

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2018
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.
ТУР № 2



Самара, 2018 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 18 оригинальных задач трех уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В) и «Профи» (уровень С). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2018 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 2». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/solutions>

Автор задач – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СДДЮТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе *ИТ_ЕX* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника SamRAS-2018

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

<http://vk.com/samrasolimp>

3. Сроки подачи работ SamRAS-2018 тура № 2 на проверку:

15.02.2017-15.05.2018!!!

4. Электронный ящик SamRAS-2018:

samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2018:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

https://vk.com/doc-57032141_451699934

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2018, **внимательно** ознакомьтесь с «**Руководством зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2018**»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника**.

Уровень «Новичок» (уровень А)***Задача № 1. «Солнце и зодиакальные созвездия»***

Как известно, Солнце в своем годичном движении наибольшее время проводит в созвездии Дева (45 суток), наименьшее время – в созвездии Скорпион (7 суток). Оцените протяженность (в градусах) данных созвездий вдоль эклиптики. (3 балла).

Задача № 2. «Солнечное затмение в марте»

Однажды, солнечное затмение произошло в марте-месяце. В каком другом месяце этого же года можно ожидать явление солнечного или лунного затмения? Орбиту Луны следует считать круговой. Свой ответ поясните. (3 балла).

Задача № 3. «Активные образования атмосферы Солнца и их видимость с Земли»

В какой части атмосферы Солнца традиционно располагаются а) солнечные пятна, б) факелы, в) вспышки, г) флоккулы, д) протуберанцы? Какие из указанных активных образований можно наблюдать лишь с помощью фильтра (без сторонних оптических инструментов с увеличением, большим 1) и невооруженного глаза? (3 балла).

Задача № 4. «Высота Солнца на экваторе в полдень»

В какие дни года высота Солнца над горизонтом в полдень для наблюдателя, находящегося на географическом экваторе, будет минимальной? Максимальной? Чему равны соответствующие значения? (4 балла).

Задача № 5. «Ясное утро и солнечный зайчик»

Астроном-любитель, перемещаясь по утреннему городу, заметил отражение восходящего Солнца в окне многоэтажки, расположенной вдали. Зная, что коэффициент отражения оконного стекла $\rho_g = 0.05$, а расстояние от дома до астронома $r = 3$ км, определите освещенность, которую создавал солнечный зайчик на сетчатке астронома. Оцените соответствующую звездную величину солнечного зайчика. Сравните полученное значение со звездными

величинами известных ярких небесных тел. (4 балла).

Задача № 6. «Футбольное поле на Луне»

При проведении чемпионата мира по футболу традиционно используются поля с размерами $a_{\oplus} \times b_{\oplus} = 105 \times 68$ м. Если полагать, что большее измерение поля определяется максимальной дальностью свободного полета мяча, при его ударе с некоторой начальной скоростью V_0 , то чему равно минимальное значение данной скорости (без учета силы сопротивления воздуха)? Чему должна быть равна длина соответствующего поля на Луне? Какова будет, при этом, его площадь, если оно будет подобно земному? (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Между Самарой и Москвой...»

Полагая, что Земля является шаром радиуса $R_{\oplus} = 6371$ км, определите расстояние между Самарой и Москвой по поверхности планеты и по прямой, соединяющей эти города, если географические координаты данных городов есть $(\varphi_S = 53^\circ 12', \lambda_S = 50^\circ 10')$, $(\varphi_M = 55^\circ 45', \lambda_M = 37^\circ 37')$. На сколько отличаются указанные величины? (6 баллов).

Задача № 8. «Нетрадиционная зажигалка»

Астроном-любитель выбрался на природу для проведения наблюдений. Желая выпить чая, он решил разжечь костер и с удивлением обнаружил, что забыл дома спички. К счастью, с собой у него был большой комплект линз. Определите минимальное относительное отверстие собирающей линзы, необходимой для поджога бумажного фитиля от Солнца, если альбеда бумаги равно 0.85, ее коэффициент теплоотдачи $\alpha = 30$ Вт/(м²·К); коэффициент пропускания линзы для видимых лучей – 0.95. Солнце в этот момент было на высоте $h = 30^\circ$, а изменение звездной величины для светила в зените, обусловленное поглощением света земной атмосферой, равно 0.2^m? Температуру воспламенения бумаги принять равной $T_f = 450^\circ$. (7 баллов).

Задача № 9. «Зеркальный шар и зеркало для телескопа»

Школьнику подарили зеркальный шар (сферу с внутренней зеркальной поверхностью) с радиусом $R = 30$ см. Мечтая создать свой самодельный телескоп, он решил использовать этот шар для создания объектива. Какого вида оптический телескоп он задумал сделать? Полагая, что школьник планирует использовать также плоское зеркало, оцените максимальный допустимый диаметр объектива такого самодельного телескопа. Какая часть поверхности исходного шара будет при этом задействована? Оцените максимальную длину трубы такого телескопа. Окуляр с каким фокусным расстоянием следует использовать школьнику, чтобы он смог получить на данном телескопе увеличение, равное 10 крат? (8 баллов).

Задача № 10. «Противостояние новой кометы»

Новая комета наблюдается в противостоянии с Солнцем. При этом, она движется вдоль эклиптики, в прямом направлении. Оцените максимально возможные гелио- и геоцентрические расстояния кометы от Земли, в этот момент. (8 баллов).

Задача № 11. «Земная атмосфера и поглощение солнечного света»

Оцените количество солнечной энергии, поглощаемой атмосферой Земли за одну секунду, если известно, что атмосферное поглощение света от светила, находящегося в зените, приводит к увеличению его звездной величины на 0.2^m . Атмосферу Земли следует считать однородным сферическим слоем толщиной $H = 100$ км. (9 баллов).

Задача № 12. «Зеленый луч Солнца и лифт небоскреба»

Определите, с какой скоростью должен подниматься лифт небоскреба, чтобы с него можно было непрерывно наблюдать зеленый луч Солнца, находящегося на закате? (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)**Задача № 13. «Плоская Земля и хрустальная сфера из звезд»**

Как известно, многие народы Древнего мира полагали, что звезды неподвижно прикреплены к хрустальной сфере, которая вращается вокруг оси, проходящей через центр Земли и Полярную звезду. Также предполагалось, что Земля имеет форму плоского диска. Нетрудно убедиться в том, что если перемещаться по поверхности Земли от г. Самары ($\varphi_S = 53^\circ 12'$, $\lambda_S = 50^\circ 10'$) до г. Кирова ($\varphi_S = 58^\circ 36'$, $\lambda_S = 49^\circ 40'$), то высота Полярной звезды будет увеличиваться. С использованием модели плоской Земли, объясните данный феномен, предполагая, что Самара находится точно в центре хрустальной сферы. Оцените: а) радиус хрустальной сферы; б) поверхностную концентрацию звезд (в звездах на квадратный километр), видимых невооруженным глазом на хрустальной сфере, полагая, что они равномерно распределены по ее поверхности; в) минимальную и максимальную мощность излучения звезд. (11 баллов).

Задача № 14. «Разрешающая способность глаза и оптическая сила мениска»

Астроном-любитель, страдающий близорукостью, невооруженным глазом видит звезды до 3.5^m . При наблюдении ночного ясного неба в подходящих очках он видит звезды до 6^m . Оцените а) разрешающую способность (β_1) невооруженного глаза без очков, если при использовании очков она составляет $\beta_2 = 100''$; б) оптическую силу мениска его очков, если диаметр зрачков

астронома в темноте – $D_y = 7$ мм. (12 баллов).

Задача № 15. «Галактическое трио»

Многим хорошо известно, что двумя ярчайшими спутниками галактики Андромеды (M31) являются галактики M32 и M110. Если материнская галактика ($\alpha_0 = 0^h42.8^m$, $\delta_0 = 41^\circ16'$) расположена от нас на расстоянии 772 кпк, имеет массу $\mathfrak{M}_0 = 8 \cdot 10^{11} \mathfrak{M}_\odot$ и радиус – $\mathfrak{R}_0 = 110000$ св. лет, то M32 ($\alpha_1 = 0^h42.7^m$, $\delta_0 = 40^\circ52'$) – на расстоянии – 763 кпк, имеет угловой диаметр $\mathcal{D}_1'' = 7'$ и массу $\mathfrak{M}_0 = 3 \cdot 10^9 \mathfrak{M}_\odot$. Галактика M110 ($\alpha_2 = 0^h40.4^m$, $\delta_0 = 41^\circ41'$) расположена на расстоянии – 825 кпк, имеет угловой диаметр – $\mathcal{D}_2'' = 21.9'$ и массу $\mathfrak{M}_2 = 10^{10} \mathfrak{M}_\odot$. Определите: а) расстояния между указанными галактиками; б) периоды обращения спутников относительно материнской галактики; в) действительные и максимально допустимые значения радиусов галактик-спутников. (13 баллов).

Задача № 16. «Угол отклонения светового луча в гравитационном поле звезды»

Пусть имеется далекий точечный источник света (например, квазар) свет от которого принимается земным наблюдателем. На пути его распространения есть компактное массивное тело (гравитационная линза) массы $\mathfrak{M}$ и радиуса $\mathfrak{R}$, со сферически симметричным распределением вещества. Вычислите:

- угол ($\Delta\theta_1$) отклонения светового луча, обусловленного гравитационным взаимодействием его фотонов с данным телом (6 баллов);
- полный угол ($\Delta\theta_{\text{tot}}$) отклонения светового луча, обусловленного как притяжением так и искривлением пространства вокруг звезды. Вклад от последнего эффекта в $\Delta\theta_{\text{tot}}$ идентичен значению $\Delta\theta_1$ (2 балла);
- определите максимальное значение угла $\Delta\theta_{\text{tot}}$ (2 балла);
- для какого типа звезд последняя величина будет принимать а) наибольшее, б) наименьшее значение? Оцените соответствующие значения (3 балла).

Задача № 17. «Сечения рассеяния фотонов в гравитационном поле линзы»

В процессах рассеяния фотонов в гравитационном поле линзы наблюдать траекторию отдельного фотона не представляется возможным. И потому, на эксперименте измеряют *поток рассеянных частиц* (F_{sca}) – количество частиц, рассеянных линзой в некотором направлении, за единицу времени. Основная физическая величина, используемая для описания процесса рассеяния, – *полное эффективное сечение* σ , которое определяется соотношением вида

$$\sigma = \frac{F_{\text{sca}}}{j_0}, \quad (1)$$

где j_0 – **плотность потока частиц** (фотонов) – количество частиц, движущихся в направлении линзы, и проходящих через единичную площадку, за единицу времени. Параметр σ несет информацию о характере взаимодействия рассеянных частиц. Наглядно его можно рассматривать как эффективную площадь мишени, попадая в которую, частицы рассеиваются под углом $\theta > \theta_{\min}$, $\theta_{\min}$ – наперед заданная величина.

Процессы упругого рассеяния можно охарактеризовать **дифференциальным эффективным сечением рассеяния**, равным отношению потока частиц dF_{sca} , рассеянных мишенью в телесный угол $d\Omega$, к величине плотности потока падающих частиц j_0 и величине телесного угла $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dF_{\text{sca}}}{j_0 d\Omega}, \quad (2)$$

Опираясь на представленные определения, получите:

- аналитическое выражение для дифференциального сечения ($\frac{d\sigma}{d\Omega}$) рассеяния фотонов в гравитационном поле линзы. (6 баллов);
- приближенное выражение для $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, при малых углах отклонения. (2 балла);
- формулу для полного сечения (σ_{tot}) рассеяния фотонов в гравитационном поле, при условии, что углы отклонения фотонов принадлежат отрезку $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ (2 балла).
- Представьте полученные результаты в терминах радиуса Шварцшильда для линзы, в обезразмеренном виде (путем деления итоговых выражений для $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и σ_{tot} на площадь поперечного сечения линзы – $\pi \mathfrak{R}^2$). (4 балла).

Задача № 18. «Задача о формировании «духов» гравитационной микролинзой»

1. С использованием условий и результатов задачи № 16 настоящего релиза, докажите, что уравнение гравитационной точечной сферически симметричной линзы в терминах позиционного угла (θ_1) изображения («духа») точечного источника и радиуса (θ_0) конуса Эйнштейна представляется в виде:

$$\theta_1^2 - \theta\theta_1 - \theta_0^2 = 0, \quad \text{где} \quad (3)$$

$$\theta_0^2 = \left(\frac{4G\mathfrak{M}}{c^2} \right) \frac{D_{sd}}{D_d(D_{sd} + D_d)}. \quad (4)$$

здесь $\mathfrak{M}$ – масса гравитационной линзы, D_{sd}, D_d – расстояния от источника до линзы и от линзы до наблюдателя соответственно (8 баллов).

2. Представьте выражение для радиуса конуса Эйнштейна в терминах $\mathfrak{M}$, массы Солнца – $\mathfrak{M}_\odot$ и параллакса источника (π_s'') и линзы (π_d'') (2 балла).

3. Получите решения уравнения (115). Исследуйте их численным образом на примере гипотетического объекта с массой $\mathfrak{M}_N = 0.07 \mathfrak{M}_\odot$ и $D_d = 8800$ а.е.

для источника – далекой звезды нашей Галактики. Проанализируйте основные особенности в "поведении" изображений. Всегда ли можно наблюдать оба изображения источника? (3 балла).

4. Постройте траектории движения источника (S) и его изображений I_1 и I_2 , сформированных точечной гравитационной линзой, на примере того же гипотетического тела, для двух значений прицельного углового параметра а) $\theta_p = 0.01''$, б) $\theta_p = 0.1''$. (2 балла).



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Солнце и зодиакальные созвездия»

Дано:

$$t_d = 45 \text{ сут.}$$

$$t_c = 7 \text{ сут.}$$

Найти:

$$\Delta \ell_d - ?$$

$$\Delta \ell_c - ?$$

Решение:

Поскольку, орбита Земли является слабо вытянутым эллипсом, то в низшем приближении ее можно считать окружностью, а движение Земли по орбите равномерным. Угловая скорость перемещения Солнца по эклиптике равна угловой скорости движения Земли по орбите, т.е.

$$\omega_{\odot} = \omega_{\oplus} = \frac{360^\circ}{T_{\oplus}}, \text{ где } T_{\oplus} = 365.26 \text{ сут.} \quad (5)$$

Следовательно, угловые протяженности созвездий вдоль эклиптики есть

$$\Delta \ell_d = \omega_{\oplus} t_d = 44.4^\circ; \quad \Delta \ell_c = \omega_{\oplus} t_c = 6.9^\circ. \quad (6)$$

Ответ: к задаче представлен значениями (6) ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «Солнечное затмение в марте»

Решение. Для наступления солнечного или лунного затмений необходимо выполнение двух важных условий:

1. Луна должна располагаться между Землей и Солнцем (в случае, солнечного затмения) или по другую сторону, относительно Земли к Солнцу (в случае лунного затмения).

2. Луна, при этом, должна быть рядом с узлом (восходящим – Ω или нисходящим – Υ) своей орбиты, см. рис. 1. Т.о., линия узлов лунной орбиты $\Omega\Upsilon$ должна быть параллельна или почти параллельна прямой ES ("Земля-Солнце").

Солнечные затмения часто сопровождаются предшествующими (за две недели) или последующими (через две недели) лунными затмениями. Это

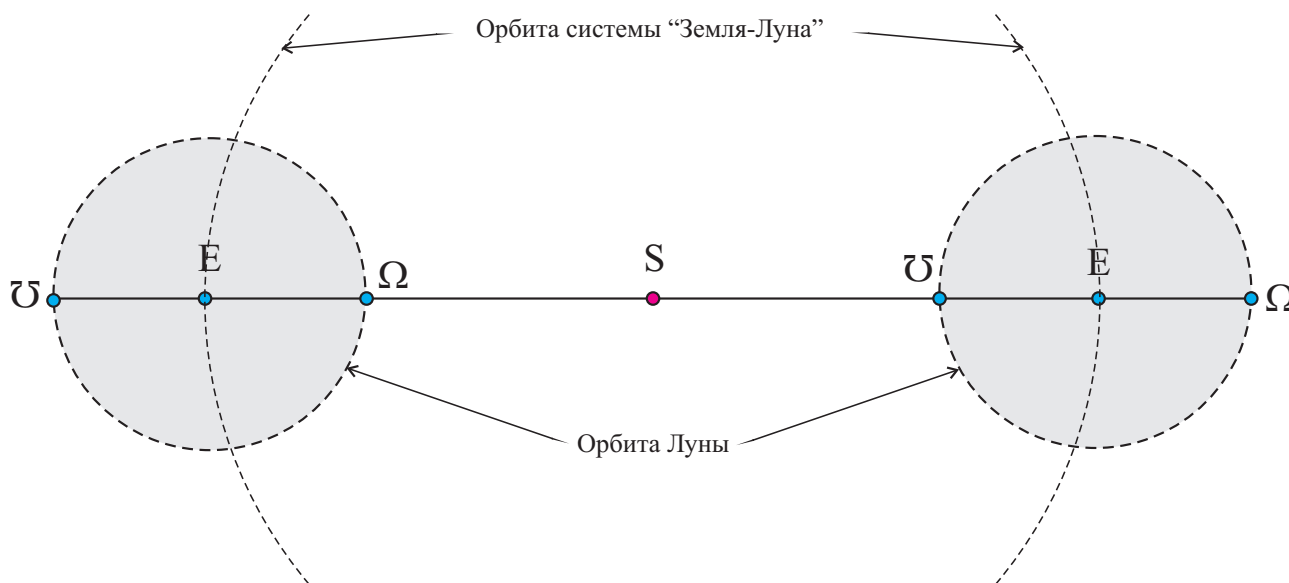


Рис. 1: к определению моментов наступления солнечного и лунного затмений.

связано с тем, что за те две недели, за которые Луна проходит половину своей орбиты, Солнце не успевает значительно удалиться от линии узлов лунной орбиты, и в результате выполняются условия, необходимые для наступления лунного затмения (полнолуние и земная тень вблизи узла). Иногда наблюдаются даже три последовательных затмения (солнечное, лунное и солнечное либо лунное, солнечное и лунное), разделенные двумя неделями. Например, последовательность из трех затмений наблюдалась в 2013 году: 25 апреля (лунное, частное), 10 мая (солнечное, кольцеобразное) и 25 мая (лунное, частное полутеневое). Другой пример – в 2011 году: 1 июня (солнечное, частное), 15 июня (лунное, полное), 1 июля (солнечное, частное). Время, когда Солнце находится вблизи узла лунной орбиты и могут происходить затмения, называется **сезоном затмений**; его длительность составляет около месяца. Т.о. следующий месяц – это апрель.

Если не учитывать прецессии плоскости лунной орбиты, то подобная ситуация повторится ровно через полгода, т.е. в сентябре. Однако, если все-таки учесть прецессию, то период ее составляет 18.6 лет, а направление движения узлов осуществляется в направлении – с востока на запад, т.е., навстречу Солнцу в его годичном движении. Следовательно, за полгода линия узлов $\Omega\omega$ повернется по часовой стрелке на угол $\frac{36^\circ}{18.6} \cdot 0.5 \approx 10^\circ$.

Согласно решению предыдущей задачи, Солнце по эклиптике движется, приблизительно, со скоростью $1^\circ/\text{сут}$.

Тогда, следующий шанс наступит на 10 суток раньше чем 0.5 года. Если солнечное затмение наблюдали в первой декаде марта, то следующее затмение следует ожидать в последней декаде августа. С учетом возможности наступления затмения на 4 недели раньше или позже указанной даты, то затмения можно также наблюдать с конца июля по конец октября.

Ответ: апрель, июль - октябрь. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Активные образования атмосферы Солнца и их видимость с Земли»

Решение. Солнечные пятна и факелы наблюдаются в фотосфере Солнца, самой нижней области атмосферы Солнца, доступной наблюдениям с Земли. Хромосферные вспышки и флоккулы наблюдаются (преимущественно) в хромосфере Солнца, области атмосферы Солнца, расположенной над фотосферой. Наконец, протуберанцы располагаются в верхней части солнечной атмосферы – короне. Наблюдать, среди указанных активных образований, можно невооруженным глазом, с помощью фильтра лишь крупные и контрастные (с яркостью Солнца) образования – это пятна, вспышки и протуберанцы (преимущественно, во время солнечных затмений).

Пятна – это области фотосферы, в которых температура на $1500 \div 2000$ К ниже температуры окружающих областей. Размеры крупных пятен состав-

ляют $2 \cdot 10^4 \div 2 \cdot 10^5$ км, что соответствует $0.4' \div 4'$ дуги. Т.о., самые большие пятна могут быть различимы глазом.

Вспышки – это протяженные области, напоминающие яркую ломанную на фоне диска Солнца (подобно искровому разряду молнии), являются результатом столкновения ударных волн плазмы в хромосфере Солнца. В эпицентре столкновения температура плазмы достигает значений $\sim 10^6$ К и потому, эти области существенно ярче окружающих областей атмосферы Солнца. Масштабы области вспышки могут достигать значений $\sim 10^5$ км и могут быть также различимы глазом.

Протуберанцы – это гигантские облака из относительно холодной плазмы, имеющие протяженность $\sim 10^6$ км. Оптимальные условия наблюдений наступают во время солнечного затмения, когда яркий диск Солнца закрывается Луной, а протуберанцы, подсвечиваясь светом ниже лежащих областей, уверенно различимы глазом.

Ответ: пятна и факелы – в фотосфере; вспышки и флоккулы – в хромосфере; протуберанцы – в короне; видны пятна, вспышки, протуберанцы. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Высота Солнца на экваторе в полдень»

Решение. Поскольку наблюдатель находится на экваторе, то широта его местности $\varphi = 0$. Воспользуемся формулами для высоты светила в верхней кульминации:

$$h_{\text{в}} = \left\{ \begin{array}{l} 90^\circ - \varphi + \delta, \text{ к югу от } Z, \\ 90^\circ + \varphi - \delta, \text{ к северу от } Z \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Очевидно, $h_{\text{в}}$ принимает максимальное значение ($h_{\max} = 90^\circ$), при $\varphi = 0$ и $\delta_{\odot} = 0$, т.е., когда Солнце находится на экваторе, в дни весеннего и осеннего равноденствий. Поскольку, склонение Солнца принимает значения из интервала:

$$-\varepsilon \leq \delta_{\odot} \leq \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = 23^\circ 26', \quad (8)$$

то становится очевидным, что высота Солнца минимальна, когда $\delta_{\odot} = \pm\varepsilon$. Т.о., высота Солнца на экваторе достигает минимального значения ($h_{\min} = 66^\circ 34'$) в дни солнцестояний.

Ответ: высота Солнца в полдень максимальна ($h_{\max} = 90^\circ$) в дни равноденствий; высота Солнца в полдень минимальна ($h_{\min} = 66^\circ 34'$) в дни солнцестояний. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Ясное утро и солнечный зайчик»

Дано:

$$\rho_g = 0.05,$$

$$r = 3 \text{ км.}$$

Решение:

Рассмотрим рис. 2. Здесь ED – одна из сторон окна. Предположим, что солнечный свет падает на окно под углом α . Тогда

Найти: $E, m - ?$

поток лучистой энергии есть

$$\Phi_0 = E_{\odot} S \cos \alpha, \quad (9)$$

где $S = a \times b$ – площадь поверхности окна (a и b – длина и ширина окна).

Отраженный свет от окна, в силу конечных угловых размеров Солнца (его угловой радиус равен $\rho'' = 16'$), будет высвечиваться в расходящуюся полость пирамиды, площадь основания которой, на расстоянии на-
блюдателя, есть

$$S' = \left(a \cos \alpha + 2r \frac{\rho''_{\odot}}{3438'} \right) \times \left(b + 2r \frac{\rho''_{\odot}}{3438'} \right). \quad (10)$$

При этом, в нее высвечивается поток

$$\Phi_{\text{ref}} = \rho_g \Phi_0 = \rho_g E_{\odot} S \cos \alpha. \quad (11)$$

Следовательно, освещенность на сетчатке наблюдателя, созданная отраженными лучами, есть

$$E = \frac{\Phi_{\text{ref}}}{S'} = \frac{\rho_g E_{\odot} S \cos \alpha}{\left(a \cos \alpha + 2r \frac{\rho''_{\odot}}{3438'} \right) \times \left(b + 2r \frac{\rho''_{\odot}}{3438'} \right)}, \quad (12)$$

здесь и ранее $E_{\odot} = 1361 \text{ Вт/м}^2$ – солнечная постоянная, $\rho_{\odot} = 16'$ – угловой радиус Солнца. В общем случае, коэффициент отражения ρ_g является функцией угла падения α . Лишь при малых углах падения ρ_g является постоянной малой величиной. Следовательно, можно полагать α малым, тогда $\cos \alpha \approx 1$. Размеры стандартного окна многоэтажки близки к значениям $a \times b = 1.5 \times 1 \text{ м}$. Согласно выражению (12), имеем

$$E = \frac{\rho_g E_{\odot} (a \times b)}{\left(a + 2r \frac{\rho''_{\odot}}{3438'} \right) \times \left(b + 2r \frac{\rho''_{\odot}}{3438'} \right)} = 0.12 \text{ Вт/м}^2. \quad (13)$$

С использованием формулы Погсона

$$m - m_{\odot} = -2.5 \lg \left(\frac{E}{E_{\odot}} \right), \Rightarrow m = m_{\odot} + 2.5 \lg \left(\frac{E_{\odot}}{E} \right) = -16.7^m.$$

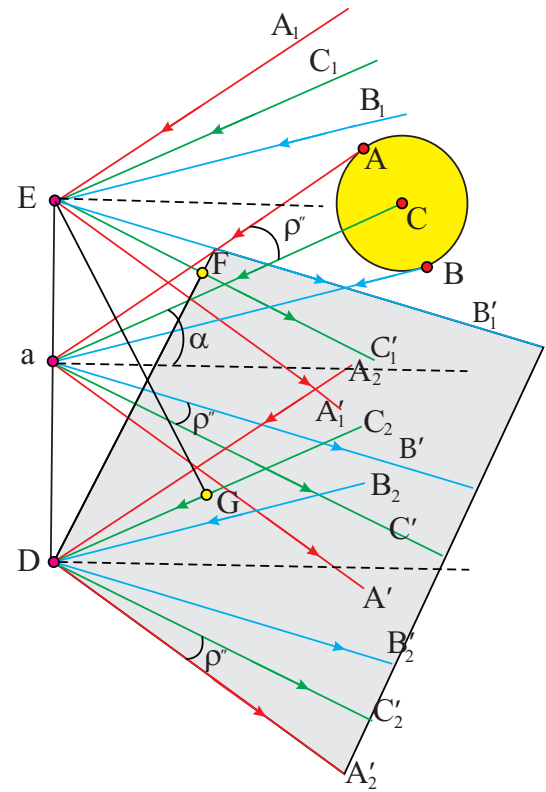


Рис. 2: к определению площади основания "солнечного зайчика".

Т.о., "солнечный зайчик" характеризуется освещенностью, меньшей $E_{\odot}$ более чем в 10^4 раз, но при этом, ярче полной Луны ($m_{\zeta} = -12.7^m$) более чем в 40 раз. Остальные объекты небосвода много тусклее и не имеет смысла их брать в сравнение.

Ответ: к задаче представлен формулами (??), (13) и (14); тусклее Солнца в 10^4 раз и ярче Луны в 40 раз. ($S_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Футбольное поле на Луне»

Дано:

$$a_{\oplus} \times b_{\oplus} = 105 \times 68 \text{ м.}$$

Найти:

$$V_{0\min} - ?$$

$$a_{\zeta}, S_{\zeta} - ?$$

Решение:

Из курса физики известно, что дальность полета тела, брошенного под углом α к горизонту, с начальной скоростью V_0 , можно записать так

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g_{\oplus}}, \quad (14)$$

где $g_{\oplus} = 9.81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения у поверхности Земли. Если полагать $L = a_{\oplus}$, то

$$V_{0\min} = \sqrt{g_{\oplus} a_{\oplus}} = 32.1 \text{ м/с, при } \alpha = 45^\circ. \quad (15)$$

Записав (14) для Луны

$$a_{\zeta} = \frac{V_0^2}{g_{\zeta}}, \quad (16)$$

и поделив уравнение (14) для Земли на уравнение (16), в результате получаем

$$\frac{a_{\zeta}}{a_{\oplus}} = \frac{g_{\oplus}}{g_{\zeta}} = \frac{9.81}{1.62} = 6.1 = \frac{b_{\zeta}}{b_{\oplus}},$$

$$\Rightarrow a_{\zeta} = 640 \text{ м.} \quad (17)$$

Здесь учтено, что ускорение свободного падения на поверхности Луны массы $\mathfrak{M}_{\zeta}$ и радиуса $\mathfrak{R}_{\zeta}$ (значения последних взяты из раздела "Справочные данные о Луне") представляется в виде:

$$g_{\zeta} = \frac{G \mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{R}_{\zeta}^2} = 1.62 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, площадь лунного футбольного поля есть

$$S_{\zeta} = a_{\zeta} \cdot b_{\zeta} = (6.1)^2 \cdot a_{\oplus} \cdot b_{\oplus} = 2.66 \cdot 10^5 \text{ м}^2. \quad (18)$$

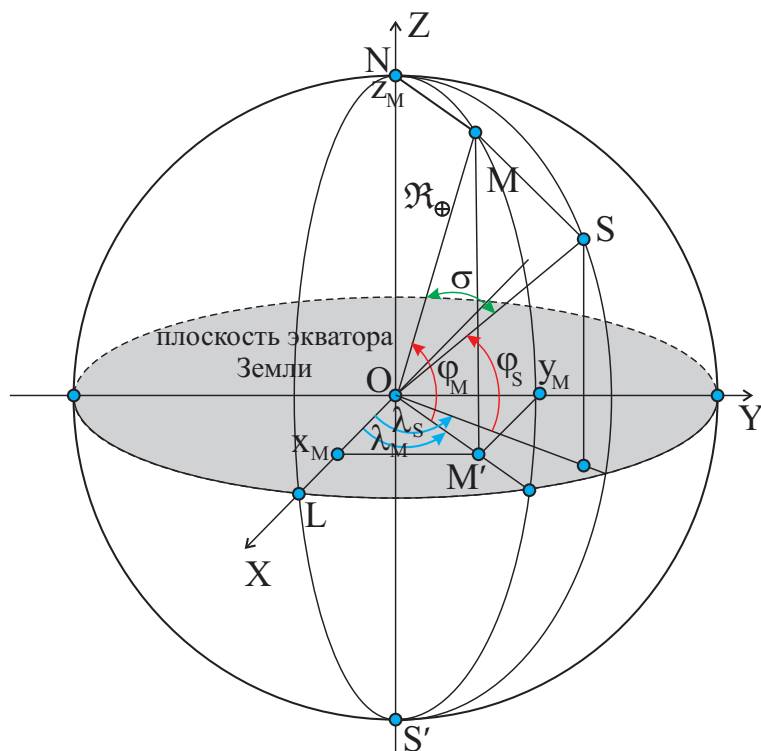


Рис. 3: к определению угла σ .

Ответ: к задаче представляется выражениями (15), (17), (18). ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Между Самарой и Москвой...»

Дано:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{\oplus} &= 6371 \text{ км}, \\ \varphi_S &= 53^\circ 12' = 53.2^\circ, \\ \lambda_S &= 50^\circ 10' = 50.17^\circ, \\ \varphi_M &= 55^\circ 45' = 55.75^\circ, \\ \lambda_M &= 37^\circ 37' = 37.62^\circ.\end{aligned}$$

Найти:

$$\ell, r, \Delta - ?$$

Решение:

Пусть, две точки M и S на поверхности земного шара (см. рис. 3) определяют положение Москвы и Самары. Введем декартову систему координат так, чтобы ось OZ была сонаправлена с осью вращения Земли NS' . Ось OX направим от центра Земли через точку L пересечения нулевого меридиана с экватором. Ось OY расположим в плоскости экватора, перпендикулярно OX .

Установим связь декартовых и географических координат. Для этого, из точки M опустим на плоскость OXY перпендикуляр MM' , тогда длина проекции OM' есть

$$OM' = OM \cdot \cos \varphi_M.$$

Опустим перпендикуляры $M'x_M$ и $M'y_M$ на оси OX и OY соответственно, тогда

$$x_M = OM' \cdot \cos \lambda_M, \quad y_M = OM' \cdot \sin \lambda_M.$$

Опустим перпендикуляр Mz_M на ось OZ , тогда

$$z_M = OM \cdot \sin \varphi_M.$$

В итоге, имеем

$$\left. \begin{aligned}x_M &= \mathfrak{R}_{\oplus} \cdot \cos \varphi_M \cdot \cos \lambda_M, \\ y_M &= \mathfrak{R}_{\oplus} \cos \varphi_M \cdot \sin \lambda_M, \\ z_M &= \mathfrak{R}_{\oplus} \cdot \sin \varphi_M\end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для точки S (Самара). Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника $\triangle OMS$:

$$\Delta r^2 = (MS)^2 = 2\mathfrak{R}_{\oplus}^2 - 2\mathfrak{R}_{\oplus}^2 \cdot \cos \sigma. \quad (20)$$

Иначе, его можно определить как длину вектора $\vec{MS}$.

$$\begin{aligned}\Delta r^2 &= (x_S - x_M)^2 + (y_S - y_M)^2 + (z_S - z_M)^2 = \mathfrak{R}_{\oplus}^2 [(\cos \varphi_S \cdot \cos \lambda_S - \\ &\cos \varphi_M \cdot \cos \lambda_M)^2 + (\cos \varphi_S \cdot \sin \lambda_S - \cos \varphi_M \cdot \sin \lambda_M)^2 + (\sin \varphi_S - \sin \varphi_M)^2] = \\ &= 2\mathfrak{R}_{\oplus}^2 [1 - \cos \varphi_S \cdot \cos \varphi_M \cos(\lambda_S - \lambda_M) - \sin \varphi_S \cdot \sin \varphi_M].\end{aligned} \quad (21)$$

Из сопоставления (20) и (21) следует, что¹

$$\cos \sigma = \cos \varphi_S \cdot \cos \varphi_M \cdot \cos(\lambda_S - \lambda_M) + \sin \varphi_S \cdot \sin \varphi_M = 0.991, \quad (22)$$

$$\Rightarrow \sigma = 7.71^\circ. \quad (23)$$

Тогда расстояние по поверхности Земли, между городами:

$$\ell = \mathfrak{R}_\oplus \cdot \frac{\sigma}{180^\circ} \cdot \pi = 857.3 \text{ км.} \quad (24)$$

Расстояние по прямой есть

$$r = 2\mathfrak{R}_\oplus \cdot \sin \frac{\sigma}{2} = 856.7 \text{ км.} \quad (25)$$

$$\Delta = \ell - r = 0.6 \text{ км.} \quad (26)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (24)-(26). (6 баллов).

Задача № 8. «Нетрадиционная зажигалка»

Дано:

$$\begin{aligned} A &= 0.85, \\ \alpha &= 30 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4), \\ \tau &= 0.95, \\ h_\odot &= 30^\circ, \\ \Delta m_0 &= 0.2^{\text{m}}, \\ T_f &= 450^\circ\text{C}, \\ T_0 &= 20^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Найти:

$$\forall - ?$$

Решение:

Как известно, **относительным отверстием** линзы называется отношение диаметра (D) линзы к ее фокусному расстоянию (F):

$$\forall = \frac{D}{F}. \quad (27)$$

Для определения искомой величины рассмотрим процесс распространения света в атмосфере. Поскольку $h_\odot > 20^\circ$, то можно воспользоваться моделью плоской атмосферы. Как известно, падение блеска, обуслов-

ленное атмосферным поглощением, пропорционально оптическому пути луча в атмосфере, тогда падение блеска Солнца в нашем случае есть

$$\Delta m = \frac{\Delta m_0}{\sin \alpha} = 0.4^{\text{m}}. \quad (28)$$

Следовательно, освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности линзы, есть

$$E_\odot = E_\odot^{(0)} \cdot 10^{-0.4\Delta m} = 942 \text{ Вт}/\text{м}^2,$$

здесь $E_\odot^{(0)} = 1361 \text{ Вт}/\text{м}^2$ – солнечная постоянная. Освещенность излучения, прошедшего линзу, будет

$$E_\odot^{(1)} = \tau \cdot E_\odot = 847 \text{ Вт}/\text{м}^2.$$

¹Следует отметить, что формула (22) является универсальной и может быть записана по аналогии в любой сферической (небесной) системе координат, для определения угла между двумя точками на поверхности сферы.

Полный поток света, упавший на бумагу от линзы, есть

$$\Phi_0 = E_{\odot}^{(1)} \cdot \pi \frac{D^2}{4},$$

где D – диаметр линзы. При этом лишь его доля $(1 - A)$ поглотится бумагой. Т.о., поток поглощенного излучения определяется так

$$\Phi_{\text{abs}} = (1 - A) \cdot \Phi_0 = (1 - A) \cdot \frac{\pi D^2}{4} \tau \cdot 10^{-0.4\Delta m} E_{\odot}^{(0)}. \quad (29)$$

При этом, данный поток падает на поверхность бумаги в круглое пятно радиуса

$$r = F \cdot \frac{\rho_{\odot}''}{3438'},$$

где $\rho_{\odot}'' = 16'$ – угловой радиус Солнца. Следовательно, площадь пятна

$$S_S = \pi r^2 = \pi F^2 \cdot \left(\frac{\rho_{\odot}''}{3438'} \right)^2. \quad (30)$$

Бумага обладает низкой теплопроводимостью, поэтому ее охлаждение происходит лишь с площадки S_S , в результате контакта с атмосферой Земли и уноса тепловой энергии, за счет естественной конвекции. Следовательно, можно применить уравнение Ньютона-Рихмана (в предельном случае):

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\alpha \cdot S_S (T_f - T_0). \quad (31)$$

С использованием закона сохранения энергии, можно записать уравнение баланса энергий:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{abs}} &= \left| \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right|, \Rightarrow \\ \frac{\pi D^2}{4} (1 - A) \tau \cdot 10^{-0.4\Delta m} E_{\odot}^{(0)} &= \alpha \pi F^2 \left(\frac{\rho_{\odot}''}{3438'} \right)^2 (T_f - T_0), \Rightarrow \\ \forall &= \left(\frac{\rho_{\odot}''}{3438'} \right) 10^{0.2\Delta m} \sqrt{\frac{4\alpha(T_f - T_0)}{(1 - A)\tau E_{\odot}^{(0)}}} = 0.09 \approx 0.1. \end{aligned} \quad (32)$$

здесь и выше $T_0 = 20^\circ \text{C}$ – температура окружающей среды.

Ответ: ответ к задаче представляется выражением (32). (7 баллов).

Задача № 9. «Зеркальный шар и зеркало для телескопа»

Дано:

$R = 30 \text{ см},$

$\Gamma = 10^x.$

Найти:

вид тел-па – ?

D_{max}, η – ?

$L_{\text{max}}, f_{\text{ок}}$ – ?

Решение:

1. Поскольку, школьник планирует создать объектив из зеркального шара, то, очевидно, объектив будет сферическим зеркалом небольших размеров. Следовательно, телескоп будет рефлектором. Поскольку, он планирует использовать плоское вторичное зеркало, то это будет рефлектор Ньютона.

2. Как известно, лишь параболическое зеркало собирает лучи, пришедшие из бесконечности, параллельно его главной оптической оси, в одной точке – фокусе. Найдем $D_{\max}$ – максимально допустимый диаметр сферического зеркала, при котором его можно считать параболическим. Рассмотрим профиль шара в его главной секущей плоскости – окружность, уравнение которой можно представить в системе координат OXY (см. рис. 4) в виде:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Перейдем в систему координат $O'X'Y'$, здесь уравнение той же окружности представляется в виде:

$$x'^2 + (y' - R)^2 = R^2, \Rightarrow x'^2 + y'^2 - 2y'R = 0. \quad (33)$$

Чтобы последнее уравнение можно было редуцировать к уравнению параболы в той же системе координат типа

$$y = \frac{1}{4f}x^2, \quad (34)$$

где f – фокусное расстояние параболы, необходимо потребовать, чтобы

$$y'^2 \ll x'^2, \quad 2y'R$$

откуда следует, в частности

$$\frac{y'}{2R} \ll 1. \quad (35)$$

Согласно последнему условию, уравнение (33) можно переписать в виде:

$$y' = \frac{1}{2R}x'^2. \quad (36)$$

Из сопоставления (34) и (36) следует, что

$$f = \frac{R}{2} = 15 \text{ см.} \quad (37)$$

Как известно, самые светосильные рефлекторы Ньютона со сферическим зеркалом имеют относительное отверстие $\frac{D}{f} \leq 1/5$. Следовательно,

$$D_{\max} = \frac{f}{5} = \frac{R}{10} = 30 \text{ мм.} \quad (38)$$

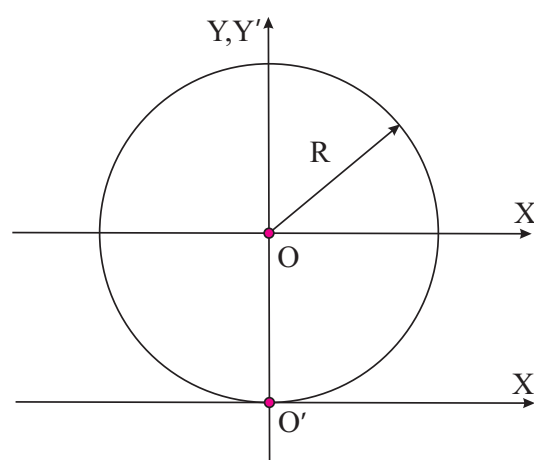


Рис. 4: к определению максимально допустимого диаметра сферического зеркала.

Проверим выполнение условия (35). Согласно (36),

$$y'_{\max} = \frac{1}{2R} \left(\frac{D_{\max}}{2} \right)^2 = \frac{D_{\max}^2}{8R} = \frac{R^2}{100 \cdot 8R} = \frac{R}{800}, \Rightarrow \frac{y'_{\max}}{2R} = \frac{1}{1600} \ll 1.$$

Очевидно, условие (35) выполняются. Следовательно, $D_{\max}=30$ мм является допустимым максимальным диаметром объектива.

3. Для определения части поверхности шара воспользуемся малостью отношения $D_{\max}/R$. Следовательно, площадь шарового сектора с диаметром основания $D_{\max}$ будет приблизительно равна площади круга такого же диаметра. Тогда,

$$\eta = \frac{\pi(D_{\max}/2)^2}{4\pi R^2} = \frac{1}{1600}. \quad (39)$$

Длина трубы Ньютона определяется фокусным расстоянием f главного зеркала диаметром трубы, который не может быть меньше диаметра зеркала ($D_{\max}$) и выносом фокуса (ℓ) – расстояние от фокуса главного зеркала (расположенного вне трубы) до поверхности трубы. Причем, согласно рис. 5

$$L = f - \frac{D_{\max}}{2} - \ell. \quad (40)$$

При $\ell = 0$ имеем

$$L_{\max} = f - \frac{D_{\max}}{2} = 135 \text{ мм}. \quad (41)$$

Чтобы телескоп давал увеличение Γ , необходимо использовать окуляр с фокусным расстоянием

$$f_{\text{ок}} = \frac{f}{\Gamma} = 15 \text{ мм}. \quad (42)$$

Данный окуляр является достаточно распространенным элементом для телескопа.

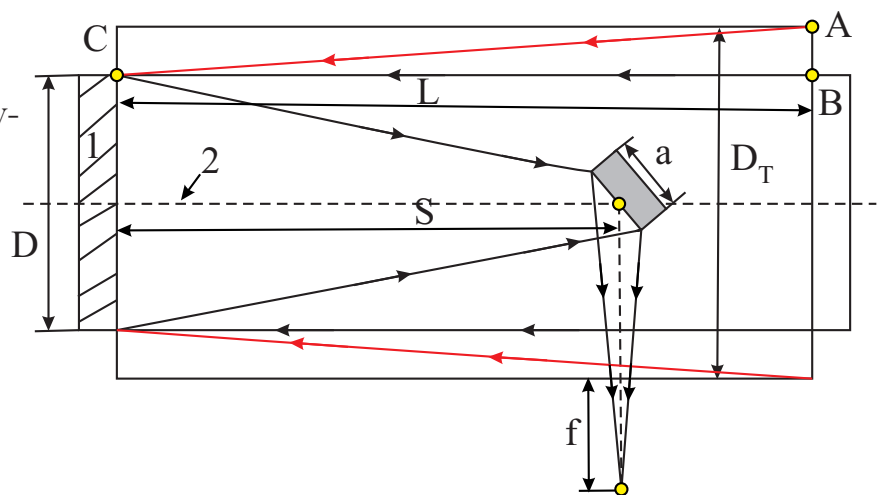


Рис. 5: к определению искомых величин.

Ответ: ответ к задаче представлен выражениями (38), (39), (41), (42), телескоп-рефлектор Ньютона. (8 баллов).

Задача № 10. «Противостояние новой кометы»

Решение. Как известно, новые кометы приходят во внутреннюю часть Солнечной системы с ее периферии, т.е., из бесконечности. Их орбиты – сильно вытянутые эллипсы, с большими полуосями и эксцентриситетами, близки-

ми к единице. Очевидно, в момент наблюдений комета находилась в окрестности своего перигелия, где ее гелиоцентрическая скорость V_g удовлетворяет выражению:

$$V_g = \sqrt{\frac{G\mathcal{M}_\odot}{a} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)}. \quad (43)$$

Заметим, что расстояние до перигелия кометы представляется формулой

$$q = a(1 - \varepsilon), \quad (44)$$

где a, ε – большая полуось и эксцентриситет орбиты кометы. Следовательно, формулу (43) можно переписать в виде:

$$V_g = \sqrt{\frac{G\mathcal{M}_\odot}{q} (1 + \varepsilon)} \approx \sqrt{\frac{2 G\mathcal{M}_\odot}{q}} \quad (45)$$

здесь мы учли, что у новой кометы с сильно вытянутым эллипсом $\varepsilon \approx 1$.

Поскольку с Земли у кометы наблюдается в противостоянии прямое собственное движение, то орбитальная скорость Земли не превосходит скорость V_g , т.е.,

$$V_\oplus \leq V_g, \Rightarrow \sqrt{\frac{G\mathcal{M}_\odot}{a_\oplus}} \leq \sqrt{\frac{2 G\mathcal{M}_\odot}{q}}, \Rightarrow q \leq 2 a_\oplus = 2 \text{ а.е.} = r_{\max}.$$

При этом, максимальное геоцентрическое расстояние

$$\Delta_{\max} = q - a_\oplus = 1 \text{ а.е.}$$

Ответ: $r_{\max} = 2 \text{ а.е.}$, $\Delta_{\max} = 1 \text{ а.е.}$ (8 баллов).

Задача № 11. «Земная атмосфера и поглощение солнечного света»

Дано:

$$\Delta m_0 = 0.2^m,$$

$$H = 100 \text{ км.}$$

Найти:

$$\Phi_{\text{abs}} - ?$$

Решение:

Свет от Солнца в виде параллельного пучка лучей падает на атмосферу Земли. Последнюю будем представлять однородным сферическим слоем толщины H . Введем декартову систему координат так как показано на рис. 6. В зависимости от координаты y падения луча в атмосферу Земли его оптический путь будет существенно различным. Рассмотрим оптический путь луча GK .

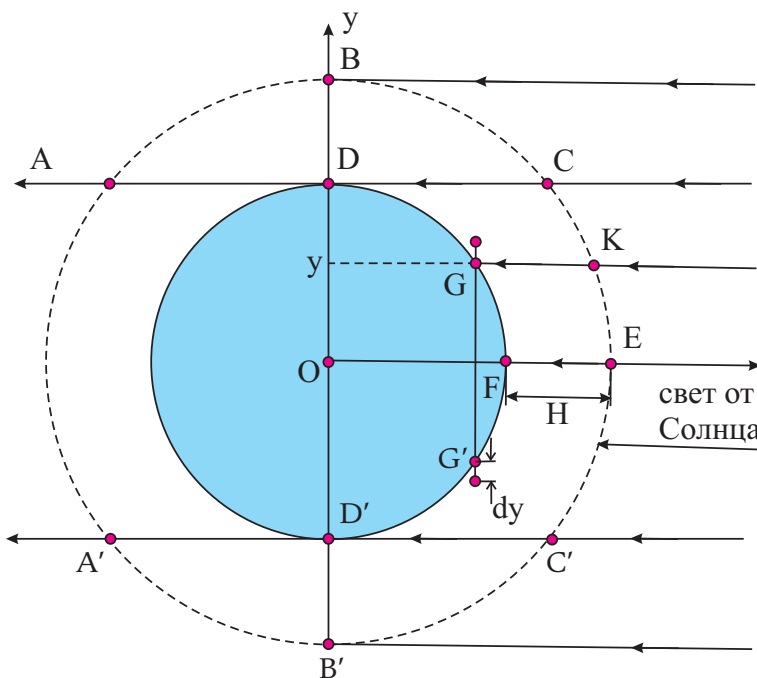


Рис. 6: к определению искомой величины.

Определим его

$$\ell_1 = GK = yK - yG = \sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + H)^2 - y^2} - \sqrt{\mathfrak{R}_\oplus^2 - y^2}. \quad (46)$$

В частности, для луча EF имеем

$$\ell_0 = EF = H.$$

Для луча CDA оптический путь есть

$$\ell_2 = 2\sqrt{(\mathfrak{R} + H)^2 - y^2}.$$

Как известно, изменение звездной величины небесного тела, обусловленное поглощением света в атмосфере, пропорционально оптическому пути, т.е.

$$\ell \sim \Delta m, \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta m_0} = \frac{\ell}{\ell_0}, \Rightarrow$$

$$\Delta m = \Delta m_0 \frac{\ell}{H}, \text{ где} \quad (47)$$

$$\ell = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + H)^2 - y^2} - \sqrt{\mathfrak{R}_\oplus^2 - y^2}, \quad y < \mathfrak{R}_\oplus, \\ 2\sqrt{(\mathfrak{R}_\oplus + H)^2 - y^2}, \quad y \geq \mathfrak{R}_\oplus \end{array} \right\}. \quad (48)$$

Рассмотрим бесконечно узкое плоское кольцо радиуса y , ширины dy , плоскость которого перпендикулярна оси OX и направлению распространения света от Солнца (см. рис. 6). На него падает поток

$$d\Phi_0 = f_\odot dS = f_\odot 2\pi y dy \quad (49)$$

здесь $f_\odot$ – солнечная постоянная; $dS = 2\pi y dy$ – площадь кольца. До поверхности Земли дойдет поток

$$d\Phi_{\text{tr}} = E 2\pi y dy = f_\odot 10^{-0.4\Delta m(y)} 2\pi y dy. \quad (50)$$

Поток солнечной энергии, поглощенной атмосферой в данном кольце, представляется так

$$d\Phi_{\text{abs}} = f_\odot (1 - 10^{-0.4\Delta m(y)}) 2\pi y dy. \quad (51)$$

Следовательно, полный световой поток, поглощенный атмосферой, можно представить интегралом вида:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{abs}} &= \int d\Phi_{\text{abs}} = 2\pi f_\odot \int_0^{\mathfrak{R}_\oplus + H} (1 - 10^{-0.4\Delta m(y)}) y dy = 2\pi f_\odot \left[\int_0^{\mathfrak{R}_\oplus + H} y dy - \int_0^{\mathfrak{R}_\oplus + H} y \times \right. \\ &\times 10^{-0.4\Delta m(y)} dy \left. \right] = 2\pi f_\odot \left[\frac{1}{2} (\mathfrak{R}_\oplus + H)^2 - \int_0^{\mathfrak{R}_\oplus} y 10^{-0.4\Delta m_1(y)} dy - \right. \\ &\left. - \int_{\mathfrak{R}_\oplus}^{\mathfrak{R}_\oplus + H} y \cdot 10^{-0.4\Delta m_2(y)} dy \right], \end{aligned} \quad (52)$$

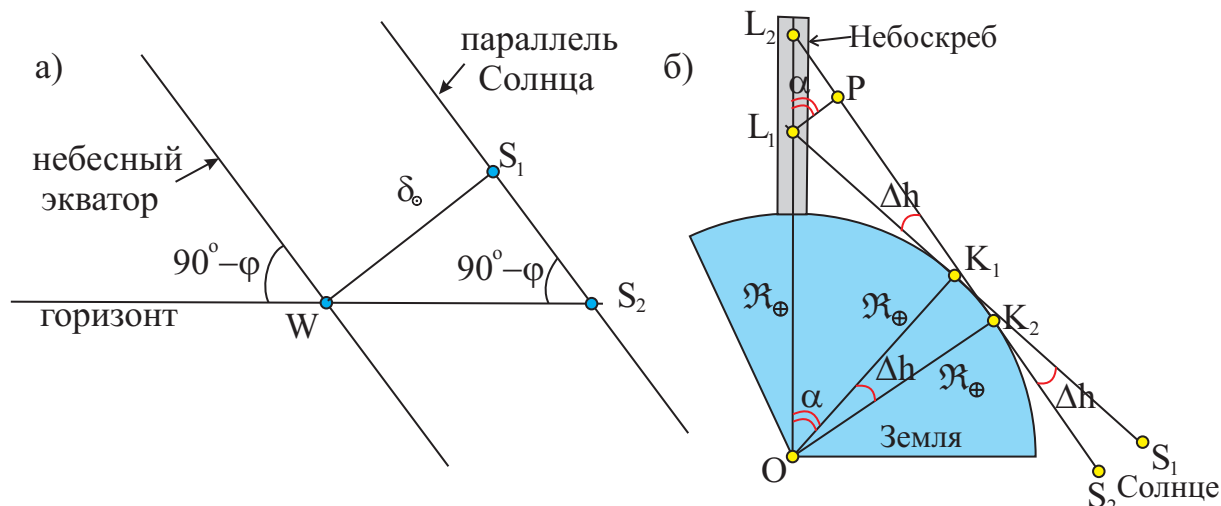


Рис. 7: к определению искомой а) скорости изменения угловой высоты Солнца; б) скорости подъема лифта небоскреба.

здесь $m_1(y)$, $m_2(y)$ определяются первым и вторым выражениями системы (47)-(48). Последние два интеграла в (52) можно вычислить лишь численным образом, например, с помощью бесплатной программы *Maxima*, или с использованием бесплатного онлайн – сервиса *Walfram-Alfa*. В результате получаем

$$\Phi_{\text{abs}} = 5.16 \cdot 10^{16} \text{ Вт.} \quad (53)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (52) и (53). (9 баллов).

Задача № 12. «Зеленый луч Солнца и лифт небоскреба»

Решение. Поскольку, зеленый луч – оптическое явление возникновения зеленого свечения верхней кромки видимого диска Солнца, наблюдаемого в последний момент перед его исчезновением за горизонтом, на закате, то нам необходимо знать с какой угловой скоростью может погружаться Солнце под горизонт. Как известно, область допустимых значений склонения Солнца заключено в интервале:

$$-\varepsilon \leq \delta_{\odot} \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 23^\circ 26', \quad (54)$$

очевидно, ε – относительно небольшой угол.

Предположим, что в некоторый момент времени Солнце движется по суточной параллели S_1S_2 , со склонением $\delta_{\odot}$, вблизи горизонта (см. рис. 7.а). За промежуток времени Δt Солнце переместилось вдоль параллели на угол

$$\sigma = S_1 \check{S}_2 = \omega_{\oplus} \cos \delta_{\odot} \Delta t,$$

где $\omega_{\oplus}$ – угловая скорость суточного вращения Земли. При этом, изменение высоты Солнца составило

$$\Delta h \approx S_1 \check{S}_2 \sin(90^\circ - \varphi) = \omega_{\oplus} \cos \delta_{\odot} \cos \varphi \Delta t.$$

Следовательно, скорость изменения высоты Солнца есть

$$\omega_h = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \omega_{\oplus} \cos \delta_{\odot} \cos \varphi, \quad (55)$$

здесь и выше φ – широта места наблюдения. Пусть за тот же промежуток времени Δt лифт небоскреба переместился из точки L_1 в точку L_2 (см. рис. 7.6) так, что верхняя кромка видимого диска Солнца была непрерывно на горизонте. Тогда, из $\Delta L_1 L_2 P$ следует

$$\Delta L = L_1 L_2 = L_1 P / \cos \alpha. \quad (56)$$

Иначе, из $L_1 P K_2$ следует, что

$$L_1 P = K_2 P \cdot \sin \Delta h \approx K_2 P \cdot \Delta h. \quad (57)$$

Здесь

$$K_2 P = K_2 L_2 - L_2 P,$$

где $K_2 L_2$ – дальность прямой видимости, которую можно определить из прямоугольного $\Delta O K_2 L_2$:

$$K_2 L_2 = \sqrt{(\Re_{\oplus} + L_2)^2 - \Re_{\oplus}^2} = \sqrt{2\Re_{\oplus} L_2 + L_2^2} \approx \sqrt{2\Re_{\oplus} L_2}. \quad (58)$$

Из $\Delta O K_2 L_2$ следует также

$$\cos \alpha = \frac{\Re_{\oplus}}{\Re_{\oplus} + L_2}. \quad (59)$$

Из $\Delta L_1 L_2 P$ следует, что

$$\begin{aligned} L_2 P &= L_1 P \operatorname{tg} \alpha = K_2 P \operatorname{tg} \alpha \Delta h, \Rightarrow \\ K_2 P (1 + \operatorname{tg} \alpha \Delta h) &= K_2 L_2, \Rightarrow K_2 P \approx K_2 L_2, \end{aligned}$$

поскольку Δh и α малые величины. Из (56)-(59) следует результат вида:

$$\Delta L = \sqrt{2\Re_{\oplus} L_2} \left(\frac{\Re_{\oplus} + L_2}{\Re_{\oplus}} \right) \Delta h \approx \Delta h \sqrt{2\Re_{\oplus} L_2}. \quad (60)$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{\Delta L}{\sqrt{L_2}} = \sqrt{2\Re_{\oplus}} \left(\frac{\Delta h}{\Delta t} \right) \Delta t, \Rightarrow \frac{dL}{\sqrt{L}} = \sqrt{2\Re_{\oplus}} \omega_h dt.$$

Проинтегрируем последнее дифференциальное уравнение

$$\int_0^L \frac{dL'}{\sqrt{L'}} = \sqrt{2\Re_{\oplus}} \omega_h \int_0^t dt', \Rightarrow 2\sqrt{L} = \sqrt{2\Re_{\oplus}} \omega_h t, \Rightarrow L = \frac{\Re_{\oplus} \omega_h^2}{2} t^2. \quad (61)$$

Продифференцируем последнее уравнение по времени

$$V_L = \frac{dL}{dt} = \Re_{\oplus} \omega_h^2 \cdot t. \quad (62)$$

Очевидно, что (61) определяет закон изменения высоты кабины лифта от времени, а выражение (62) – закон изменения скорости от времени. Т.о., лифт должен подниматься вверх с постоянным ускорением $a = \Re_{\oplus} \omega_h^2$. Очевидно, последняя величина принимает максимальное значение на экваторе в день равноденствия. Согласно (55), оно составляет $a_{\max} = 3.3 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$.

Ответ: к задаче представляется выражениями (62). ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Плоская Земля и хрустальная сфера из звезд»

Дано:

$$\begin{aligned}\varphi_S &= 53^\circ 12', \\ \lambda_S &= 50^\circ 10', \\ \varphi_K &= 58^\circ 36', \\ \lambda_K &= 49^\circ 40'.$$

Найти:

$$\begin{aligned}R_C, \sigma - ? \\ P_{\max}, P_{\min} - ?\end{aligned}$$

Решение:

Очевидно, что долготы г. Самары и г. Кирова близки по значению, поэтому ради простоты будем полагать, что данные города находятся на одном географическом меридиане. Киров расположен севернее Самары, причем их разделяет расстояние по поверхности Земли:

$$\Delta r = \mathfrak{R}_\oplus (\varphi_K - \varphi_S) = 600 \text{ км.} \quad (63)$$

В рамках модели плоской Земли рассмотрим рис. 8, соответствующий условиям задачи.

а) При перемещении по поверхности плоской Земли от г. Самары к г. Кирову наблюдатель будет двигаться в направлении Полярной звезды, приближаясь к ней, при этом ее высота будет увеличиваться, что и объясняет указанный феномен.

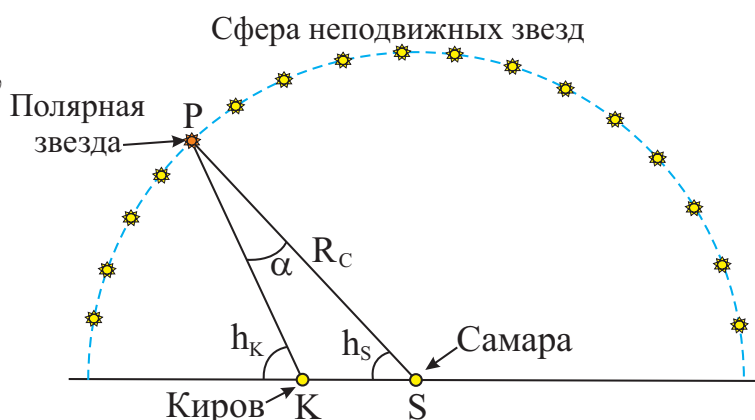


Рис. 8: к определению радиуса хрустальной сферы.

Рассмотрим $\triangle PSK$. Воспользуемся для него теоремой синусов:

$$\begin{aligned}\frac{R_C}{\sin(\pi - h_K)} &= \frac{SK}{\sin \alpha} \Rightarrow R_C = \frac{\sin h_K}{\sin(h_K - h_S)} \Delta r, \Rightarrow \\ R_C &= \frac{\sin h_K}{\sin \Delta \varphi} \cdot \mathfrak{R}_\oplus \Delta \varphi = 5440 \text{ км.}\end{aligned} \quad (64)$$

здесь мы учли, что высота Полярной звезды в данном городе равна значению географической широты этого города (т.е., $h_K = \varphi_K$, $h_S = \varphi_S$; $\alpha = \pi - (\pi - h_K) - h_S$; $SK = \Delta r$).

б) Как известно, на всей небесной сфере невооруженным глазом можно увидеть $N = 6 \cdot 10^3$ звезд. Тогда их поверхностная плотность определяется как

$$\sigma = \frac{N}{4\pi R_C^2} = 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ звезд/км}^2. \quad (65)$$

в) Как известно, самая яркая звезда – Сириус имеет звездную величину – $m_{\max} = -1.5^m$. Самые тусклые звезды, видимые невооруженным глазом – $m_{\max} = 6^m$. Следовательно, соответствующие освещенности звезд, создаваемые

мые ими у поверхности Земли (без учета влияния атмосферы), есть

$$\left. \begin{aligned} E_{\max} &= E_0 \cdot 10^{-0.4 \cdot m_{\max}} = 9.87 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2, \\ E_{\min} &= E_0 \cdot 10^{-0.4 \cdot m_{\min}} = 9.87 \cdot 10^{-11} \text{ Вт/м}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (66)$$

Каждая звезда является точечным источником света, который излучает в полусферу, обращенную к Земле. Тогда

$$P_{\max} = E_{\max} \cdot 2\pi R_C^2 = 18.35 \text{ мВт}; \quad P_{\min} = E_{\min} \cdot 2\pi R_C^2 = 18.35 \text{ кВт}. \quad (67)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (64), (65), (67). (\$_{\max} = 11\$ баллов).

Задача № 14. «Разрешающая способность глаза и оптическая сила мениска»

Дано:

$$\begin{aligned} m_1 &= 3.5^{\text{m}}, \\ m_2 &= 6.0^{\text{m}}, \\ \beta_2 &= 100'', \\ D_y &= 7 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Найти:

$$\beta_1, \Phi_m - ?$$

Решение:

Яркость фона неба, на котором близорукий астроном наблюдает звезды, не зависит от того, использует он очки или нет. Следовательно, человек видит звезду, если освещенность, создаваемая этой звездой на каком-либо элементе сетчатки его глаза, превосходит освещенность, создаваемую фоном небосвода (в противном случае, элемент сетчатки не может выделить сигнал и звезда растворится в фоне небосвода для

астронома). Пусть ℓ_0 – характерный линейный размер одного элемента сетчатки, задающий разрешающую способность здорового глаза (соответствующий β_2).

Когда астроном проводит наблюдения звезд в подходящих очках, вся световая энергия от звезды, попадающая в зрачок глаза, направляется в один элемент сетчатки. Минимальный поток световой энергии Φ_0 , необходимый для того, чтобы звезда была замечена, соответствует блеску звезды $m_2 = m_{\max} = 6^{\text{m}}$.

Если астроном-любитель снимает очки, то величина Φ_0 для каждого элемента сетчатки не изменяется. Однако, фокус одиночного зрачка располагается ближе к последнему (дальше от сетчатки, см. рис. 9), нежели в случае,

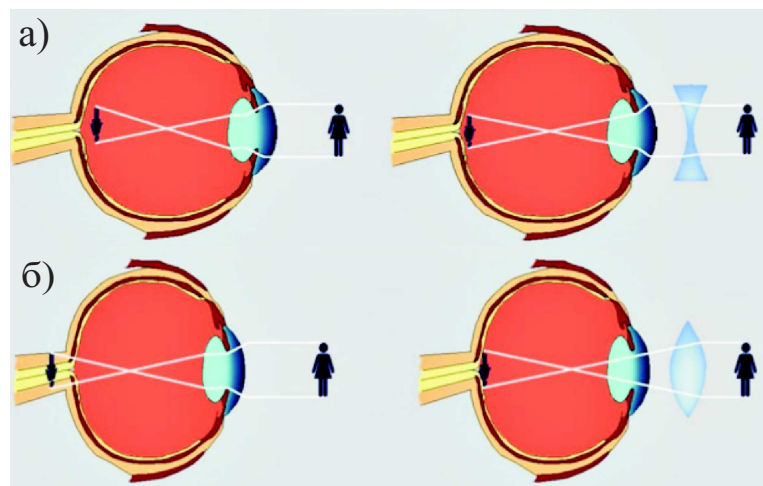


Рис. 9: к определению а) близорукости (здесь изображение формируется перед сетчаткой. Исправляется использованием рассеивающей линзы, смещающей фокус к сетчатке) и б) дальнозоркости (здесь изображение формируется за сетчаткой. Исправляется использованием собирающей линзы, смещающей фокус к хрусталику) человеческого глаза.

когда астроном использует очки. В итоге, световой пучок от звезды "размазывается" в пятно больших размеров и попадает на N элементов сетчатки. Чтобы астроном увидел звезду, на его зрачок должен падать поток

$$\Phi = N \cdot \Phi_0,$$

соответствующий звездной величине m_1 :

$$N = \frac{\Phi}{\Phi_0} = 10^{0.4(m_2 - m_1)} = 10. \quad (68)$$

С другой стороны, N можно представить как

$$N = \frac{\pi \ell^2}{\pi \ell_0^2} = \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right)^2 \Rightarrow \ell = \ell_0 \sqrt{N} = \sqrt{10} \cdot \ell_0 \quad (69)$$

здесь $\pi \ell^2$ – площадь светового пятна звезды без очков; $\pi \ell_0^2$ – площадь светового пятна на сетчатке глаза астронома в очках. Согласно рис. 10, разрешающая способность глаза пропорциональна величине ℓ , т.е.

$$\beta = \frac{\ell}{L}, \Rightarrow \quad (70)$$

$$\beta_1 = \frac{\ell_0}{L}, \beta_2 = \frac{\ell}{L}, \Rightarrow$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\ell}{\ell_0}, \Rightarrow \beta_1'' = \beta_2'' \left(\frac{\ell}{\ell_0} \right) = 10^{0.2(m_2 - m_1)} \beta_2'' = \sqrt{10} \cdot \beta_2 = 316''. \quad (71)$$

В отсутствие очков зрачок фокусирует свет от звезды в точке F_1 (см. рис. 10.а). Далее распространяясь, свет падает на сетчатку глаза CC' . Из $\triangle OA_1B_1$, $\triangle F_1A_1B_1$ следует, что

$$\ell = \beta_1 L \text{ или } \ell = 2(L - f_1) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = (L - f_1) \frac{D_y}{f_1}, \Rightarrow$$

$$\beta_1 = D_y \left(\frac{L - f_1}{L f_1} \right) = D_y \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{L} \right). \quad (72)$$

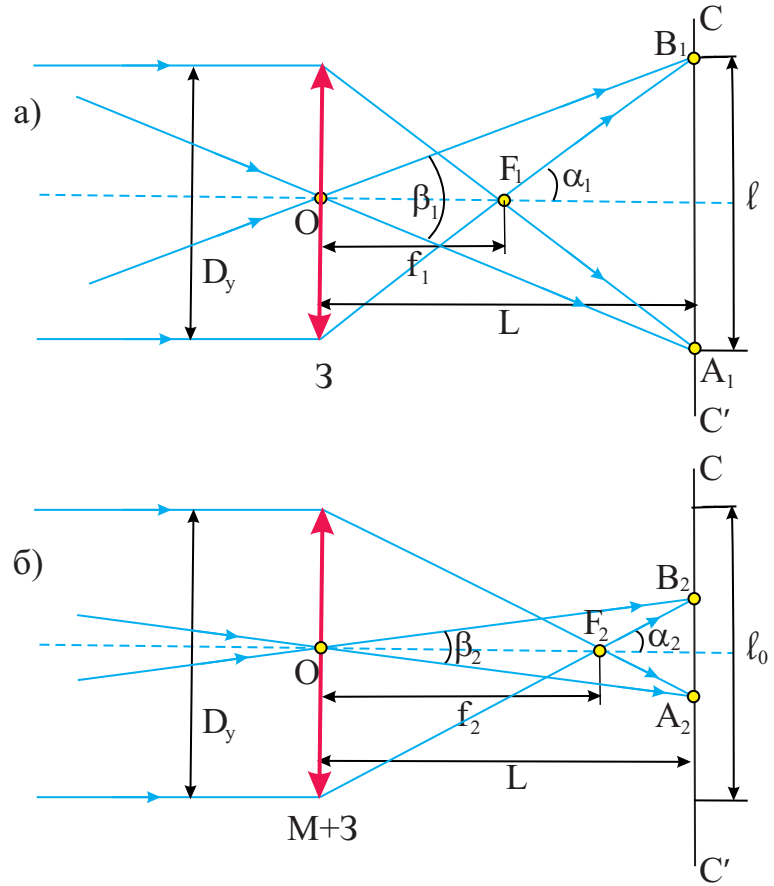


Рис. 10: к определению хода лучей в оптической системе а) "хрусталик-сетчатка", б) "мениск-хрусталик-сетчатка".

Аналогично рассуждая, можем записать для ΔOA_2B_2 , $\Delta F_2A_2B_2$ в случае, когда у астронома одеты очки (см. рис. 10.б):

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \beta_2 L \text{ или } \ell_0 = 2(L - f_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = (L - f_2) \frac{D_y}{f_2} \Rightarrow \\ \beta_2 &= D_y \left(\frac{(L - f_2)}{L f_2} \right) = D_y \left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{L} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Вычтем из (72) уравнение (73):

$$\beta_1 - \beta_2 = D_y \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right). \quad (74)$$

С другой стороны, для системы "зрачок-мениск" оптическую силу можно записать в виде:

$$\Phi_{3+M} = \Phi_3 + \Phi_M - d \Phi_3 \cdot \Phi_M, \quad \Phi_3 = \frac{1}{f_1}, \quad \Phi_{3+M} = \frac{1}{f_2}, \quad (75)$$

где Φ_3, Φ_M – оптические силы зрачка и миниска очков, d – расстояние между миниском и зрачком. Поскольку, в условии задачи ничего не сказано о величине d , то будем ее полагать равной нулю. Тогда (75) можно переписать так

$$\Phi_M = \Phi_{3+M} - \Phi_3 = - \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right). \quad (76)$$

Из (74) и (76) следует что

$$\Phi_M = - \frac{(\beta_1'' - \beta_2'')}{206265''} \frac{1}{D_y} = -0.15 \text{ дптр}. \quad (77)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (71) и (77). ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Галактическое трио»

Дано:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0^h 42.8^m, \\ \delta_0 &= 41^\circ 16', \\ r_0 &= 772 \text{ кпк}, \\ M_0 &= 8 \cdot 10^{11} M_\odot, \\ R_0 &= 1.1 \cdot 10^5 \text{ св. лет}, \\ \alpha_1 &= 0^h 42.7^m, \\ \delta_1 &= 40^\circ 52', \\ r_1 &= 763 \text{ кпк}, \\ D_1'' &= 7', \\ M_1 &= 3 \cdot 10^9 M_\odot, \end{aligned}$$

Решение:

а) Для определения расстояний $\Delta_{01}, \Delta_{02}, \Delta_{12}$ между галактиками воспользуемся теоремой косинусов

$$\Delta_{i,j} = r_i^2 + r_j^2 - 2 r_i r_j \cdot \cos \sigma_{i,j}, \quad (78)$$

здесь $i, j = 0, 1, 2$; $\sigma_{i,j}$ – угол между направлениями на i ую и j ую галактики. Для определения последнего воспользуемся формулой (22) из задачи № 7 настоящего релиза, с заменой $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \alpha_i, \alpha_j$, $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \delta_i, \delta_j$, т.е.,

$$\cos \sigma_{i,j} = \cos \delta_i \cos \delta_j \cdot \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \sin \delta_i \cdot \sin \delta_j. \quad (79)$$

Дано:

$$\alpha_2 = 0^h 40.4^m,$$

$$\delta_2 = 41^\circ 41',$$

$$r_2 = 825 \text{ кпк},$$

$$D_2'' = 21.9',$$

$$\mathfrak{M}_2 = 10^{10} \mathfrak{M}_\odot.$$

Найти:

$$\Delta_{01}, \Delta_{02}, \Delta_{12} - ?$$

$$T_1, T_2 - ?$$

$$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 - ?$$

$$\mathfrak{R}_{1 \max}, R_{2 \min} - ?$$

Решение:

Выполняя численные расчеты σ_{ij} и Δ_{ij} по формулам (78) и (79), получим значения искоемых расстояний, представленных в таблице 1.

б) Для определения периода обращения спутников галактик воспользуемся третьим обобщенным законом Кеплера:

$$\frac{(\mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_i) T_i^2}{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus) T_\oplus^2} = \frac{\Delta_i^3}{a_\oplus^3}, \Rightarrow$$

$$T_i \approx T_\oplus \left(\frac{\Delta_i}{a_\oplus} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_i} \right)^{1/2}. \quad (80)$$

Численные значения периодов обращения галактик-спутников представлены в таблице 2. В выражении (80) $T_\oplus = 1$ год – сидерический период обращения Земли вокруг Солнца. $a_\oplus = 1$ а.е. – большая полуось земной орбиты; $\mathfrak{M}_\odot, \mathfrak{M}_\oplus$ – масса Солнца и Земли соответственно.

в) Действительные значения радиусов галактик определим выражением вида

$$\mathfrak{R}_i = \frac{r_i}{2} \left(\frac{D''_i}{3438'} \right). \quad (81)$$

Численные значения искоемых величин представлены в таблице 2.

Для определения максимально допустимого значения радиуса галактики-спутника, ради простоты вычислений, будем полагать, что данные спутники имеют форму однородного шара. Устойчивость шарообразной галактики-спутника зависит от того, достаточно ли его притяжение для удержания всех частей шара, или они могут перейти на самостоятельные орбиты вокруг М31. Последнее может произойти, если какая-либо точка внутри (или хотя бы на поверхности) шара окажется в так называемой *первой точке Лагранжа* си-

Пара галактик	σ_{ij} , град	Δ_{ij} , кпк
0-1	0.400	10.48
0-2	0.613	53.68
1-2	0.924	63.31

Примечание: здесь и далее индекс $i = 0$ соответствует галактике М31, $i = 1$ – М32, $i = 2$ – М110.

Таблица 1: значения углов $\sigma_{i,j}$ и расстояний $\Delta_{i,j}$ между галактиками.

Спутник	T , лет	$\mathfrak{R}_i$, кпк	$\mathfrak{R}_{\max i}$, кпк
М32	$1.121 \cdot 10^8$	0.777	1.628
М110	$1.294 \cdot 10^9$	2.628	12.458

Таблица 2: значения периода обращения T_i , действительного радиуса $\mathfrak{R}_i$ и максимально возможного $\mathfrak{R}_{\max i}$ радиуса галактики-спутника.

стемы "галактика-спутник".

Эта точка находится на отрезке, соединяющей центры материнской галактики и спутника, и ее положение определяется тем, что материальное тело в этой точке будет обращаться вокруг центра главной галактики с той же угловой скоростью ω_i , что и i -я галактика-спутник, оставаясь на линии, соединяющей центры галактик. При дальнейшем удалении от спутника, тело перейдет на самостоятельную орбиту, вокруг центра главной галактики. Таким образом, максимальный радиус спутника $\mathfrak{R}_{\max i}$ есть расстояние от центра спутника до первой точки Лангранжа. Найдем это расстояние.

Угловая скорость движения спутника равна

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad (82)$$

На крайнюю часть спутника, находящегося ближе всего к центру главной галактики, действуют силы притяжения от галактики и самого спутника. Они направлены в противоположные стороны, как показано на рис. 11, и определяют соответствующие ускорения:

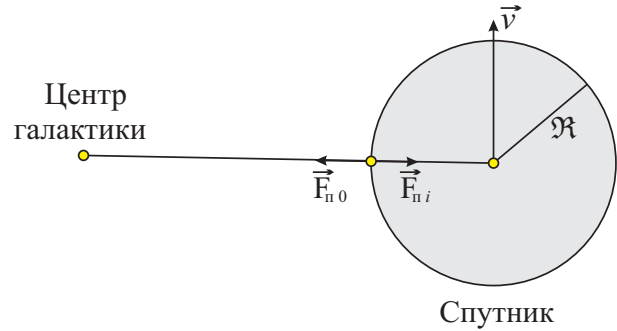


Рис. 11: к определению искомой величины.

$$a_i = \frac{G\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{R}_i^2}, \quad a_{0i} = \frac{G\mathfrak{M}_0}{(\Delta_{0i} - \mathfrak{R}_i)^2}. \quad (83)$$

Резльтирующее ускорение пробного тела в данной точке есть

$$a_i = a_{0i} - a_i \quad \text{или} \quad a_i = \omega_i^2 (\Delta_{0i} - \mathfrak{R}_i). \quad (84)$$

Учитывая, что для галактики-спутника можно также записать центростремительное ускорение в виде:

$$\bar{a}_i = \omega_i^2 \Delta_{0i} = \frac{G\mathfrak{M}_0}{\Delta_{0i}^2}, \Rightarrow G\mathfrak{M}_0 = \omega_i^2 \Delta_{0i}^3. \quad (85)$$

В итоге, (84) можно переписать в виде:

$$\omega_i^2 (\Delta_{0i} - \mathfrak{R}_i) = \frac{\omega_i^2 \Delta_{0i}^3}{(\Delta_{0i} - \mathfrak{R}_i)^2} - \frac{G\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{R}_i^2}, \Rightarrow$$

учитывая также, что, как правило, $\mathfrak{R}_i \ll \Delta_{0i}$, в итоге получаем

$$\omega_i^2 \Delta_{0i} \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_i}{\Delta_{0i}}\right) = \omega_i^2 \Delta_{0i} \left(1 + \frac{2\mathfrak{R}_i}{\Delta_{0i}}\right) - \frac{G\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{R}_i^2}, \Rightarrow$$

$$3\omega_i^2 \mathfrak{R}_i = \frac{G\mathfrak{M}_i}{\mathfrak{R}_i^2}, \Rightarrow \mathfrak{R}_i = \left(\frac{G\mathfrak{M}_i}{3\omega_i^2}\right)^{1/3}, \quad \mathfrak{R}_{\max i} = \Delta_{0i} \left(\frac{\mathfrak{M}_i}{3\mathfrak{M}_0}\right)^{1/3}. \quad (86)$$

Численные значения $\mathfrak{R}_{\max i}$ для спутников M32 и M110 представлены в таблице 2.

Ответ: к задаче представлен выражениями (78)-(81), (86), численные значения искомых величин представлены в таблицах 1 и 2. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Угол отклонения светового луча в гравитационном поле звезды»

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
$\mathfrak{M}, \mathfrak{R}.$	Для решения настоящей и последующих задач будем использовать следующие предположения о гравитационной микролинзе и излучении. 1. Гравитационная микролинза – это тело, имеющее форму шара радиуса $\mathfrak{R}$ и массы $\mathfrak{M}$, со сферически-симметричным распределением вещества, угловые размеры которого настолько малы (с точки зрения наблюдателя), что оно видится как точечный источник света.
<u>Найти:</u>	
$\theta_1, \theta_{\text{tot}} - ?$	
$\theta_{\text{tot}}^{(\max)} - ?$	2. Электромагнитное излучение далекого точечного источника света будем представлять <i>потоком фотонов</i> – квантов электромагнитного поля. Динамическая масса фотона m_γ определяется формулой Эйнштейна:

$$m_\gamma = \frac{E_\gamma}{c^2} = \frac{p_\gamma}{c}, \quad (87)$$

где p_γ , E_γ – импульс, энергия фотона соответственно; c – скорость света.

Вычислим угол отклонения фотона в гравитационном поле микролинзы. Согласно закону всемирного тяготения, на фотон, находящийся на расстоянии r от центра микролинзы, действует сила притяжения ($\vec{F}_G$), направленная по прямой, соединяющей рассматриваемые объекты, вектор которой представляется в виде:

$$\vec{F}_G = -\frac{G m_\gamma \mathfrak{M}}{r^3} \vec{r}, \quad (88)$$

где $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная, $\vec{r}$ – радиус-вектор фотона, проведенный из центра микролинзы, r – его величина.

Будем полагать, что изначально фотон двигался вдоль прямой с *прицельным параметром* b (см. рис. 12.а). В результате взаимодействия с микролинзой, фотон будет двигаться по геодезической кривой, "сближающейся" с данным телом.

Углом отклонения (θ) фотона γ будем называть *угол между векторами начального и конечного импульсов фотонов* (см. рис. 12.а). Степень отклонения от прямолинейного движения, очевидно, зависит от величины массы тела $\mathfrak{M}$ и от прицельного параметра b .

Далее рассмотрим *случай слабого гравитационного поля* для сферического тела, когда кривизной траектории фотона в расчетах можно пренебречь,

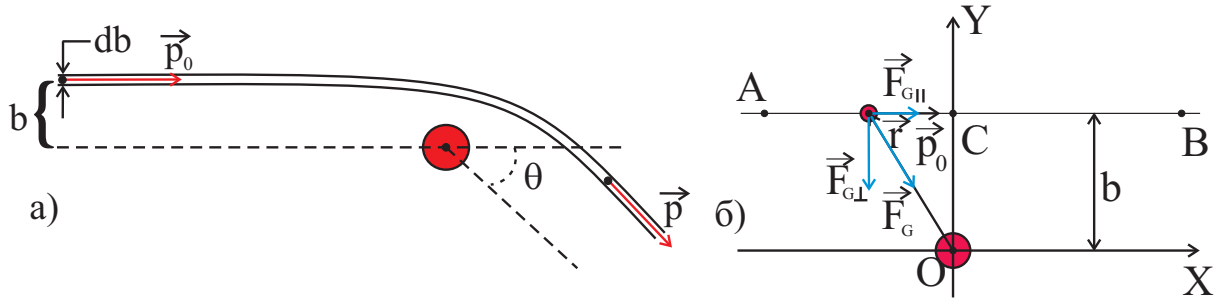


Рис. 12: к определению рассеяния фотона в гравитационном поле микролинзы.

другими словами, будем полагать, что фотон движется по прямой AB (см. рис. 12.б) все время взаимодействия. Запишем закон изменения импульса фотона в течение бесконечно малого промежутка времени dt :

$$d\vec{p}_\gamma = \vec{F}_G dt.$$

Далее введем в рассмотрение декартову систему координат так, как показано на рис. 12.б). Запишем векторное уравнение в проекциях на координатные оси:

$$dp_{\gamma x} = F_{Gx} dt, \Rightarrow dp_{\parallel} = F_{Gx} \frac{dx}{c}; \quad dp_{\gamma y} = F_{Gy} dt, \Rightarrow dp_{\perp} = F_{Gy} \frac{dx}{c}.$$

При записи последних выражений учтено, что фотон вдоль оси OX движется по закону $x = x_0 + ct$; следовательно, $dt = dx/c$; знаки $\parallel$ и $\perp$ указывают на проекции импульса, параллельную и перпендикулярную к направлению первоначального движения фотона. Проинтегрируем полученные дифференциальные уравнения. Тогда проекции изменения импульса фотона можно записать в виде:

$$\Delta p_{\parallel} = -\frac{G m_\gamma \mathfrak{M}}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Delta p_{\perp} = -\frac{G m_\gamma \mathfrak{M} b}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (89)$$

очевидно, что первый интеграл системы (89) равен нулю – интеграл вычисляется по симметричному интервалу (относительно точки O) от нечетной подынтегральной функции.

Выполнив ряд математических преобразований, получаем для второго интеграла следующий результат:

$$\Delta p_{\perp} = -\frac{2G m_\gamma \mathfrak{M}}{b c} = -\frac{2G p_0 \mathfrak{M}}{b c^2}.$$

Следовательно, угол отклонения светового луча представляется в виде:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{|\Delta p_{\perp}|}{p_0} = \frac{2G \mathfrak{M}}{b c^2}, \Rightarrow \theta_1 \approx \frac{2G \mathfrak{M}}{b c^2}. \quad (90)$$

Данный результат получен в приближении ньютоновской (потенциальной) теории тяготения. Однако, как было показано еще А. Эйнштейном, гравитационное поле является тензорным и, потому определяется не только массами

взаимодействующих тех, но и кривизной пространства. А. Эйнштейном было также установлено, что кривизна пространства дает такой же вклад в итоговый результат в $\Delta p_{\perp}$, что и ньютоновская теория тяготения. Следовательно, окончательно имеем следующее выражение для изменения импульса:

$$\Delta p_{\perp}^{(\text{tot})} = -\frac{4G p_0 \mathfrak{M}}{b c^2}, \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_{\text{tot}} = \frac{|\Delta p_{\perp}^{(\text{tot})}|}{p_0} = \frac{4G \mathfrak{M}}{b c^2}. \quad (91)$$

Поскольку угол θ_{tot} мал, то на практике его, как правило, представляют в угловых секундах:

$$\theta_{\text{tot}}'' = \frac{4G \mathfrak{M}}{b c^2} \cdot 206265'' = \frac{2 \mathfrak{R}_{Sh}}{b} \cdot 206265''. \quad (92)$$

где $\mathfrak{R}_{Sh}$ – *радиус Шварцшильда* – критический радиус небесного тела, при котором под влиянием своего собственного притяжения оно становится черной дырой. Это радиус горизонта событий черной дыры, из которого ничто не может вырваться, даже свет. Последний определяем выражением

$$\mathfrak{R}_{Sh} = \left(\frac{2G \mathfrak{M}}{c^2} \right). \quad (93)$$

Важно отметить, что угол θ'' , согласно (92), не зависит от частоты (длины волны) фотона, т.о., фотоны разных энергий в гравитационно поле микролинзы отклоняются на равные углы при прочих равных условиях. Это свойство называется *ахроматичностью эффекта микролинзирования*.

Согласно выражению (92), угол θ_{tot}'' принимает максимальное значение при минимальном значении прицельного параметра b . Очевидно, что последний не может быть меньше радиуса звезды, тогда

$$\theta_{\text{tot}}^{(\text{max})}'' = \frac{4G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R} c^2} \cdot 206265'' = \frac{2 \mathfrak{R}_{Sh}}{\mathfrak{R}} \cdot 206265''. \quad (94)$$

Данный параметр будет наибольшим для звезд, у которых большая масса (порядка нескольких масс Солнца) и при этом очень компактные размеры. Самым компактным объектом является черная дыра, но она не является звездой в классическом понимании. Кроме того, для ее сильного гравитационного поля расчет угла θ_{tot} является много более сложным и не описывается результатом (94). То же самое можно сказать о нейтронной звезде.

Для белых карликов наша модель является рабочей и дает значение, например, для Сириуса В (с массой $\mathfrak{M} = 1.018 \cdot \mathfrak{M}_{\odot}$ и радиусом – $\mathfrak{R} = 0.0084 \cdot \mathfrak{R}_{\odot}$) значение $\theta_{\text{tot}}^{\text{max}''} \approx 220'' = 3.65'$. Однако и белые карлики не относятся к классическим звездам.

Наиболее холодными и плотными звездами (в классическом смысле) являются красные карлики (при $\mathfrak{M} = 0.1 \cdot \mathfrak{M}_{\odot}$ и $\mathfrak{R} = 0.1 \cdot \mathfrak{R}_{\odot}$) для которых получаем величину, подобную значению для Солнца – $\theta_{\text{tot}}^{\text{max}''} \approx 1.8''$. Самые разреженные звезды – это красные гипергиганты (при $\mathfrak{M} = 50 \cdot \mathfrak{M}_{\odot}$, $\mathfrak{R} = 2 \cdot 10^3 \cdot \mathfrak{R}_{\odot}$) – $\theta_{\text{tot}}^{\text{max}''} \approx 0.045''$.

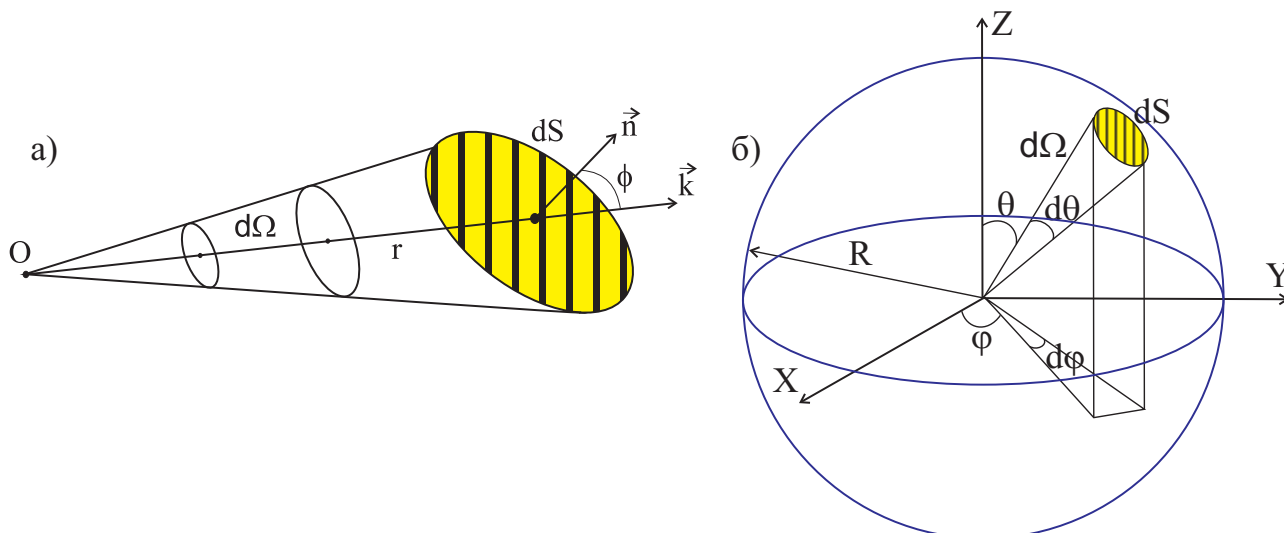


Рис. 13: к определению телесного угла а) в общем случае, б) на поверхности сферы.

Ответ: к задаче представлен выражениями (90), (92), (94); наибольшее значение для белых карликов (не являются звездами в классическом смысле) – $\theta_{\text{tot}}^{\text{max}} \approx 220''$, для красных карликов – $\theta_{\text{tot}}^{\text{max}} \approx 1.8''$; наименьшее значение для красных гипергигантов – $\theta_{\text{tot}}^{\text{max}} \approx 0.045''$. ($\$_{\text{max}} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Сечения рассеяния фотонов в гравитационном поле линзы»

Решение. Прежде всего, воспользуемся определением понятия **телесного угла** – части пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол). *Границей телесного угла* является некоторая коническая поверхность (см. рис. 13.а). Частными случаями телесного угла являются трехгранные и многогранные углы. Величина бесконечно малого телесного угла $d\Omega$, в общем случае, есть

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \cos \phi, \quad (95)$$

где dS – величина бесконечно малой площадки, стягивающей данный телесный угол, r – расстояние от вершины угла до данной площадки, ϕ – угол между направлениями "вершина угла – площадка" и нормали $\vec{n}$ к поверхности. Телесный угол, в частном случае, можно также определить отношением площади той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса сферы (см. рис. 13.б):

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}. \quad (96)$$

Учитывая, что элементарная площадка dS представляется в сферических координатах (согласно рис. 13.б) в виде:

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

следовательно, телесный угол $d\Omega$ можно представить в виде:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (97)$$

Единицей измерения телесного угла в системе СИ является стерadian (срад)², равный телесному углу, вырезающему из сферы радиуса R поверхность с площадью R^2 . Полная сфера образует телесный угол, равный 4π срад (полный телесный угол).

Падающие частицы не обладают ни фиксированным прицельным параметром b , ни фиксированным азимутальным углом φ , а равномерно распределены по азимутальному углу (относительно направления падения пучка, выбранного в качестве оси ОХ) и по b (см. рис. 12.а). Однако, все падающие частицы, заключенные в "трубке", площадь сечения которой равна $b db d\varphi$, будут рассеиваться в бесконечно малый телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

Процессы упругого рассеяния можно охарактеризовать **дифференциальным эффективным сечением рассеяния**, определяемым выражением (2). Из последнего выражения для потока следует, что

$$dF_{\text{sca}} = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] j_0 d\Omega.$$

Иначе, указанные частицы, падая на мишень, проходят за единицу времени через площадку $b db d\varphi$ (см. рис. 12.а). Тогда,

$$dF_{\text{sca}} = j_0 b db d\varphi.$$

Откуда, с учетом (97), следует явное выражение для дифференциального сечения рассеяния в единичный телесный угол

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (98)$$

Вычислим дифференциальное сечение рассеяния для фотона, рассеянного в гравитационном поле линзы. Согласно выражению (91), имеем

$$b = \left(\frac{4G \mathfrak{M}}{c^2} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}, \Rightarrow \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left(\frac{4G \mathfrak{M}}{c^2} \right) \frac{1}{\cos^2 \theta} = \left(\frac{4G \mathfrak{M}}{c^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta}. \quad (99)$$

В итоге, получаем следующее выражение для дифференциального сечения:

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] = \left(\frac{4G \mathfrak{M}}{c^2} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta}, \Rightarrow \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] = 4 \mathfrak{R}_{sh}^2 \frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta}, \quad (100)$$

²Считается, что телесный угол имеет нулевую физическую размерность. Кроме стерadianов, телесный угол может измеряться в квадратных градусах, квадратных минутах и квадратных секундах, а также в долях полного телесного угла.

здесь $\mathfrak{R}_{Sh}$ – радиус Шварцшильда (его определение было дано в предыдущей задаче). В случае малого угла отклонения θ , т.е. $\theta \ll 1$, следует, что $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Тогда можно записать приближенный результат для дифференциального сечения рассеяния:

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] \approx \left(\frac{4G\mathfrak{M}}{c^2} \right)^2 \left(\frac{2 - \theta^2}{2\theta^4} \right). \quad (101)$$

Полное сечение процесса рассеяния есть

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{\Omega} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] d\Omega = 2\pi \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} b(\theta) \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta = 2\pi \left(\frac{4G\mathfrak{M}}{c^2} \right)^2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta.$$

Вычислим последний интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta &= \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d \sin \theta}{\sin^3 \theta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \Big|_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta_{\min}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_{\max}} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\theta_{\min}^2} - \frac{1}{\theta_{\max}^2} \right]. \end{aligned} \quad (102)$$

Последний результат справедлив лишь при малых углах – $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$. Т.о., окончательное выражение для полного эффективного сечения рассеяния есть

$$\sigma_{\text{tot}} = 4\pi \mathfrak{R}_{Sh}^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta_{\min}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_{\max}} \right]. \quad (103)$$

В численном анализе полученных результатов удобнее использовать безразмерные величины дифференциального и полного сечений, которые можно получить из (100) и (103) делением на площадь геометрического поперечного сечения сферического тела линзы $S_G = \pi \mathfrak{R}^2$:

$$S_{\Omega} = \frac{1}{S_G} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] = \frac{4}{\pi} x^2 \frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta}, \quad \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}, \quad (104)$$

$$S_{\text{tot}} = 4x^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta_{\min}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_{\max}} \right], \quad \text{где } x = \frac{\mathfrak{R}_{Sh}}{\mathfrak{R}}. \quad (105)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (100), (101), (103), (104), (105). (\$_{\text{max}} = 14\$ баллов).

Задача № 18. «Задача о формировании «духов» гравитационной микролинзой»

Решение. Рассмотрим задачу о формировании изображений («духов») первичного точечного источника света *гравитационной микролинзой*.

1. Пусть в точке D (см. рис. 14) находится точечная гравитационная линза (дефлектор), в точке S – источник света (звезда фона), в точке O находится

наблюдатель. Поскольку, вдали от тела D фотон движется практически по прямой линии, то его траекторию можно аппроксимировать двумя прямыми линиями, изломанными вблизи тела D (в точках A и B). Угол α между ними показывает, насколько отклонился фотон, пройдя гравитационное поле тела D (определяется выражением (91)).

Угол между направлением на дефлектор и истинное положение источника S обозначим через θ . Два луча света (изображены двумя жирными линиями), прошедшие по разные стороны тяготеющего тела, будут отклонены от первоначальных направлений в сторону этого тела. Если источник света S находится достаточно далеко от тела D , то лучи начнут сходиться и пересекутся в некоторой удаленной точке O .

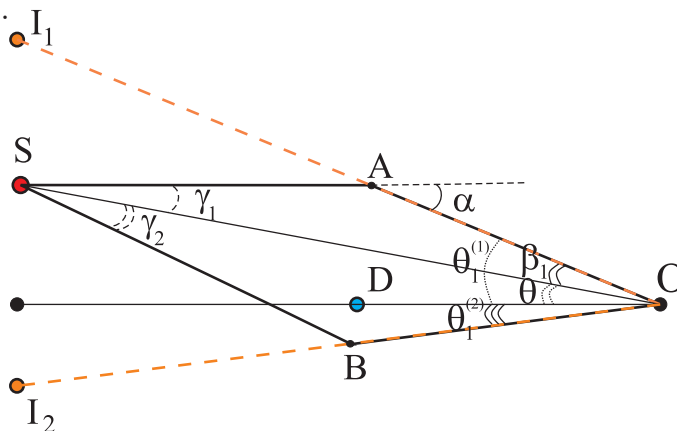


Рис. 14: к определению искривления лучей и образования изображений источника света S в гравитационном поле точечной линзы D .

Наблюдатель, находящийся в точке O , увидит два изображения (I_1 , I_2 , называемых "духами") одного и того же источника света S . По сути, в этом заключается эффект гравитационной микролинзы. Для трех физических тел (источник света S , гравитирующее тело D и наблюдатель O), изображенных на рис. 14, определим расстояния: расстояние от S до D обозначим через D_{sd} , а от D до наблюдателя O – D_d , расстояние между источником света и наблюдателем обозначим D_s . Пусть $\theta_1^{(1)}$ и $\theta_1^{(2)}$ – углы между направлением на дефлектор и видимые положения источника ("духи") I_1 и I_2 соответственно. Пусть углы β_1 , β_2 – углы между направлением на источник света S и направлениями на видимые изображения I_1 и I_2 .

Плоскость, проходящая через точку, где находится источник, перпендикулярная направлению "источник-наблюдатель", называется **плоскостью источника**. Плоскость, проходящая через точку, где находится гравитационная линза, перпендикулярная направлению "линза-наблюдатель", называется **плоскостью линзы**.

Из рис. 14, для плоского треугольника $\triangle AOS$ нетрудно установить, что

$$\alpha = \beta_1 + \gamma_1, \quad (106)$$

$$\theta_1 = \theta + \beta_1, \quad (107)$$

Согласно теореме синусов для $\triangle AOS$ имеем

$$\frac{AO}{\sin \gamma_1} = \frac{SA}{\sin \beta_1}.$$

Поскольку, углы β_1, γ_1 являются малыми, то $\sin \beta_1 \approx \beta_1, \sin \gamma_1 \approx \gamma_1$. Будем также считать, что угол θ мал; поэтому $SA \approx SD = D_{sd}, AO \approx DO = D_d$. Следовательно,

$$D_d \beta_1 = D_{sd} \gamma_1. \quad (108)$$

Выразим из уравнения (106) параметр β_1 и подставим его в уравнение (107), с учетом того, что $\alpha = 4G \mathfrak{M}/(b c^2)$, тогда

$$\theta_1 = \theta + \alpha - \gamma_1 = \theta + \frac{4G \mathfrak{M}}{b c^2} - \gamma_1$$

Затем из (108) выразим $\gamma_1 = \beta_1(D_d/D_{sd})$. В последнем выражении учтем, что $\beta_1 = \theta_1 - \theta$, согласно (107). Примем также во внимание, что прицельный параметр $b \approx DA \approx D_d \cdot \theta_1$. В итоге имеем

$$\theta_1 = \theta + \frac{4G \mathfrak{M}}{D_d \theta_1 c^2} - (\theta_1 - \theta) \frac{D_d}{D_{sd}}.$$

Умножим последнее уравнение на θ_1 и приведем подобные члены:

$$\theta_1^2 \left(1 + \frac{D_d}{D_{sd}}\right) = \theta_1 \theta \left(1 + \frac{D_d}{D_{sd}}\right) + \frac{4G \mathfrak{M}}{D_d c^2}.$$

Поделим всё уравнение на сумму двух слагаемых, стоящих при θ_1^2 . В итоге, получаем следующее уравнение

$$\theta_1^2 - \theta \theta_1 - \theta_0^2 = 0, \quad \text{где} \quad (109)$$

$$\theta_0^2 = \left(\frac{4G \mathfrak{M}}{c^2}\right) \frac{D_{sd}}{D_d(D_{sd} + D_d)}. \quad (110)$$

Здесь θ_0 – угловой радиус так называемого конуса Эйнштейна. Уравнение (109) называется **уравнением гравитационной точечной сферически симметричной линзы**.

2. Параметр θ_0 удобно выразить через годовые параллаксы источника π_s и дефлектора (линзы) π_d (далее π_s'', π_d'' выражены в угловых секундах). Поскольку,

$$D_{sd} = D_s - D_d, \quad D_s = \left(\frac{a_0}{\pi_s''}\right) 206265'', \quad D_d = \left(\frac{a_0}{\pi_d''}\right) 206265'',$$

$$\theta_0^2 = 2 \mathfrak{R}_{Sh} \frac{(D_s - D_d)}{D_d D_s} = \frac{2 \mathfrak{R}_{Sh \odot}}{a_0} \left(\frac{\pi_d''}{206265''}\right) \left(1 - \frac{\pi_s''}{\pi_d''}\right) \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{\odot}}\right). \quad (111)$$

здесь $a_0 = 1$ а.е., $\mathfrak{R}_{Sh \odot} = 2G \mathfrak{M}_{\odot}/c^2 = 2.95$ км – радиус Шварцшильда

для Солнца. Выражая θ_0 в угловых секундах в результате получаем:

$$\theta_0'' = \sqrt{(206265'' \cdot \pi_d'') \left(\frac{2\mathfrak{R}_{Sh\odot}}{a_0} \right) \left(1 - \frac{\pi_s''}{\pi_d''} \right) \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} \right)}, \text{ или}$$

$$\theta_0'' = 9.025'' \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{\pi_d'' \left(1 - \frac{\pi_s''}{\pi_d''} \right) \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} \right)}. \quad (112)$$

3. Очевидно, что уравнение (109) имеет два действительных корня:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1^{(1)} = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + 4\theta_0^2}, \\ \theta_1^{(2)} = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + 4\theta_0^2} \end{array} \right\}, \quad (113)$$

соответствующих двум изображениям источника. При этом, угол между этими изображениями есть

$$\Delta\theta_1 = \theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)} = \sqrt{\theta^2 + 4\theta_0^2}. \quad (114)$$

На рис. 15, в качестве примера, приведены кривые зависимостей углов $\theta_1^{(1)}$, $\theta_1^{(2)}$, $\Delta\theta_1$ от угла θ , для гипотетического объекта с $\mathfrak{M}_N = 0.07 \cdot \mathfrak{M}_\odot$ и гелиоцентрическим расстоянием $D_d = 8800$ а.е. Очевидно, при малых значениях угла θ , значения $\theta_1^{(1)}$, $\theta_1^{(2)}$ равны по модулю θ_0 и противоположны по знаку, т.е. будут расположены симметрично относительно дефлектора. Однако, с ростом θ картина становится асимметричной: первый "дух" удаляется от дефлектора, причем $\theta_1^{(1)} \approx \theta$, а второй асимптотически приближается к дефлектору и $\theta_1^{(2)} \rightarrow 0$.

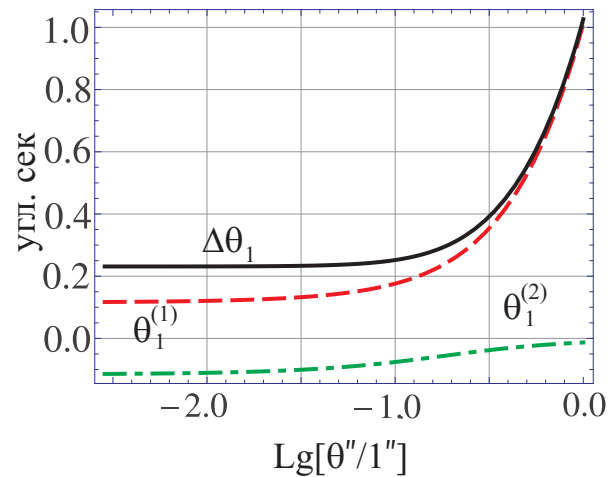


Рис. 15: Зависимость углов $\theta_1^{(1)}$, $\theta_1^{(2)}$, $\Delta\theta_1$ от угла θ для Немезиды с $\mathfrak{M}_N = 0.07 \cdot \mathfrak{M}_\odot$ и гелиоцентрическим расстоянием $D_d = 8800$ а.е.

В приведенных выше рассуждениях мы постоянно говорили о двух изображениях. Однако, два изображения образуются не всегда. Прежде предполагалось, что размеры тела D бесконечно малые, а выражение (92) справедливо для произвольного прицельного параметра b . В реальной ситуации, когда прицельный параметр одного из изображений становится меньше радиуса тела $\mathfrak{R}$, что выражается неравенством

$$\mathfrak{R} > D_d \theta_1^{(2)}, \text{ или } \theta_1^{(2)} < \rho_d, \text{ где } \rho_d = \frac{\mathfrak{R}}{D_d} \quad (115)$$

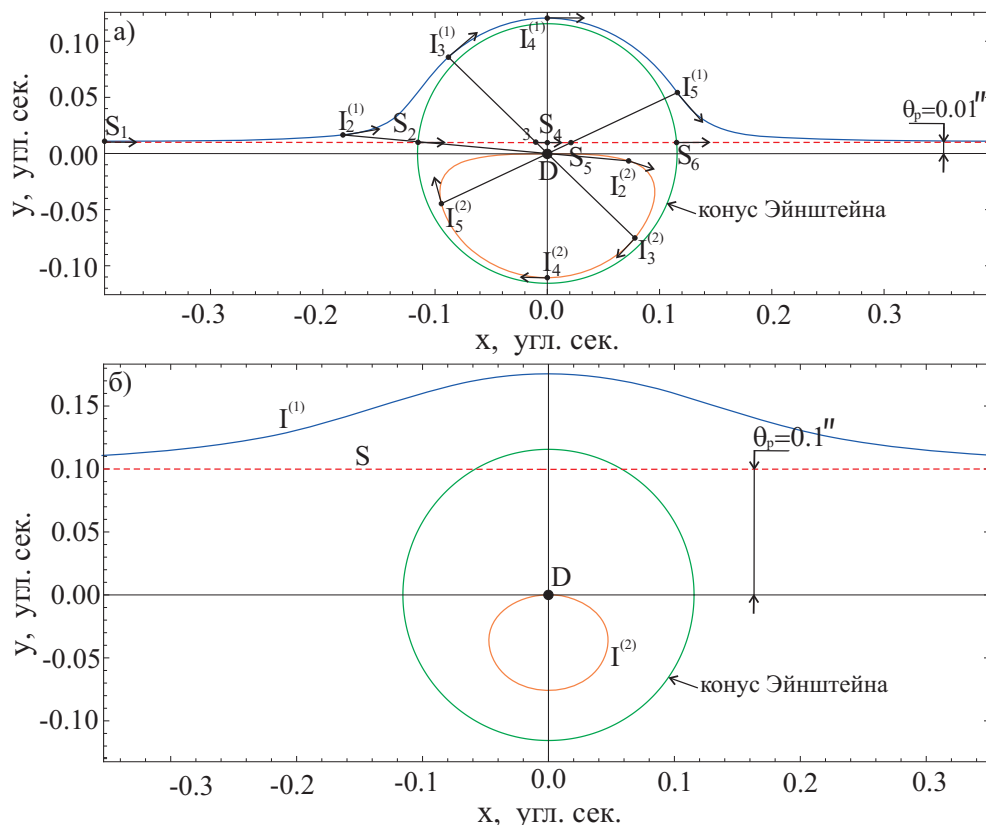
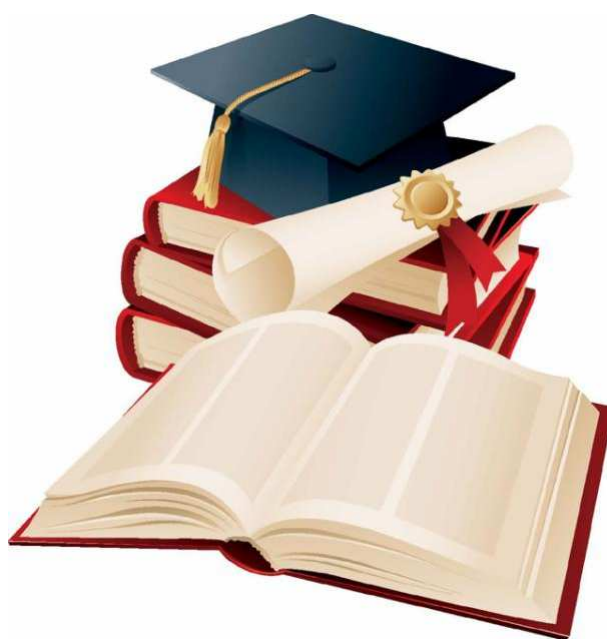


Рис. 16: траектории движения источника (S) и его изображений I_1 и I_2 (направление движения источника и изображений указаны стрелками), сформированных точечной гравитационной линзой (с массой $\mathcal{M} = 0.07 \mathcal{M}_\odot$ и расстоянием $D_d = 8800$ а.е.), при а) $\theta_p = 0.01''$; б) $\theta_p = 0.1''$.

изображение I_2 исчезает для наблюдателя O (луч света, распространяющийся вдоль линии с таким значением прицельного параметра, поглощается веществом гравитационной линзы, если последняя является непрозрачной). Поэтому в такой ситуации остается только одно изображение. Это является причиной того, что эффект гравитационной линзы не наблюдается во время солнечного затмения, несмотря на то, что есть много звезд, расположенных почти точно на оси "центр Солнца-наблюдатель" (напомним, что угловой размер Солнца примерно 0.5° , что значительно превышает размер конуса Эйнштейна Солнца на расстоянии одной астрономической единицы). В выражении (115) ρ_d – угловой радиус линзы.

4. На рис. 16 представлены результаты моделирования траекторий движения источника S , и «духов» I_1 , I_2 в плоскости линзы для двух значений прицельного углового параметра а) $\theta_p = 0.01''$, б) $\theta_p = 0.1''$. Стрелками указаны направления их движений. Важно отметить, что источник S , «духи» и дефлектор всегда расположены на одной прямой в данной плоскости. При этом второй дух I_2 отделяется от линзы, а первый – I_1 от источника, когда последний достаточно близко подходит к своему конусу Эйнштейна. ($\$_{\max} = 15$ баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альбедо – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Экс- цен- триси- тет	Наклон к плоскости эклипти- ки	Период обраще- ния	Синоди- ческий период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плот- ность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плос- кости орбиты	Гео- мет- рич. альбе- до	Вид. звезд- ная вели- чина*
	кг	массы Земли	км	ради- усы Зем- ли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

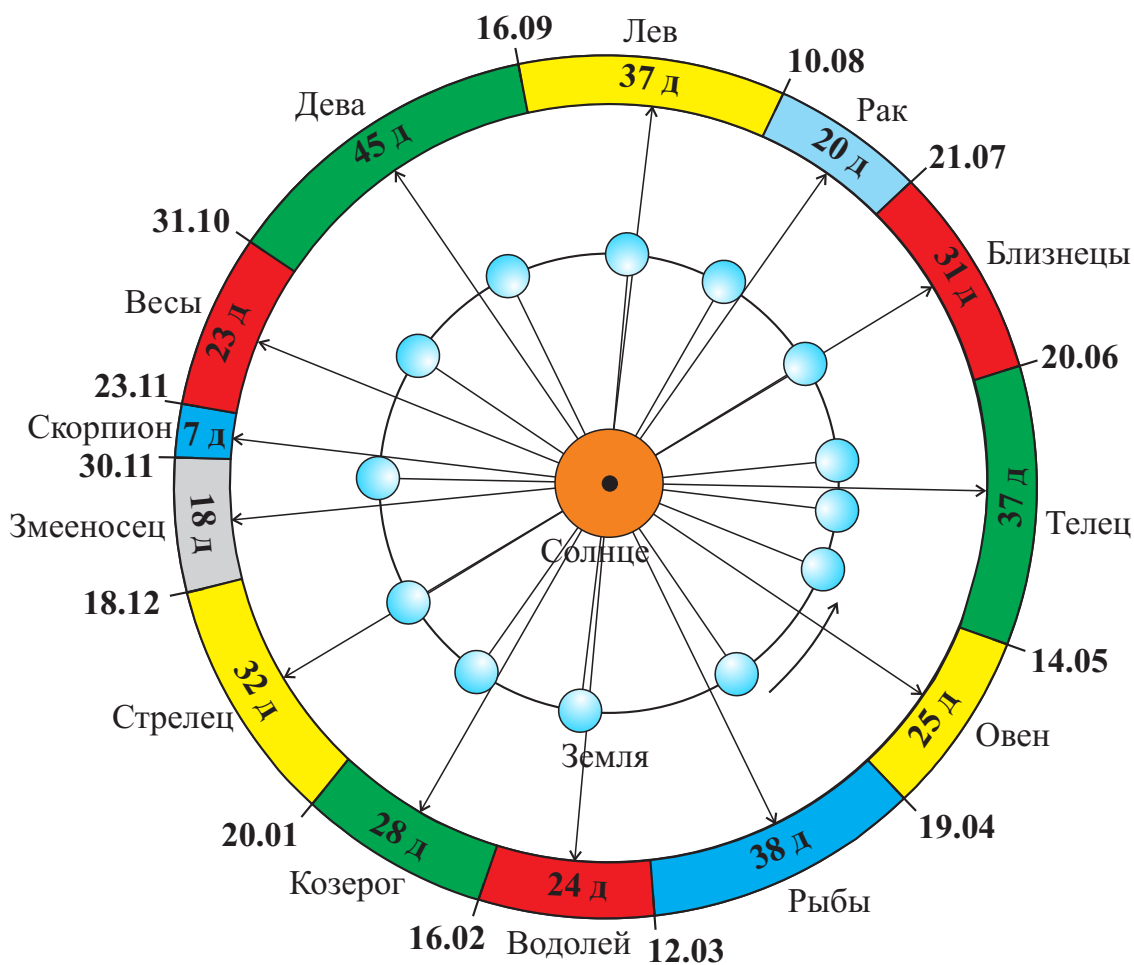


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

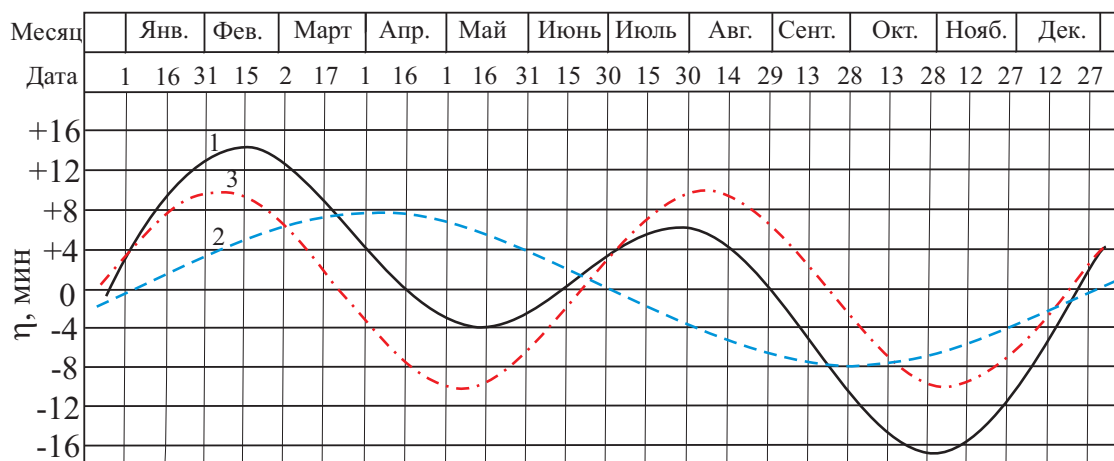


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

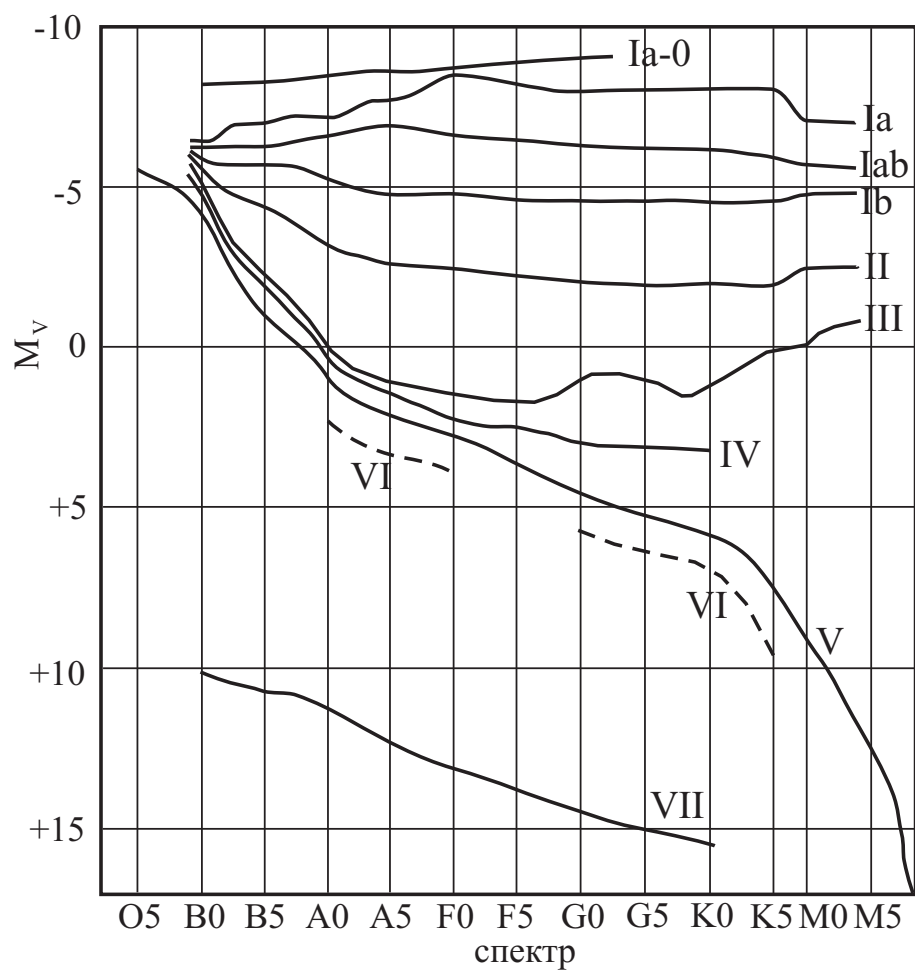


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

ПЕРИОДЫ	A	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	(H)												
2	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne					
3	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar					
4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni			
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd			
6	Cs	Ba	La*	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt			
7	Fr	Ra	Ac**	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt				
8	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd						
9	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm						

Символ элемента

Относительная атомная масса

Порядковый номер

Название элемента

Распределение электронов на энергетических уровнях

Рис. А.4. Таблица Менделеева.