{\mu}{\mathfrak{M}_2}\right) \dot{\vec{r}}. \quad (121)$$

В СЦМ уравнение движения  $\mu$ -точки, полная энергия и МКД системы представляются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vec{r}} = -\frac{G \mathfrak{M}_c \vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \\ E_{\text{tot}} = E_\mu = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{G \mu \mathfrak{M}_c}{|\vec{r}|}, \\ \vec{L}_{\text{tot}} = \mu [\vec{r}, \dot{\vec{r}}] \end{array} \right\}. \quad (122)$$

*В силу центрального характера гравитационных сил задача об описании движения двух гравитирующих тел сводится к задаче об описании движения лишь одной фиктивной  $\mu$ -точки. Описание движения последней составляет суть задачи Кеплера.*

<sup>3</sup>См., например, Сивухин Д. В. Общий курс физики. – Изд. 5-е, стереотипное. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2010. – Т. I. – Механика. – 560с.

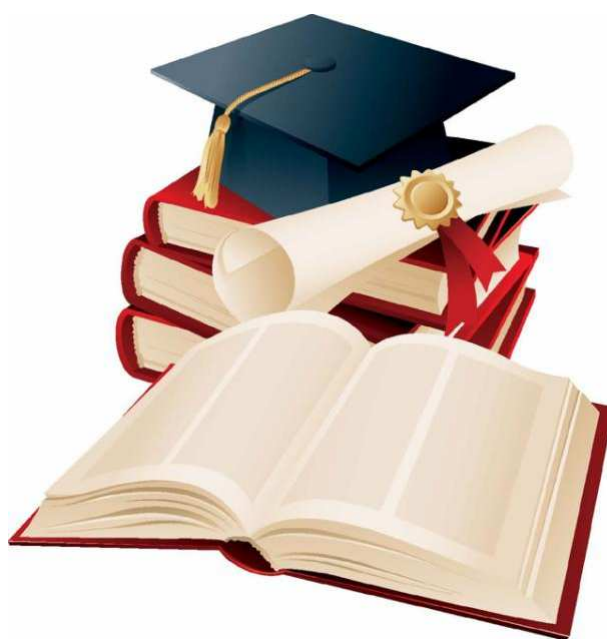
---

---

# СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

---

---



## А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная –  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме –  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная –  $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана –  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро –  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона –  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона –  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица –  $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек –  $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла –  $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

## А.2. Данные о Солнце

- Радиус –  $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса –  $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость –  $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина –  $-26.74^m$
- Абсолютная болометрическая звездная величина –  $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) –  $+0.67^m$
- Эффективная температура –  $5778 \text{ К}$
- Средний горизонтальный параллакс –  $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)  
на расстоянии Земли –  $1361 \text{ Вт/м}^2$
- Солнечная постоянная (в видимом свете)  
на расстоянии Земли –  $600 \text{ Вт/м}^2$

## А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты –  $0.017$
- Тропический год –  $365.24219 \text{ сут}$
- Средняя орбитальная скорость –  $29.8 \text{ км/с}$
- Период вращения –  $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 –  $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса –  $5.974 \cdot 10^{24}$  кг
- Средняя плотность –  $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы –  $\text{N}_2$  (78%),  $\text{O}_2$  (21%), Ar ( $\sim 1\%$ )

#### А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике –  $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса –  $7.348 \cdot 10^{22}$  кг или  $1/81.3$  массы Земли
- Средняя плотность –  $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние –  $-12.7^m$

#### А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь  $x \ll 1$ , все углы выражаются в радианах.

## А.6. Характеристики орбит планет

| Планета  | Большая полуось |         | Экс-<br>цен-<br>триси-<br>тет | Наклон к<br>плоскости<br>эклипти-<br>ки | Период<br>обраще-<br>ния | Синоди-<br>ческий<br>период |
|----------|-----------------|---------|-------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
|          | млн.<br>км      | а.е.    |                               |                                         |                          |                             |
| Меркурий | 57.9            | 0.3871  | 0.2056                        | 7.004                                   | 87.97 сут                | 115.9                       |
| Венера   | 108.2           | 0.7233  | 0.0068                        | 3.394                                   | 224.70 сут               | 583.9                       |
| Земля    | 149.6           | 1.0000  | 0.0167                        | 0.000                                   | 365.26 сут               | –                           |
| Марс     | 227.9           | 1.5237  | 0.0934                        | 1.850                                   | 686.98 сут               | 780.0                       |
| Юпитер   | 778.3           | 5.2028  | 0.0483                        | 1.308                                   | 11.862 лет               | 398.9                       |
| Сатурн   | 1429.4          | 9.5388  | 0.0560                        | 2.488                                   | 29.458 лет               | 378.1                       |
| Уран     | 2871.0          | 19.1914 | 0.0461                        | 0.774                                   | 84.01 лет                | 369.7                       |
| Нептун   | 4504.3          | 30.0611 | 0.0097                        | 1.774                                   | 164.79 лет               | 367.5                       |

## А.7. Физические характеристики Солнца и планет

| Планета  | Масса                 |                | Радиус |                            | Плот-<br>ность | Период<br>вращения<br>вокруг оси | Наклон<br>экватора<br>к плос-<br>кости<br>орбиты | Гео-<br>мет-<br>рич.<br>альбе-<br>до | Вид.<br>звезд-<br>ная<br>вели-<br>чина* |
|----------|-----------------------|----------------|--------|----------------------------|----------------|----------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------|
|          | кг                    | массы<br>Земли | км     | ради-<br>усы<br>Зем-<br>ли |                |                                  |                                                  |                                      |                                         |
| Солнце   | $1.989 \cdot 10^{30}$ | 332946         | 695500 | 108.97                     | 1.41           | 25.380 сут                       | 7.25                                             | –                                    | $-26.8^m$                               |
| Меркурий | $3.302 \cdot 10^{23}$ | 0.05271        | 2439.7 | 0.3825                     | 5.42           | 58.646 сут                       | 0.00                                             | 0.10                                 | $-0.1$                                  |
| Венера   | $4.869 \cdot 10^{24}$ | 0.81476        | 6051.8 | 0.9488                     | 5.20           | 243.019 сут <sup>†</sup>         | 177.36                                           | 0.65                                 | $-4.4^m$                                |
| Земля    | $5.974 \cdot 10^{24}$ | 1.00000        | 6378.1 | 1.0000                     | 5.52           | 23.934 час                       | 23.45                                            | 0.37                                 | –                                       |
| Марс     | $6.419 \cdot 10^{23}$ | 0.10745        | 3397.2 | 0.5326                     | 3.93           | 24.623 час                       | 25.19                                            | 0.15                                 | $-2.0^m$                                |
| Юпитер   | $1.899 \cdot 10^{27}$ | 317.94         | 71492  | 11.209                     | 1.33           | 9.924 час                        | 3.13                                             | 0.52                                 | $-2.7^m$                                |
| Сатурн   | $5.685 \cdot 10^{26}$ | 95.181         | 60268  | 9.4494                     | 0.69           | 10.656 час                       | 25.33                                            | 0.47                                 | $0.4^m$                                 |
| Уран     | $8.683 \cdot 10^{25}$ | 14.535         | 25559  | 4.0073                     | 1.32           | 17.24 час <sup>†</sup>           | 97.86                                            | 0.51                                 | $5.7^m$                                 |
| Нептун   | $1.024 \cdot 10^{26}$ | 17.135         | 24746  | 3.8799                     | 1.64           | 16.11 час                        | 28.31                                            | 0.41                                 | $7.8^m$                                 |

\* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

## А.8. Характеристики некоторых спутников планет

| Спутник       | Масса                 | Радиус | Плотность          | Радиус орбиты | Период обращения     | Геометрич. альбедо | Вид. звездная величина* |
|---------------|-----------------------|--------|--------------------|---------------|----------------------|--------------------|-------------------------|
|               | кг                    | км     | г·см <sup>-3</sup> | км            | сут                  |                    |                         |
| <b>Земля</b>  |                       |        |                    |               |                      |                    |                         |
| Луна          | $7.348 \cdot 10^{22}$ | 1738   | 3.34               | 384400        | 27.32166             | 0.12               | -12.7                   |
| <b>Марс</b>   |                       |        |                    |               |                      |                    |                         |
| Фобос         | $1.08 \cdot 10^{16}$  | ~ 10   | 2.0                | 9380          | 0.31910              | 0.06               | 11.3                    |
| Деймос        | $1.8 \cdot 10^{15}$   | ~ 6    | 1.7                | 23460         | 1.26244              | 0.07               | 12.4                    |
| <b>Юпитер</b> |                       |        |                    |               |                      |                    |                         |
| Ио            | $8.94 \cdot 10^{22}$  | 1815   | 3.55               | 421800        | 1.769138             | 0.61               | 5.0                     |
| Европа        | $4.8 \cdot 10^{22}$   | 1569   | 3.01               | 671100        | 3.551181             | 0.64               | 5.3                     |
| Ганимед       | $1.48 \cdot 10^{23}$  | 2631   | 1.94               | 1070400       | 7.154553             | 0.42               | 4.6                     |
| Каллисто      | $1.08 \cdot 10^{23}$  | 2400   | 1.86               | 1882800       | 16.68902             | 0.20               | 5.7                     |
| <b>Сатурн</b> |                       |        |                    |               |                      |                    |                         |
| Тефия         | $7.55 \cdot 10^{20}$  | 530    | 1.21               | 294660        | 1.887802             | 0.9                | 10.2                    |
| Диона         | $1.05 \cdot 10^{21}$  | 560    | 1.43               | 377400        | 2.736915             | 0.7                | 10.4                    |
| Рея           | $2.49 \cdot 10^{21}$  | 765    | 1.33               | 527040        | 4.517500             | 0.7                | 9.7                     |
| Титан         | $1.35 \cdot 10^{23}$  | 2575   | 1.88               | 1221850       | 15.94542             | 0.21               | 8.2                     |
| Япет          | $1.88 \cdot 10^{21}$  | 730    | 1.21               | 3560800       | 79.33018             | 0.20               | ~ 11.0                  |
| <b>Уран</b>   |                       |        |                    |               |                      |                    |                         |
| Миранда       | $6.33 \cdot 10^{19}$  | 235.8  | 1.15               | 129900        | 1.413479             | 0.27               | 16.3                    |
| Ариэль        | $1.7 \cdot 10^{21}$   | 578.9  | 1.56               | 190900        | 2.520379             | 0.34               | 14.2                    |
| Умбриэль      | $1.27 \cdot 10^{21}$  | 584.7  | 1.52               | 266000        | 4.144177             | 0.18               | 14.8                    |
| Титания       | $3.49 \cdot 10^{21}$  | 788.9  | 1.70               | 436300        | 8.705872             | 0.27               | 13.7                    |
| Оберон        | $3.03 \cdot 10^{21}$  | 761.4  | 1.64               | 583500        | 13.46324             | 0.24               | 13.9                    |
| <b>Нептун</b> |                       |        |                    |               |                      |                    |                         |
| Тритон        | $2.14 \cdot 10^{22}$  | 1350   | 2.07               | 354800        | 5.87685 <sup>†</sup> | 0.7                | 13.5                    |

\* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

### А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

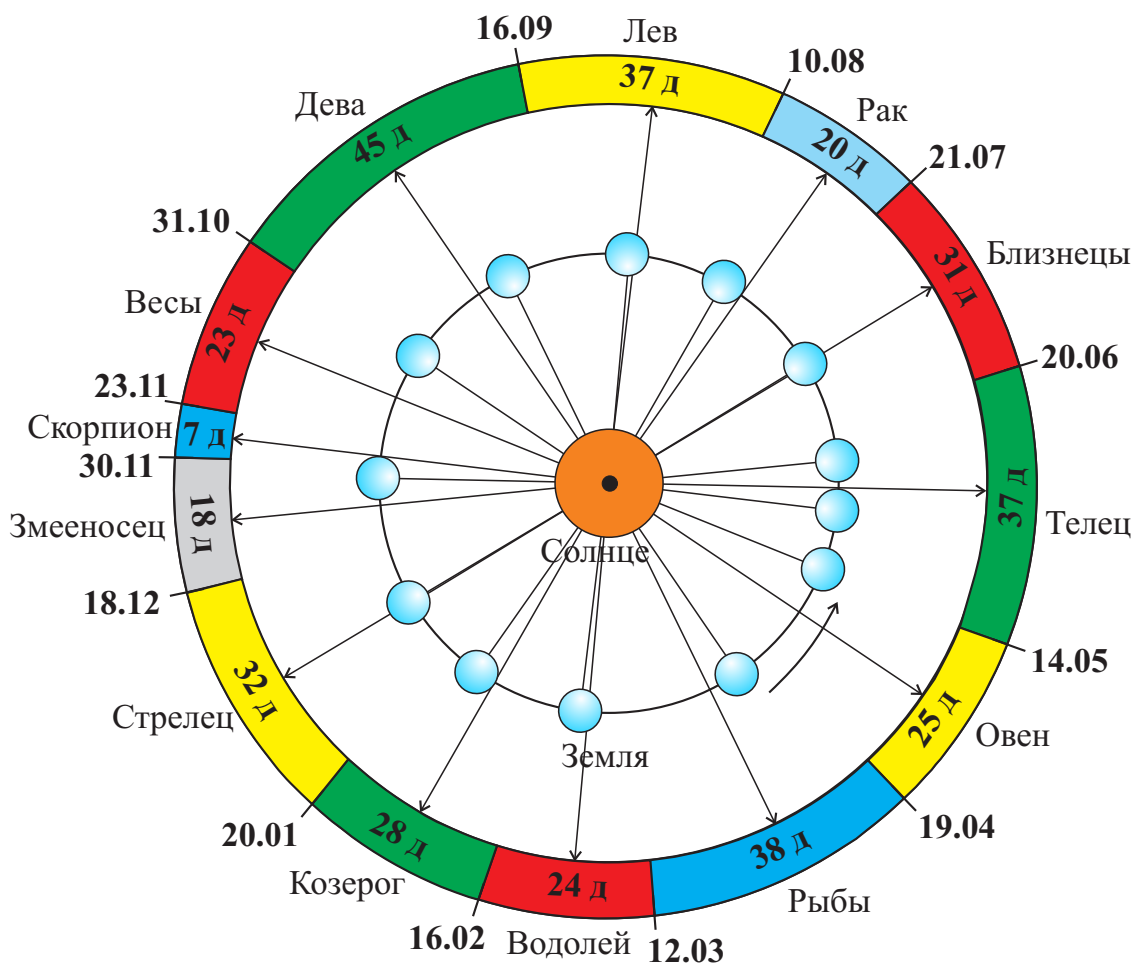


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

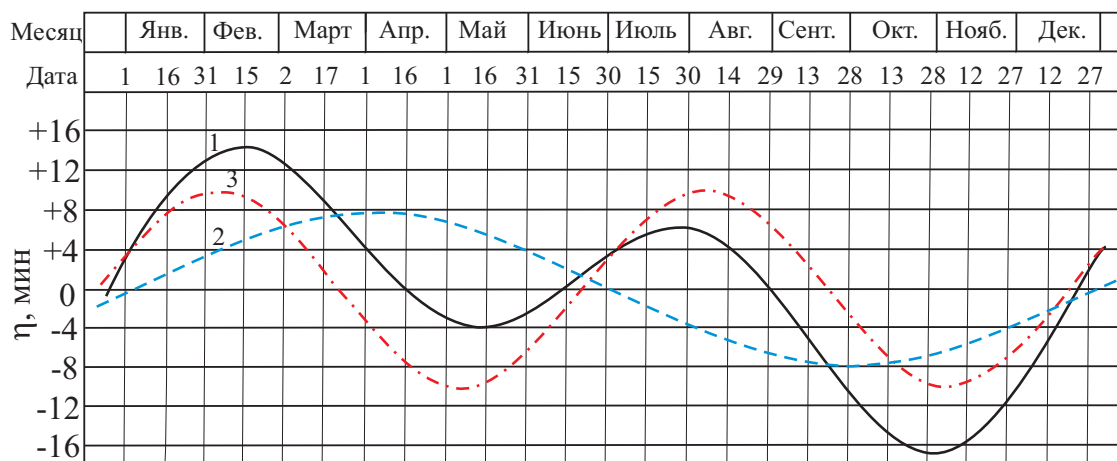


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

## А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки  $\Delta M_b$

| Спектр | $\Delta M_b$ | Спектр | $\Delta M_b$                |         |              |
|--------|--------------|--------|-----------------------------|---------|--------------|
|        |              |        | Гл. последо-<br>вательность | Гиганты | Сверхгиганты |
| B0     | – 2.70       | F5     | – 0.04                      | – 0.08  | – 0.12       |
| B5     | – 1.58       | F8     | – 0.05                      | – 0.17  | – 0.28       |
| A0     | – 0.72       | G0     | – 0.06                      | – 0.25  | – 0.42       |
| A5     | – 0.31       | G2     | – 0.07                      | – 0.31  | – 0.52       |
| F0     | – 0.09       | G5     | – 0.10                      | – 0.39  | – 0.65       |
| F2     | – 0.04       | G8     | – 0.10                      | – 0.47  | – 0.80       |
|        |              | K0     | – 0.11                      | – 0.54  | – 0.93       |
|        |              | K2     | – 0.15                      | – 0.72  | – 1.20       |
|        |              | K3     | – 0.31                      | – 0.89  | – 1.35       |
|        |              | K4     | – 0.55                      | – 1.11  | – 1.56       |
|        |              | K5     | – 0.85                      | – 1.35  | – 1.86       |
|        |              | M0     | – 1.43                      | – 1.55  | – 2.2        |
|        |              | M1     | – 1.70                      | – 1.72  | – 2.6        |
|        |              | M2     | – 2.03                      | – 1.95  | – 3.0        |
|        |              | M3     | – 2.35                      | – 2.26  | – 3.6        |
|        |              | M4     | – 2.7                       | – 2.72  | – 3.8        |
|        |              | M5     | – 3.1                       | – 3.4   | – 4.0        |

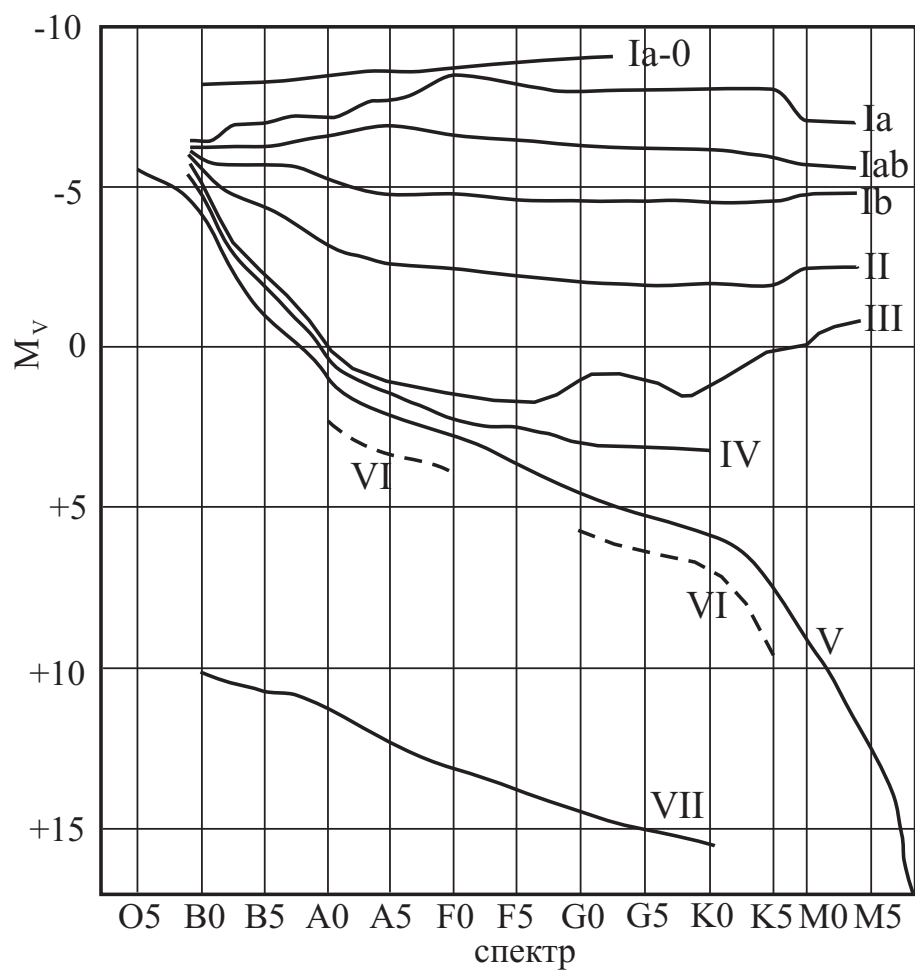


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

# ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

| ПЕРИОДЫ | A             | I                 | II              | III               | IV             | V              | VI              | VII           | VIII             | IX               | X            | XI               | XII            |
|---------|---------------|-------------------|-----------------|-------------------|----------------|----------------|-----------------|---------------|------------------|------------------|--------------|------------------|----------------|
| 1       | (H)           |                   |                 |                   |                |                |                 |               |                  |                  |              |                  |                |
| 2       | Li<br>Литий   | Be<br>Бериллий    | B<br>Бор        | C<br>Углерод      | N<br>Азот      | O<br>Кислород  | F<br>Фтор       | Ne<br>Неон    | He<br>Гелий      |                  |              |                  |                |
| 3       | Na<br>Натрий  | Mg<br>Магний      | Al<br>Алюминий  | Si<br>Кремний     | P<br>Фосфор    | S<br>Сера      | Cl<br>Хлор      | Ar<br>Аргон   | Ne<br>Неон       |                  |              |                  |                |
| 4       | K<br>Калий    | Ca<br>Кальций     | Sc<br>Скандий   | Ti<br>Титан       | V<br>Ванадий   | Cr<br>Хром     | Mn<br>Марганец  | Fe<br>Железо  | Co<br>Кобальт    | Ni<br>Никель     |              |                  |                |
| 5       | Rb<br>Рубидий | Sr<br>Стронций    | Y<br>Иттрий     | Zr<br>Цирконий    | Nb<br>Ниобий   | Mo<br>Молибден | Tc<br>Технеций  | Ru<br>Рутений | Rh<br>Родий      | Pd<br>Палладий   |              |                  |                |
| 6       | Cs<br>Цезий   | Ba<br>Барий       | La*<br>Лантан   | Hf<br>Гафний      | Ta<br>Тантал   | W<br>Вольфрам  | Re<br>Рений     | Os<br>Осмий   | Ir<br>Иридий     | Pt<br>Платина    |              |                  |                |
| 7       | Fr<br>Франций | Ra<br>Радий       | Ac**<br>Актиний | Rf<br>Резерфордий | Db<br>Дубний   | Sg<br>Сибургий | Bh<br>Борий     | Hs<br>Хассий  | Mt<br>Мейтнерий  | RO <sub>4</sub>  |              |                  |                |
| 8       | Ce<br>Церий   | Pr<br>Прозетимий  | Nd<br>Неодим    | Pm<br>Прометий    | Sm<br>Самарий  | Eu<br>Европий  | Gd<br>Гадолиний | Tb<br>Тербий  | Dy<br>Диспрозий  | Ho<br>Гольмий    | Er<br>Эрбий  | Tm<br>Туллий     | Yb<br>Иттербий |
| 9       | Th<br>Торий   | Pa<br>Протактиний | U<br>Уран       | Np<br>Нептуний    | Pu<br>Плутоний | Am<br>Америций | Cm<br>Курций    | Bk<br>Берклий | Cf<br>Калифорний | Es<br>Эйнштейний | Fm<br>Фермий | Md<br>Менделевий | No<br>Нобелий  |

Рис. А.4. Таблица Менделеева.