

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2018
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ.
ТУР № 1



Самара, 2018 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 18 оригинальных задач трех уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В) и «Профи» (уровень С). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 8-9 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2018 среди обучающихся 8-9 классов. Тур № 1». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/solutions>

Автор задач – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СДДЮТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе *ИТ_ЕХ* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника SamRAS-2018

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

<http://vk.com/samrasolimp>

3. Сроки подачи работ SamRAS-2018 тура № 1 на проверку:
15.10.2017-15.01.2018!!!

4. Электронный ящик SamRAS-2018:
samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2018:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

https://vk.com/doc-57032141_451699934

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2018, внимательно ознакомьтесь с **«Руководством зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2018»!** Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника.**

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Отечественные песни об астрономических объектах»

Приведите примеры пяти песен (на русском языке) из репертуара современных отечественных исполнителей, в текстах которых упоминаются астрономические объекты или феномены. Для каждого примера следует обязательно указать название песни, исполнителя, автора текста песни и фрагмент песни (например, четверостишие) с упоминанием указанных понятий. Дайте последним определения. (за каждый пример – 1 балл).

Задача № 2. «Значимые астрономические даты»

Каким значимым событиям в истории астрономии отвечают следующие даты?

1. 1054 год н.э.,
2. 1610 год н.э.,
3. 1781 год н.э.,
4. 4 октября 1957 года,
5. 12 апреля 1961 года.

(за каждое событие – 1 балл).

Задача № 3. «Пепельный свет Луны»

Что такое пепельный свет Луны? На приведенной картинке (см. рис. 1) укажите (обведите ручкой) область поверхности Луны, с которой приходит данный свет к земному наблюдателю. В какое время года условия его наблюдения будут оптимальными для астронома-любителя Самарской области? (3 балла).



Рис. 1: видимый диск Луны (источник – <http://www.digitalsky.org.uk/>, Pete Lawrence).



Рис. 2: Луна и ее достопримечательности (источник – https://vk.com/astro_samara, Евгений Баранский).

Задача № 4. «Видимость Земли и продолжительность лунного дня»

Определите отношение продолжительности видимости Земли с поверхности Луны к продолжительности дня (в месте наблюдений) для гипотетического наблюдателя, находящегося на территории Моря Спокойствия (см. рис. 2). (4 балла).

Задача № 5. «Геоцентрический угол для двух точек»

Определите максимальное значение угла, между направлениями на точку поверхности Земли, где находится наблюдатель, и точку верхней границы ее атмосферы, где рождается феномен яркого метеора, если смотреть из центра планеты, при условии, что данный метеор находится в пределах прямой видимости наблюдателя. Следует полагать, что верхняя граница земной атмосферы расположена на высоте 100 км. (4 балла).

Задача № 6. «Радиусы орбит Земли и Луны»

Определите, чему равны радиусы орбит Земли и Луны, относительно их общего центра масс? С какими значениями средней скорости движутся Земля

и Луна, относительно данной точки? (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Создание самодельной трубы Кеплера»

Школьник приобрел собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 60$ см и диаметром $D = 60$ мм для создания самодельной трубы Кеплера. Какие разумно допустимые значения увеличения он может, в принципе, получить при использовании данной линзы в качестве объектива трубы? Чему равны фокусные расстояния окуляров при этом? Диаметр зрачка школьника в условиях наблюдений принять равным $d = 6$ мм. (6 баллов).

Задача № 8. «Радиус геостационарной орбиты»

Докажите, что радиус геостационарной орбиты можно представить в виде:

$$r_g = \mathfrak{R}_{\oplus} \left(\frac{V_I}{V_{eq}} \right)^{2/3},$$

где V_I – первая космическая скорость спутника Земли у его поверхности, V_{eq} – линейная скорость экваториальных точек поверхности Земли, обусловленная ее суточным вращением. (7 баллов).

Задача № 9. «Изменение дальности прямой видимости в течение суток»

Человек соблюдает классический распорядок суток. В какое время суток дальность прямой видимости для этого человека будет наибольшей? Свой ответ поясните, опираясь на основные сведения из курса «Физиология человека». Оцените на сколько метров эта величина изменяется в течение суток для человека, рост которого равен 1.8 м. (8 баллов).

Задача № 10. «Максимальное угловое расстояние от радианта»

Определите максимально возможное угловое расстояние между направлением на радиант метеорного потока и точками небосвода для наблюдателя, находящегося у поверхности Земли, где еще возможно наблюдение метеора данного потока. Следует полагать, что феномен метеора порождается на высоте 100 км над Землей. (8 баллов).

Задача № 11. «Равенство угловых диаметров планеты и ее спутника»

Имеется система «Планета-спутник» с массами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ (причем $\mathfrak{M}_2 \ll \mathfrak{M}_1$) и средними массовыми плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно ($\rho_2 = 3\rho_1$). Радиус орбиты спутника r много больше радиусов планеты ($\mathfrak{R}_1$) и спутника ($\mathfrak{R}_2$). Докажите, что для гипотетического наблюдателя, находящегося в

первой точке Лагранжа данной системы, угловые диаметры планеты и ее спутника будут равны. (9 баллов).

Задача № 12. «ИСЗ и их взаимная видимость»

Два одинаковых искусственных спутника Земли запущены на круговые орбиты высотой h . При этом плоскости их орбит взаимно перпендикулярны: одна из них совпадает с плоскостью экватора Земли, а вторая – содержит географические полюса. В момент прохождения экваториального спутника через узел орбиты полярного, последний точно находится над географическим полюсом. Определите минимальное значение h , при котором спутники хотя бы на миг окажутся в пределах прямой видимости. Чему при этом будет равно расстояние между спутниками? Определите, через какой промежуток времени такие моменты будут повторяться? Землю считать однородным шаром, процессией орбит спутников и влиянием атмосферы пренебречь. (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Видимый диск Луны и ее главное сечение»

Какую долю составляет площадь видимого диска Луны в среднее полнолуние от площади ее главного сечения? (11 баллов).

Задача № 14. «Летоисчисление на Луне и високосные годы»

Предложите модель календаря для гипотетического жителя Луны, структура которого будет подобна земному юлианскому календарю, при этом ошибка календаря не должна быть больше ошибки юлианского календаря. Сколько должно быть суток в одном невисокосном и високосном году? Сколько в таком календаре должно быть високосных лет в одно тысячелетие? (12 баллов).

Задача № 15. «Венера, Юпитер и Луна»

На фотографии (см. рис. 3), предложенной Вашему вниманию, представлена Венера, Юпитер и Луна, с указанием стрелкой направления видимого движения последней. Определите, было ли покрытие Луной какой-либо из указанных планет? Чему равны прицельные параметры Юпитера и Венеры? Если было, то чему равно время этого покрытия? (13 баллов).

Задача № 16. «Частицы темной материи в пределах Солнечной системы»

Какое количество частиц темной материи находится в пределах Солнечной системы (внешний гравитационный радиус последней – 1.87 св. года) и какова их общая масса ($\mathcal{M}_{\text{tot}}$), если полагать, что 98% от полной массы Млечного пути приходится на темную материю? Определите также среднюю концен-

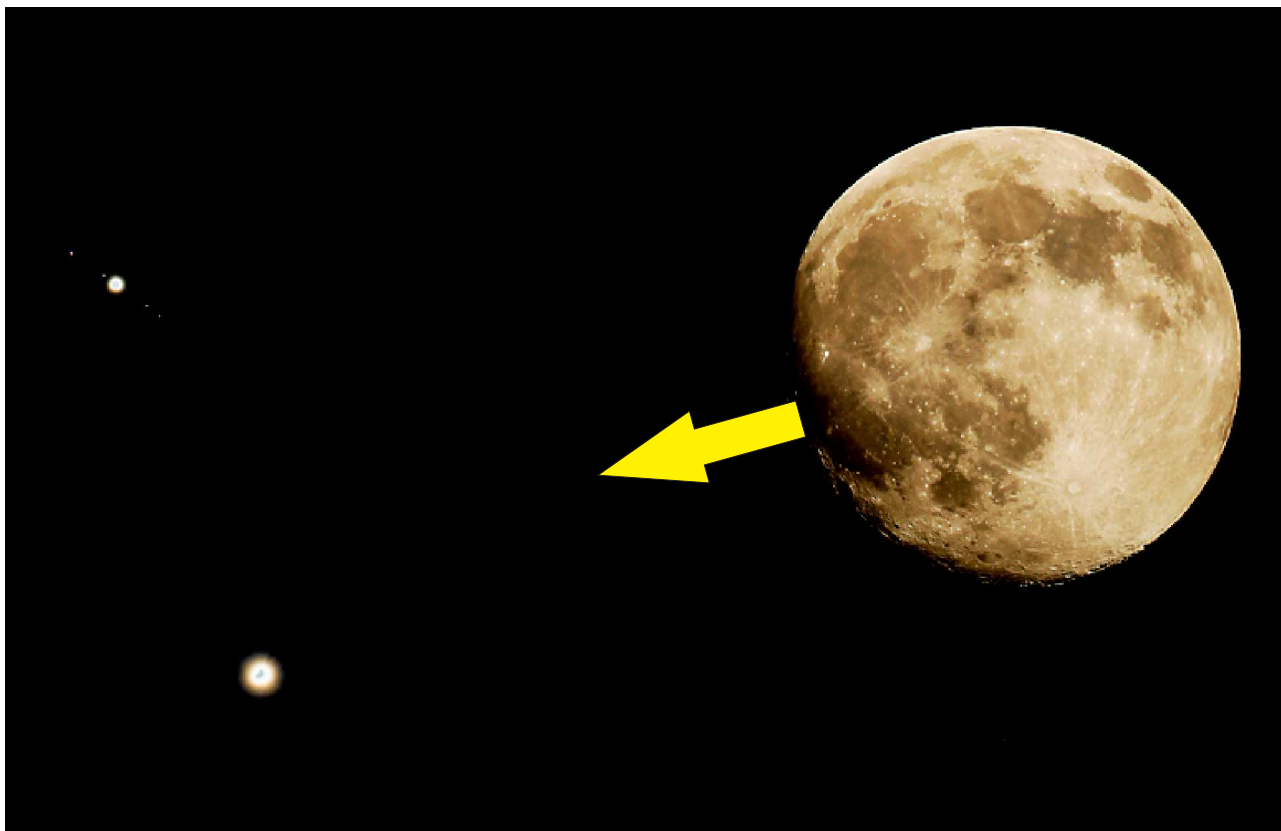


Рис. 3: Венера, Юпитер и Луна (источник – <https://apod.nasa.gov/apod/ap150702.html>, Wang, Letian).

трацию частиц и их количество в стакане объемом $V_0 = 200 \text{ см}^3$. Следует полагать, что темная материя распределена равномерно в теле Галактики-шара с диаметром $D_G = 50 \text{ кпк}$ и массой $\mathfrak{M}_G = 3.0 \cdot 10^{12} \mathfrak{M}_\odot$, массу частицы темной материи следует полагать равной 120 ГэВ. Какую долю от массы Солнца составляет $\mathfrak{M}_{\text{tot}}$? (13 баллов).

Задача № 17. «Проблема освоения Марса»

Одна из главных проблем освоения Марса человеком в будущем – это его разреженная атмосфера и очень низкое содержание кислорода. Одной из возможностей наполнения атмосферы кислородом – это переработка водяного льда его полярных шапок. Определите толщину плоского слоя льда полярных шапок Марса, которая должна пойти на переработку, чтобы наполнить атмосферу планеты кислородом, давление которого у поверхности планеты будет равно парциальному давлению кислорода в атмосфере Земли (молярная доля кислорода в атмосфере Земли – $\eta_{O_2} = 21\%$). Полярные шапки представ-

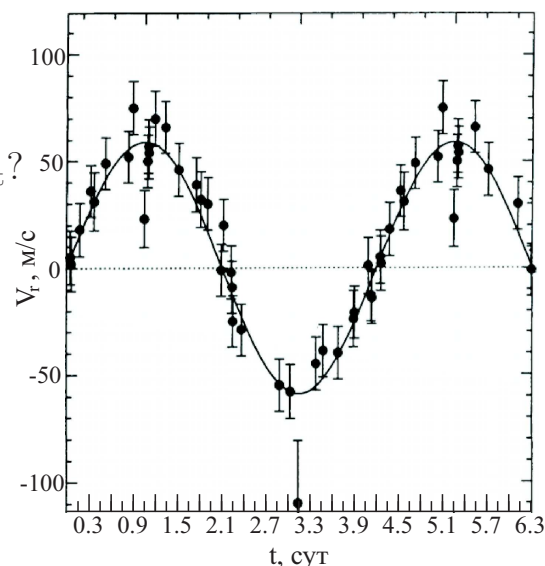


Рис. 4: кривая лучевых скоростей 51 Пегаса (источник: <https://web.pa.msu.edu/courses/2011spring/AST208/mayorQueloz.pdf>).

ляют собой круглые цилиндры, с диаметром 1000 км и средней толщиной 0.75 км. Хватит ли полярного льда для достижения поставленной цели? Какого давления кислорода у поверхности планеты можно достичь при полной переработке его шапок? Следует полагать, что образующийся водород быстро улетучивается в межпланетное пространство. Массовая плотность водяного льда – $\rho_{\text{л}} = 920 \text{ кг/м}^3$. (14 баллов).

Задача № 18. «Кривая лучевых скоростей и масса экзопланеты»

Как известно, в 1995 году швейцарскими астрофизиками М. Мейором и Д. Квелоцем, с использованием метода радиальных скоростей, была открыта первая экзопланета, обращающаяся вокруг звезды 51 Пегаса. Масса этой звезды равна массе Солнца. На графике (см. рис. 4) приведена зависимость гелиоцентрической лучевой скорости этой звезды от времени. Оцените по этому графику массу экзопланеты, считая, что луч зрения лежит в плоскости ее орбиты. (15 баллов).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Отечественные песни об астрономических объектах»

Решение. В качестве возможных примеров могут выступать следующие композиции:

1. Название: «Песня о звездах»; исполнители: Б.Гребенщиков, Сплин; авторы текста: А.Васильев, Б.Гребенщиков.

«Там высоко, высоко, кто то пролил молоко, и получилась млечная дорога, а вдоль по ней, вдоль по ней, между жемчужных огней, месяц плывет как белая пирога...»

Месяц – Луна, естественный спутник Земли, наблюдаемый вблизи новолуния; **Млечная дорога** или **Млечный путь** – галактика, в которую входит Солнечная система.

2. Название: «Большая Медведица», исполнители: М.Боярский; авторы текста: Л.Дербенев, В.Добрынин.

«Ночью синей, ночью звездной, тихо встану у порога, в час когда в созвездьях ярких небо светится, ни о чем пытаться не буду, ни Стрельца, ни Козерога, лишь один вопрос задам Большой Медведице...»

Созвездие – участок небосвода, со всеми проецирующимися на него небесными телами, с точки зрения земного наблюдателя. Стрелец, Козерог, Большая Медведица – созвездия небосвода.

3. Название: «Звездопад», исполнители: детский хор; авторы текста: А.Пахмутова, Н.Добронравов.

«С неба лиловые падают звезды, даже желание придумать не просто, на небосклоне привычных квартир, пусть загорится звезда Альтаир...»

Звезда – это массивное самосветящееся тело, состоящее, преимущественно, из плазмы, излучающее свет и находящееся в состоянии (механического и теплового) равновесия под влиянием сил собственной гравитации и внутреннего давления. В ее недрах происходят (или происходили ранее) реакции термоядерного синтеза.

Альтаир – ярчайшая звезда созвездия Орел (α Орла).

4. Название: «Лунная радуга», исполнитель: С.Ротару; авторы текста: В.Матецкий, М.Файбушевич.

«Луна укрытая туманом, Луна укрытая туманом, горит как путеводная звезда, и я иду ночным бульваром, и я иду ночным бульваром, иду куда глядят глаза ...»

Луна – единственный естественный спутник Земли, имеющий сферическую форму значительную массу.

5. Название: «Луна», исполнитель: С. Ротару, автор текста: В. Матецкий,

«День промчался незаметно выпит до дна, день промчался до рассвета в небе Луна, в лунном свете чище краски с виду просты, стали нежней и прекрасней цветы...»

Ответ: ($S_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 2. «Значимые астрономические даты»

Решение. Указанные даты соответствуют следующим значимым событиям в астрономии:

1. 1054 г. н.э. – первое наблюдение и последующее подробное описание китайскими астрономами вспышки сверхновой SN 1054 в созвездии Тельца.

2. 1610 г. н.э. – открытие Г. Галилеем четырех спутников Юпитера, впоследствии названных галилеевыми.

3. 1781 г. н.э. – открытие планеты Уран английским астрономом В. Гершелем с помощью телескопа собственного изготовления.

4. 4 октября 1957 года – запуск в космос первого спутника Земли.

5. 12 апреля 1961 года – первый полет человека в космос – Ю.А. Гагарина на корабле «Восток».

Ответ: ($S_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 3. «Пепельный свет Луны»

Решение. *Пепельный свет Луны* – это излучение малой интенсивности, пришедшее от неосвещенной Солнцем части поверхности Луны и фиксируемое земным наблюдателем. При этом данная часть поверхности Луны имеет характерный пепельный цвет.

Пепельный свет можно наблюдать незадолго до и после новолуния. Свечение неосвещенной прямым солнечным светом поверхности Луны порождается солнечными лучами, рассеянными Землей, а затем вторично отраженными Луной в сторону Земли. Т.о., маршрут распространения светового луча, порожденного Солнцем, таков: Солнце → Земля → Луна → Земля (наблюдатель). В течении года данный феномен лучше всего наблюдать, когда Солнце находится глубоко под горизонтом, а Луна – максимально высоко над горизонтом. Поскольку наклонение орбиты Луны к эклиптике небольшое ($5^{\circ}9'$), то Луна будет максимально высоко над горизонтом, когда эклиптика после захода Солнца составляет наибольший угол с горизонтом. Следовательно, данное условие достигается в канун дня весеннего равноденствия, после захода Солнца и в



Рис. 5: видимый диск Луны с указанием области – источника пепельного света (обведена красной линией).

канун дня осеннего равноденствия – перед восходом Солнца. На рис. 5 данная область обведена сплошной красной линией. Следует отметить, что первыми, кто дал правильное объяснение указанному феномену, были Леонардо да Винчи и Михаил Местлин – учитель Иоганна Кеплера.

Ответ: в канун дня весеннего или осеннего равноденствия. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Видимость Земли и продолжительность лунного дня»

Решение. Как известно, промежуток времени между двумя ближайшими, последовательными, одноименными фазами Луны называются **синодическим периодом** (месяцем) Луны (S_{ζ}). Если обратиться к карте видимой с Земли части поверхности Луны, то нетрудно видеть, что море спокойствия находится почти в центре видимого диска Луны. Поскольку Луна всегда обращена одной стороной к Земле (в силу синхронности ее вращательных движений), то гипотетический наблюдатель в любое время синодического месяца сможет прекрасно видеть Землю. По отношению к Солнцу, Луна повторяет свое положение через синодический месяц, следовательно продолжительность суток на Луне приблизительно равна S_{ζ} . Поскольку море спокойствия близко по расположению к лунному экватору, то продолжительность дня t_D здесь будет приблизительно равна $t_D = \frac{1}{2}S_{\zeta}$. Следовательно, искомое отношение есть:

$$\frac{t_E}{t_D} = \frac{S_{\zeta}}{\frac{1}{2}S_{\zeta}} \approx 2.$$

Ответ: $\frac{t_E}{t_D} \approx 2$. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Геоцентрический угол для двух точек»

Решение. Прежде всего, построим рисунок, соответствующий ситуации, описанной в условии задачи. Пусть в точке O поверхности Земли находится наблюдатель. Согласно условию задачи, явление метеора порождается на верхней границе атмосферы, высота которой над поверхностью Земли, – $H = 100$ км. В пределах области прямой видимости наблюдателя находится область верхней границы $A Z B$. Причем, точки A и B являются наиболее удаленными от наблюдателя. Предположим, что феномен метеора произошел в точке A . Соединим центр Земли (точка C) и точки O и A отрезками CO и CA . Нам необходимо найти угол α между данными отрезками. Поскольку $\angle AOC$ прямоугольный, то угол α

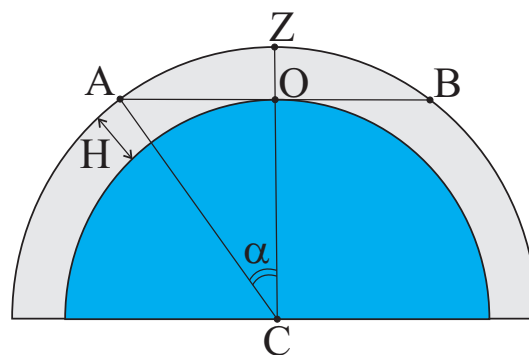


Рис. 6: к определению искомой величины.

можно определить как:

$$\cos \alpha = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus} + H} \Rightarrow \alpha = \arccos \left[\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus} + H} \right]. \quad (1)$$

Поскольку $H \ll \mathfrak{R}_{\oplus}$, то можно определить α более простым выражением

$$\cos \alpha = \left(\frac{\mathfrak{R}_{\oplus} + H}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{H}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{H}{\mathfrak{R}_{\oplus}} \quad (2)$$

Очевидно, угол α – малый угол, тогда

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\alpha = \sqrt{\frac{2H}{\mathfrak{R}_{\oplus}}} = 0.1772 = 10.15^\circ.$$

Более точный расчет по формуле (1) дает значение $\alpha = 10.09^\circ$.

Ответ: $\alpha = 10.09^\circ (10.15^\circ)$. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Радиусы орбит Земли и Луны»

Решение. Воспользуемся выражением для радиуса-вектора центра масс системы двух тел:

$$\vec{R}_c = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus} \vec{r}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta} \vec{r}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}},$$

здесь $\mathfrak{M}_{\oplus}$, $\mathfrak{M}_{\zeta}$ – величины масс Земли и Луны соответственно; $\vec{r}_{\oplus}$, $\vec{r}_{\zeta}$ – радиусы-векторы данных тел в выбранной системе отсчета.

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс данной пары тел, тогда $\vec{R}_c = 0$, следовательно,

$$\mathfrak{M}_{\oplus} \vec{r}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta} \vec{r}_{\zeta} = 0, \Rightarrow \mathfrak{M}_{\oplus} r_{\oplus} - \mathfrak{M}_{\zeta} r_{\zeta} = 0,$$

$$\frac{r_{\zeta}}{r_{\oplus}} = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\zeta}}. \quad (4)$$

С другой стороны, сумма расстояний (радиусов круговых орбит) данных тел есть

$$r_{\zeta} + r_{\oplus} = a_{\zeta},$$

где a_{ζ} – среднее расстояние (большая полуось орбиты) Луны от Земли, параметр из справочных данных. Решая полученную систему уравнений, относительно искомых расстояний, в результате получаем

$$r_{\zeta} = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}} a_{\zeta} = 3.84 \cdot 10^5 \text{ км}, \quad r_{\oplus} = \frac{\mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{\zeta}} a_{\zeta} = 4700 \text{ км}. \quad (5)$$

Согласно справочным данным, сидерический период обращения системы "Земля-Луна", относительно центра масс – $T_{\zeta} = 27.32$ сут. Тогда, скорости данных тел, относительно центра масс, есть

$$V_{\oplus} = \frac{2\pi r_{\oplus}}{T_{\zeta}} = 12.5 \text{ м/с}, \quad V_{\zeta} = \frac{2\pi r_{\zeta}}{T_{\zeta}} = 1.022 \text{ км/с}. \quad (6)$$

Ответ: к задаче представлен формулами (5), (6). ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Создание самодельной трубы Кеплера»

Решение. Определим минимальное полезное и максимально допустимое увеличения зрительной трубы Кеплера. Из теории оптических инструментов известно, что минимальное полезное (равнозрачковое) увеличение определяется отношением диаметра объектива к диаметру зрачка глаза наблюдателя:

$$\Gamma_{\min} = \frac{D}{d} = 10^{\times}.$$

Максимально допустимое увеличение трубы должно быть равно удвоенному диаметру объектива, выраженному в миллиметрах:

$$\Gamma_{\max} = 2D = 120^{\times}.$$

Как известно, увеличение трубы можно представить в виде:

$$\Gamma = \frac{F}{f}, \quad (7)$$

где f – фокусное расстояние окуляра. Следовательно, для достижения указанных значений увеличения необходимы окуляры с фокусными расстояниями:

$$f_{\min} = \frac{F}{\Gamma_{\max}} = 5 \text{ мм}, \quad f_{\max} = \frac{F}{\Gamma_{\min}} = 60 \text{ мм}.$$

В итоге, разумно допустимые значения увеличения и соответствующие им значения фокусного расстояния определяются интервалами

$$10^{\times} \leq \Gamma \leq 120^{\times}, \quad 5 \text{ мм} \leq f \leq 60 \text{ мм}. \quad (8)$$

Ответ: к задаче представлен интервалами (8). (6 баллов).

Задача № 8. «Радиус геостационарной орбиты»

Решение. Геостационарной орбитой искусственного спутника Земли (ИСЗ) называется круговая орбита, центр которой совпадает с центром Земли, а ее плоскость совпадает с плоскостью ее экватора, при этом, период обращения спутника равен сидерическому периоду обращения Земли вокруг

своей оси. Запишем второй закон Ньютона для ИСЗ, движущегося по указанной орбите:

$$m \frac{V^2}{r} = \frac{G m \mathfrak{M}_{\oplus}}{r^2},$$

здесь m – масса ИСЗ, V – скорость его орбитального движения, r – радиус его геостационарной орбиты, $\mathfrak{M}_{\oplus}$ – масса Земли. Скорость движения ИСЗ можно также представить в виде:

$$V = \frac{2 \pi r}{T_{\oplus}}.$$

В результате уравнение Ньютона представляется в виде:

$$\frac{4 \pi^2 r}{T_{\oplus}^2} = \frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{r^2}, \Rightarrow r^3 = \frac{G \mathfrak{M}_{\oplus} T_{\oplus}^2}{4 \pi^2}.$$

Далее учтем, что сила тяжести (без учета вращения планеты) равна силе притяжения, определяемой законом всемирного тяготения Ньютона у поверхности планеты:

$$m g_0 = \frac{G m \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}^2}, \Rightarrow g_0 = \frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}^2}.$$

В результате формула для куба радиуса геостационарной орбиты можно записать так

$$r^3 = \frac{g_0 \mathfrak{R}_{\oplus}^2 T_{\oplus}^2}{4 \pi^2} = \mathfrak{R}_{\oplus}^3 \frac{g_0 \mathfrak{R}_{\oplus}^2 T_{\oplus}^2}{4 \pi^2 \mathfrak{R}_{\oplus}^2}. \quad (9)$$

Вспомним, что квадрат первой космической скорости ИСЗ у поверхности Земли может быть представлен в виде:

$$V_I^2 = g_0 \mathfrak{R}_{\oplus}, \quad (10)$$

при этом скорость точек экватора, относительно центра Земли, в ее суточном движении есть

$$V_{eq} = \frac{2 \pi \mathfrak{R}_{\oplus}}{T_{\oplus}}. \quad (11)$$

В итоге, искомый радиус r_g , согласно (9), с учетом (10)-(11) представляется в виде:

$$r_g = \mathfrak{R}_{\oplus} \left(\frac{V_I}{V_{eq}} \right)^{2/3}. \quad (12)$$

Что и требовалось доказать! (7 баллов).

Задача № 9. «Изменение дальности прямой видимости в течение суток»

Решение: Как известно, из курса физиологии человека, его рост изменяется в течении суток, в среднем, на $1 \div 2$ см (далее, для определенности

тогда

$$\delta r = \sqrt{2\mathfrak{R}_{\oplus} h} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta h}{h} \right) \right) \approx \delta h \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{2h}} = 26.6 \text{ м} \approx 27 \text{ м}. \quad (18)$$

Ответ: к задаче представляется результатами (14), (16), (18). (8 баллов).

Задача № 10. «Максимальное угловое расстояние от радианта»

Решение. Построим рис 8, соответствующий условию задачи: пусть наблюдатель метеоров находится в точке A поверхности Земли. Предположим, что радиант метеорного потока находится в точке $\mathfrak{R}$, следовательно его зенитное расстояние будет $z_{\mathfrak{R}}$.

Все метеороиды одного метеорного потока движутся в пространстве по параллельным прямым, относительно Земли. Согласно условию, метеоры рождаются на верхней границе атмосферы, на высоте $H = 100$ км. Очевидно, что максимальное угловое расстояние $\alpha_{\max}$ между направлением на радиант и на точку возгорания метеора будет достигаться, если последнее происходит в точке B . При этом, точка B лежит на горизонте для данного наблюдателя. Тогда,

$$\alpha_{\max} = z_{\mathfrak{R}} + 90^\circ.$$

Из рисунка видно, что $z_{\mathfrak{R}} = \angle ABC$. Иначе, из $\triangle ABC$ следует, что

$$\sin z_{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus} + H}, \Rightarrow z_{\mathfrak{R}} = \arcsin \left(\frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus} + H} \right) = 79.9^\circ.$$

Следовательно,

$$\alpha_{\max} = 90^\circ + 79.9^\circ = 169.9^\circ \approx 170^\circ.$$

Ответ: $\Delta z = 169.9^\circ \approx 170^\circ$. (8 баллов).

Задача № 11. «Равенство угловых диаметров планеты и ее спутника»

Дано:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2 &\ll \mathfrak{M}_1, \\ \rho_2 &= 3\rho_1, \\ R_1, R_2 &\ll r. \end{aligned}$$

Доказать:

$$D_1'' = D_2''.$$

Решение:

Как известно, *первая точка Лагранжа* (точка либрации) – точка, расположенная на прямой, соединяющей центры планеты и спутника (между ними), попадая в которую какое-либо пробное тело (масса которого $m \ll \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$), будет двигаться, оставаясь в неизменном положении по отношению к данным телам.

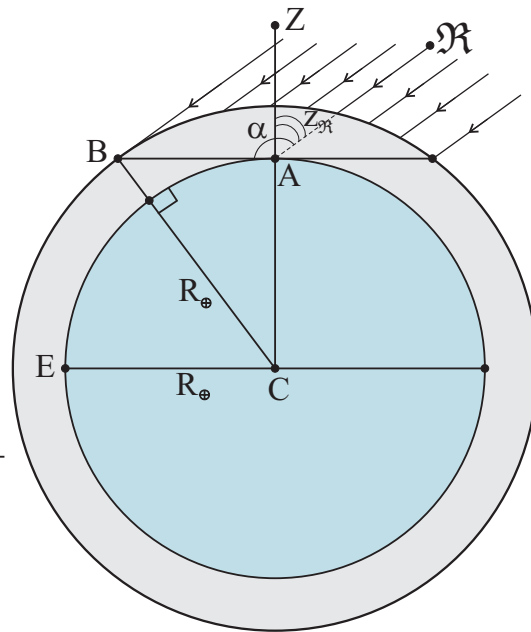


Рис. 8: к определению искомого угла.

Поскольку масса планеты и спутника много больше массы пробного тела, то вращение данного тела, относительно центра планеты, определяется вращением спутника, относительно того же центра, с угловой скоростью ω , определяемой вторым законом Ньютона для спутника:

$$\mathfrak{M}_2 \omega^2 r = \frac{G \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{r^2}, \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G \mathfrak{M}_1}{r^3}}. \quad (19)$$

Обозначим через δr расстояние от пробного тела до спутника. Пробное тело движется по окружности, под действием противоположно направленных сил притяжения, действующих со стороны планеты и спутника, которые сообщают ему центростремительное ускорение. Запишем второй закон Ньютона для пробного тела:

$$\begin{aligned} m \omega^2 (r - \delta r) &= \frac{G m \mathfrak{M}_1}{(r - \delta r)^2} - \frac{G m \mathfrak{M}_2}{\delta r^2}, \Rightarrow \\ \omega^2 r - \omega^2 \delta r &= \frac{G \mathfrak{M}_1}{r^2 (1 - \delta r/r)^2} - \frac{G \mathfrak{M}_2}{\delta r^2}, \Rightarrow \\ \frac{G \mathfrak{M}_1}{r^2} - \frac{G \mathfrak{M}_1}{r^3} \delta r &= \frac{G \mathfrak{M}_1}{r^2} (1 + 2\delta r/r) - \frac{G \mathfrak{M}_2}{\delta r^2}, \Rightarrow 3 \frac{G \mathfrak{M}_1}{r^3} \delta r = \frac{G \mathfrak{M}_2}{\delta r^2}, \Rightarrow \\ \delta r &= r \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_2}{3\mathfrak{M}_1}}. \end{aligned} \quad (20)$$

При получении последнего результата было 1) учтено, что масса спутника много меньше массы планеты, следовательно точка либрации должна быть расположена гораздо ближе к спутнику, нежели к планете, следовательно $\delta r/r \ll 1$, и 2) использовано биномиальное приближение (17) в виде:

$$(1 - \delta r/r)^{-2} \approx 1 + 2\delta r/r.$$

Угловые диаметры планеты и спутника, наблюдаемые из точки либрации, можно представить в виде:

$$D_1'' = \frac{2\mathfrak{R}_1}{r - \delta r}, \quad D_2'' = \frac{2\mathfrak{R}_2}{\delta r}, \Rightarrow \frac{D_2''}{D_1''} = \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} \right) \left(\frac{r - \delta r}{\delta r} \right) \approx \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} \right) \left(\frac{r}{\delta r} \right). \quad (21)$$

Учитывая также, что массы планеты и спутника можно представить в виде:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4}{3} \pi \rho_1 \mathfrak{R}_1^3, \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{4}{3} \pi \rho_2 \mathfrak{R}_2^3, \Rightarrow \frac{r}{\delta r} = \sqrt[3]{\frac{3\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2}} = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2} \sqrt[3]{\frac{3\rho_1}{\rho_2}} = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2}. \quad (22)$$

При вычислении последнего учтено, что $\rho_2 = 3\rho_1$. Из выражений (21), (22) следует

$$\frac{D_2''}{D_1''} = \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} \right) \times \left(\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2} \right) = 1, \Rightarrow D_2'' = D_1''.$$

Что и требовалось доказать! (9 баллов).

Задача № 12. «ИСЗ и их взаимная видимость»

Решение. Рассмотрим рис. 9, соответствующий условию задачи. Здесь экваториальный спутник движется по орбите GCB , а полярный спутник – по орбите $ABHG$.

Если спутники окажутся в пределах прямой видимости хотя бы на миг, то отрезок, соединяющий спутники, должен в этот момент касаться поверхности Земли. Поскольку радиусы орбит спутников одинаковы и равны $r = \mathfrak{R}_{\oplus} + h$, то треугольник ($\triangle ABC$), в вершинах которого находятся спутники в указанный момент и центр Земли является равнобедренным, следовательно, радиус Земли, проведенный в точку касания, будет перпендикуляром, высотой и медианой. Следовательно, для половины угла (α) между радиусами спутников справедливо выражение

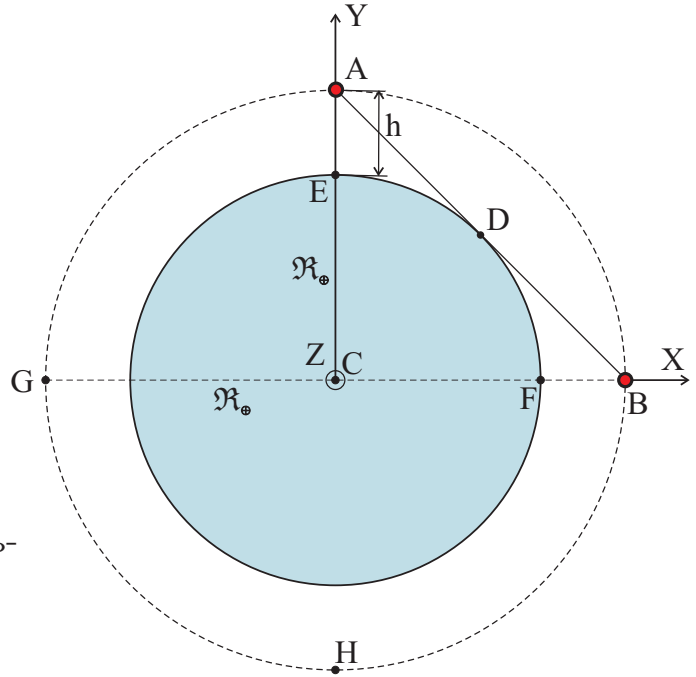


Рис. 9: к определению искомых величин.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus} + h}, \Rightarrow h = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \mathfrak{R}_{\oplus}. \quad (23)$$

из последнего выражения следует, что чем меньше угол между радиусами-векторами спутников, тем меньше высота их орбиты. Найдем минимально допустимое значение данного угла. Для этого запишем законы движения спутников в декартовой системе координат $CXYZ$, представленной на рис. 9. Пусть в начальный момент экваториальный спутник находится в точке B с координатами $(1, 0, 0)$, а полярный – в точке A с координатами $(0, 1, 0)$. Тогда законы движения данных спутников можно записать так:

$$x_e = r \cos \omega t, \quad y_e = 0, \quad z_e = -r \sin \omega t, \quad (24)$$

$$x_p = -r \sin \omega t, \quad y_p = r \cos \omega t, \quad z_p = 0, \quad (25)$$

Определим квадрат расстояния между спутниками:

$$\Delta^2 = (x_e - x_p)^2 + (y_e - y_p)^2 + (z_e - z_p)^2 = r^2(\cos \omega t + \sin \omega t)^2 + r^2 \cos^2 \omega t + r^2 \sin^2 \omega t = r^2(2 + \sin 2\omega t). \quad (26)$$

Величина Δ^2 принимает минимальное значение при $\sin 2\omega t = -1$, т.е., при $2\omega t = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$. Поскольку, $\omega = 2\pi/T$, то $t = T(\frac{3}{8} + \frac{n}{2})$. Следовательно,

указанные моменты повторяются через $\tau = T/2$ – половину сидерического периода обращения спутников. При этом $\Delta_{\min} = r = \mathfrak{R}_{\oplus} + h$, и указанный треугольник является равнобедренным. Следовательно, угол $\alpha = 60^\circ$. Согласно, (23), $h_{\min} = 0.155 \mathfrak{R}_{\oplus} = 986$ км. При этом расстояние между спутниками будет равно $r_{\min} = 7357$ км. Вычислим период обращения ИСЗ:

$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}}} = \frac{2\pi r}{V_I} \sqrt{\frac{r}{\mathfrak{R}_{\oplus}}} = 6280 \text{ с} = 1.744 \text{ часа.}$$

Значит, минимальный промежуток времени между двумя такими событиями есть

$$\tau = \frac{T}{2} = 3140 \text{ с} = 0.872 \text{ ч.}$$

Ответ: $h_{\min} = 986$ км, $r_{\min} = 7357$ км, $\tau = \frac{T}{2} = 3140 \text{ с} = 0.872 \text{ ч.}$ (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Видимый диск Луны и ее главное сечение»

Решение: Построим рис. 10, соответствующий условию задачи. В полнолуние Луна имеет форму круглого диска, диаметр которого равен

$$A_1B_1 = 2\mathfrak{R}_{\zeta} \cos \alpha,$$

где α – угловой радиус Луны (поскольку $\angle A_1OC = \angle A_1CA = \alpha$). Следовательно, площадь видимого диска Луны есть

$$S' = \frac{\pi}{4}(A_1B_1)^2 = \pi \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \cos^2 \alpha = \pi \mathfrak{R}_{\zeta}^2 (1 - \sin^2 \alpha). \quad (27)$$

Площадь главного сечения Луны – шара есть круг радиуса $\mathfrak{R}_{\zeta}$, а его площадь

$$S = \pi \mathfrak{R}_{\zeta}^2 \quad (28)$$

Следовательно, искомое соотношение равно

$$\eta = \frac{S'}{S} = 1 - \sin^2 \alpha. \quad (29)$$

Учитывая далее, что угловой радиус Луны в среднее полнолуние есть

$$\alpha'' = \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\Delta_{\zeta}} \cdot 3438' = 15.5'$$

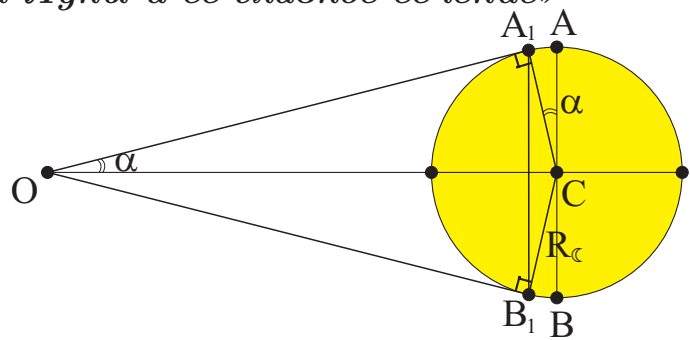


Рис. 10: к определению искомой доли.

Очевидно, что α'' – малая величина, тогда можно воспользоваться приближением вида:

$$\sin x \approx x, \text{ при } x \ll 1, [x] = \text{рад.} \quad (30)$$

Выгодно угловой диаметр в радианах представить через α'' , выраженный в угловых минутах, т.е. $\alpha = \frac{\alpha''}{3438'}$ (здесь мы учли, что 1 рад = 3438'). В итоге, искомую величину можно представить в виде:

$$\eta = 1 - \left(\frac{\alpha''}{3438'} \right)^2 = 0.999980.$$

Ответ: $\eta = 0.999980$. ($S_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Летоисчисление на Луне и високосные годы»

Решение. Как известно, синодический период обращения Луны равен $S_{\zeta} = 29.5306$ сут. Обращение Луны вокруг общего центра масс системы «Земля-Луна» и вращение ее вокруг оси, как известно, синхронизованы. Следовательно, S_{ζ} – продолжительность солнечных суток на Луне. При составлении солнечного календаря необходимо выполнения двух условий:

1. В календарном году должно быть целое количество суток.
2. Средняя продолжительность календарного года должна быть как можно ближе к продолжительности тропического года $T_{\oplus} = 365.2422$ сут.

Следовательно, в одном тропическом году укладывается $\eta = \frac{T_{\oplus}}{S_{\zeta}} = 12.368$ лунных суток. Найдем ошибку юлианского календаря для этого вычислим среднюю продолжительность юлианского года:

$$T_{\tau} = \frac{365 \cdot 3 + 366}{4} = 365.25 \text{ сут.} \quad (31)$$

Тогда ошибка юлианского календаря, приходящаяся на 1 год, есть

$$\frac{\Delta T_{\tau}}{T_{\oplus}} = \frac{T_{\tau} - T_{\oplus}}{T_{\oplus}} = 7.80 \cdot 10^{-3} \text{ сут/год.}$$

Пусть в течении N тропических лет в календаре жителя Луны будет n високосных лет с количеством суток в году $L = 13$, и $N - n$ обычных лет с количеством лунных суток $\ell = 12$. Средняя продолжительность года лунного календаря есть

$$T_M = S_{\zeta} \frac{L \cdot n + (N - n)\ell}{N} = S_{\zeta} \left(\ell + \frac{n}{N}(L - \ell) \right). \quad (32)$$

При этом ошибка календаря в лунных сутках есть:

$$\frac{\Delta T_M}{T_{\oplus}} = \frac{T_M - T_{\oplus}}{T_{\oplus}} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{n}{N}(L - \ell) - (\eta - \ell) \right) \leq \frac{\Delta T_{\tau}}{T_{\oplus}}. \quad (33)$$

Из последнего выражения следует, что

$$\frac{n}{N} \leq \left(\frac{\Delta T_\tau}{T_\oplus} \right) \frac{\eta}{(L - \ell)} + \frac{(\eta - \ell)}{(L - \ell)} = 0.4645.$$

Следовательно, за 10 тысяч лет должно быть 4645 високосных лет или 929 високосных лет за 2000 лет. Т.о., если полагать, что каждый второй год високосный, то за две тысячи лет должно быть $(1000 - 929) = 71$ невисокосных лет-исключений, которые должны повторяться через $[2000/71] = 28$ лет. Следовательно, в календаре жителя Луны должен существовать цикл продолжительностью 28 лет, в котором есть 13 високосных и 15 невисокосных лет, причем последний, 28 год должен быть невисокосным. Тогда ошибка данного календаря составляет

$$T_M = \frac{13 \cdot 13 + 15 \cdot 12}{28} = 12.4643 \text{ лун. сут.} \Rightarrow \frac{\Delta T_M}{\eta} = 7.78 \cdot 10^{-3} < \frac{\Delta T_\tau}{T_\oplus}.$$

Следовательно, количество високосных лет в одном тысячелетии должно быть либо $n_1 = 464$, либо $n_2 = 465$.

Ответ: в високосном году должно быть 13 лунных суток, невисокосном – 12 лунных суток; в одном тысячелетии либо 464, либо 465 високосных лет. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Венера, Юпитер и Луна»

Решение. Рассмотрим движение Луны по небосводу. Поскольку, стрелкой указано направление ее видимого перемещения, то чтобы понять покроет Луна планеты или нет, выполним дополнительное построение. Через центр диска Луны вдоль вектора скорости $\vec{v}$ построим прямую C_1C_2 , являющуюся траекторией видимого движения центра диска Луны. Построим также прямые A_1A_2 , B_1B_2 , параллельные C_1C_2 , касающиеся ее диска. Данные прямые будут определять полосу небосвода, которую покроет своим корпусом Луна, в силу собственного движения. Из рисунка очевидно, что в данную полосу попадает Венера, следовательно, в ближайшее время можно было наблюдать покрытие Луной Венеры.

Угловое расстояние между прямой C_1C_2 и планетой называется **прицельным параметром** (p). Полагая, что угловой диаметр Луны на момент наблюдений был равен D''_ζ , можно записать на языке математики условие покрытия Луной Венеры:

$$p_V \leq D''_\zeta / 2. \quad (34)$$

здесь p_V – прицельный параметр Венеры. Полагая далее $D''_\zeta = 32'$, измерив по рис. 11 диаметр Луны A_1B_1 , выраженный в мм, и измерив величину прицельного параметра Венеры x (в мм), можно составить пропорцию вида:

$$\left. \begin{array}{l} x \leftrightarrow p_V \\ A_1B_1 \leftrightarrow D''_\zeta \end{array} \right\} \Rightarrow p_V = D''_\zeta \left(\frac{x}{A_1B_1} \right).$$

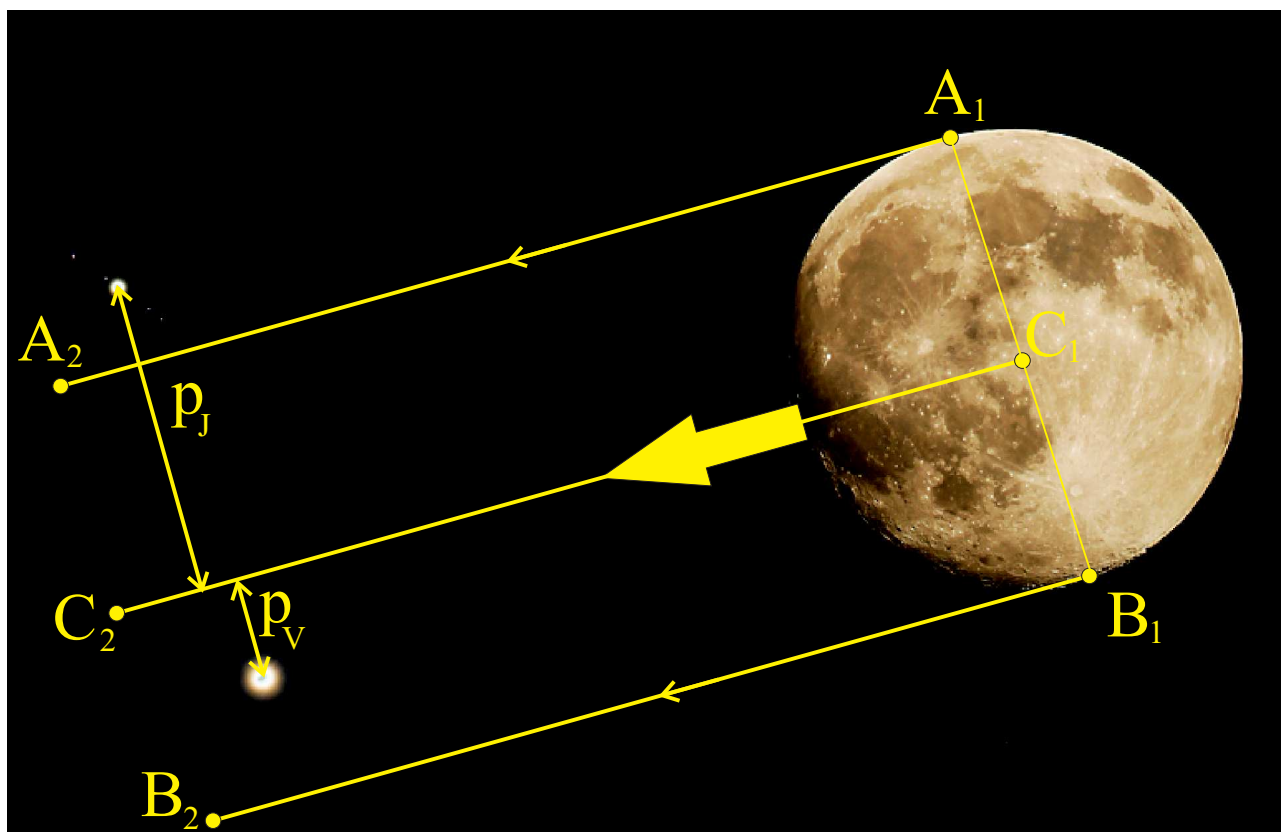


Рис. 11: к определению тела, покрываемого Луной, и прицельных параметров планет.

Согласно рисунку, $x = 22$ мм и $D''_{\zeta} = 95$ мм (Ваши значения могут отличаться от выше указанных, при использовании фотографии в ином масштабе). В итоге, прицельный параметр Венеры $p_V = 7.4'$. Аналогично рассуждая, получаем прицельный параметр для Юпитера – $p_J = 21.6'$.

Далее определим время покрытия (t_{Π}) Венеры Луной. Очевидно, что во время покрытия Венера (мы пренебрегаем ее собственным движением на данном временном интервале) будет двигаться по хорде A_1A_2 (см. рис 12), следовательно, время покрытия будет равно

$$t_{\Pi} = \frac{A_1A_2}{\omega_{\zeta}}. \quad (35)$$

здесь ω_{ζ} – угловая скорость собственного движения Луны по небосводу. Определим ее как

$$\omega_{\zeta} = \frac{2\pi}{T_{\zeta}} = 0.230 \text{ рад/сут} = 13.18^\circ/\text{сут}. \quad (36)$$

здесь $T_{\zeta} = 27.32$ сут – сидерический период обращения Луны, относительно центра масс системы «Земля-Луна». С использованием теоремы Пифагора

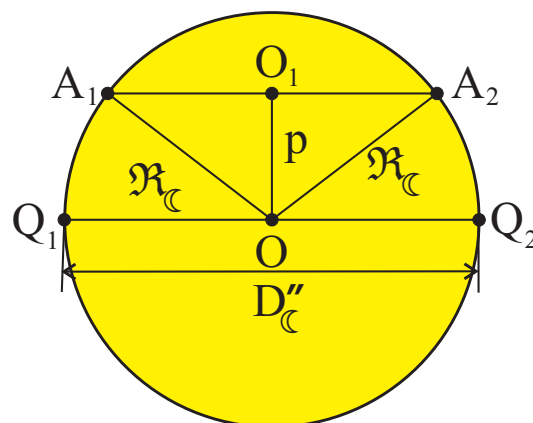


Рис. 12: к определению времени покрытия t_{Π} .

определим длину хорды A_1A_2 (в угловых минутах):

$$A_1A_2 = 2\sqrt{(D''_{\zeta}/2)^2 - p_V^2} = \sqrt{D''_{\zeta}{}^2 - 4p_V^2} = 28.37'. \quad (37)$$

Следовательно, время покрытия есть

$$t_{\Pi} = \frac{AB}{\omega_{\zeta}} = \frac{\sqrt{D''_{\zeta}{}^2 - 4p_V^2}}{\omega_{\zeta}} = 51.7 \text{ мин.} \quad (38)$$

Ответ: будет покрытие Венеры Луной; $p_V = 7.4'$, $p_J = 21.6'$; время покрытия Венеры Луной определяется выражением (38). (\$_{\max} = 13\$ баллов).

Задача № 16. «Частицы темной материи в пределах Солнечной системы»

Дано:

$$\mathfrak{R}_s = 1.87 \text{ св.г.},$$

$$\eta = 0.98,$$

$$V_0 = 200 \text{ см}^3,$$

$$D_G = 50 \text{ кпк},$$

$$\mathfrak{M}_G = 3.0 \cdot 10^{12} \mathfrak{M}_{\odot},$$

$$E_0 = 120 \text{ ГэВ}.$$

Найти:

$$N_{\text{tot}}, N_1 - ?$$

$$n, \mathfrak{M}_{\text{tot}}, \chi - ?$$

Решение:

Количество частиц темной материи (ТМ), находящихся внутри Солнечной системы, можно определить как

$$N_{\text{tot}} = n V_s = n \frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_s^3,$$

здесь n – концентрация частиц темной материи. Поскольку, темная материя распределена в теле Галактики равномерно, то

$$n = \frac{\eta \mathfrak{M}_G}{m_0 V_G} = 14250 \text{ м}^{-3}, \text{ где } V_G = \frac{\pi}{6} D_G^3. \quad (39)$$

В результате искомое количество частиц

$$N_{\text{tot}} = 8 \frac{\eta \mathfrak{M}_G}{m_0} \left(\frac{\mathfrak{R}_s}{D_G} \right)^3 = 3.31 \cdot 10^{53}. \quad (40)$$

При этом, мы учли, что масса частицы равна $m_0 = E_0/c^2$, $E_0 = 120 \text{ ГэВ}$ – энергия покоя частицы темной материи, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света в вакууме. Количество частиц ТМ в стакане, объемом V_0 , равно

$$N_1 = n V_0 = 2.85. \quad (41)$$

Масса темной материи, в пределах Солнечной системы, определяется выражением вида:

$$\mathfrak{M}_{\text{tot}} = m_0 N_{\text{tot}} = 8\eta \mathfrak{M}_G \left(\frac{\mathfrak{R}_s}{D_G} \right)^3 = 7.06 \cdot 10^{28} \text{ кг} = 37.2 \mathfrak{M}_J. \quad (42)$$

здесь $\mathfrak{M}_J$ – масса Юпитера. Данная масса составляет $\chi = \mathfrak{M}_{\text{tot}}/\mathfrak{M}_{\odot} = 0.035$ от массы Солнца.

Ответ: к задаче представлен выражениями (39)-(42); $\chi = 0.035$. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Проблема освоения Марса»

Дано:

$$\begin{aligned}\eta_{O_2} &= 21\%, \\ D_c &= 1000 \text{ км}, \\ H &= 0.75 \text{ км}, \\ \rho_{\text{л}} &= 920 \text{ кг/м}^3.\end{aligned}$$

Найти:

$$h, p_{\text{tot}} - ?$$

Решение:

Если давление кислорода у поверхности Марса равно парциальному атмосферному давлению земного кислорода, то можно легко вычислить массу кислородной атмосферы Марса из равенства силы давления атмосферы на твердую поверхность и силы тяжести:

$$p_{O_2} S = \mathfrak{M}_a g \Rightarrow \mathfrak{M}_a = \frac{p_{O_2} S}{g_0}, \quad (43)$$

где $p_{O_2} = \eta_{O_2} p_0$ – парциальное давление кислорода в атмосфере Земли, $p_0 = 101325$ Па – нормальное атмосферное давление Земли, $S = 4\pi \mathfrak{R}_{\text{Марс}}^2$ – площадь поверхности Марса; g_0 – ускорение свободного падения у поверхности планеты, представляемое в виде:

$$g_0 = \frac{G \mathfrak{M}_{\text{Марс}}}{\mathfrak{R}_{\text{Марс}}^2}. \quad (44)$$

здесь $\mathfrak{M}_{\text{Марс}}$, $\mathfrak{R}_{\text{Марс}}$ – масса и радиус Марса соответственно. В результате масса кислородной атмосферы:

$$\mathfrak{M}_a = \frac{4\pi \eta_{O_2} p_0 \mathfrak{R}_{\text{Марс}}^4}{G \mathfrak{M}_{\text{Марс}}}. \quad (45)$$

Одна молекула кислорода (O_2) образуется из двух молекул воды. Следовательно, массу атмосферы Марса можно записать в виде:

$$\mathfrak{M}_a = \nu_{O_2} M_{O_2}, \Rightarrow \nu_{O_2} = \frac{\mathfrak{M}_a}{M_{O_2}}. \quad (46)$$

где ν_{O_2} – количество кислорода в атмосфере; M_{O_2} – молярная масса кислорода ($M_{O_2} = 0.032$ кг/моль). Следовательно, для этого необходимо переработать $\nu_{H_2O} = 2\nu_{O_2}$. Масса этого количества воды есть

$$\mathfrak{M}_{H_2O} = \nu_{H_2O} M_{H_2O} = 2\mathfrak{M}_a \left(\frac{M_{H_2O}}{M_{O_2}} \right) = 1.125 \mathfrak{M}_a. \quad (47)$$

С другой стороны, данную массу можно представить в виде:

$$\mathfrak{M}_{H_2O} = 2 \left(\rho_{H_2O} \frac{1}{4} \pi D_c^2 h \right), \Rightarrow h = \frac{2 \mathfrak{M}_{H_2O}}{\pi \rho_{H_2O} D_c^2}.$$

или

$$h = \frac{16 \eta_{O_2} p_0 \mathfrak{R}_{\text{Марс}}^4}{G \mathfrak{M}_{\text{Марс}} \rho_{H_2O} D_c^2} \left(\frac{M_{H_2O}}{M_{O_2}} \right) = 647 \text{ м}. \quad (48)$$

где ρ_{H_2O} – плотность водяного льда. Т.о., полярного льда должно хватить для достижения поставленной цели.

Определим давление кислорода у поверхности планеты, которое можно достичь при полной переработке его шалок. Для этого заметим, что согласно (48), толщина расплавленного льда пропорциональна давлению кислородной атмосферы, т.е. $p_a \sim h$. Следовательно, можно составить пропорцию вида:

$$\frac{p_a}{h} = \frac{p_{\text{tot}}}{H}, \Rightarrow p_{\text{tot}} = \eta_{O_2} p_0 \left(\frac{H}{h} \right) = 24.67 \text{ кПа.} \quad (49)$$

Ответ: к задаче представлен результатами (48)-(49). ($\$_{\text{max}} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Кривая лучевых скоростей и масса экзопланеты»

Решение: Прежде всего, по кривой лучевых скоростей (см. рис. 4) можно легко определить период (T) обращения звезды (и ее планеты) вокруг общего центра масс. Из рисунка очевидно, что $T = 4.2$ сут. Из того же рисунка можно определить амплитудное значение лучевой скорости звезды – $V_{\text{max}} = 60$ м/с.

Согласно условию задачи, луч зрения лежит в плоскости орбиты звезды, а следовательно, и всей системы. Следовательно, полученная величина совпадает с полной скоростью звезды. Характер изменения лучевой скорости – синусоидальный, следовательно, формы орбит звезды и планеты должны быть близкими к круговым, а следовательно их скорости должны оставаться постоянными. Вычислим радиус (R_*) орбиты звезды:

$$R_* = \frac{V_{\text{max}} T}{2\pi} = 3465 \text{ км.} \quad (50)$$

Пусть $\mathfrak{M}_*$, $\mathfrak{M}_p$ – массы звезды и планеты соответственно. Определим радиус орбиты относительного движения планеты (относительно центрального тела):

$$R'_* = R_* + R_p = R_* \left(1 + \frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{M}_p} \right). \quad (51)$$

При записи последнего результата было учтено, что из определения радиуса-вектора центра масс данной системы следует соотношение вида:

$$\mathfrak{M}_* R_* = \mathfrak{M}_p R_p, \Rightarrow \frac{R_*}{R_p} = \frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{M}_*}. \quad (52)$$

Далее воспользуемся третьим обобщенным законом Кеплера для данной пары тел:

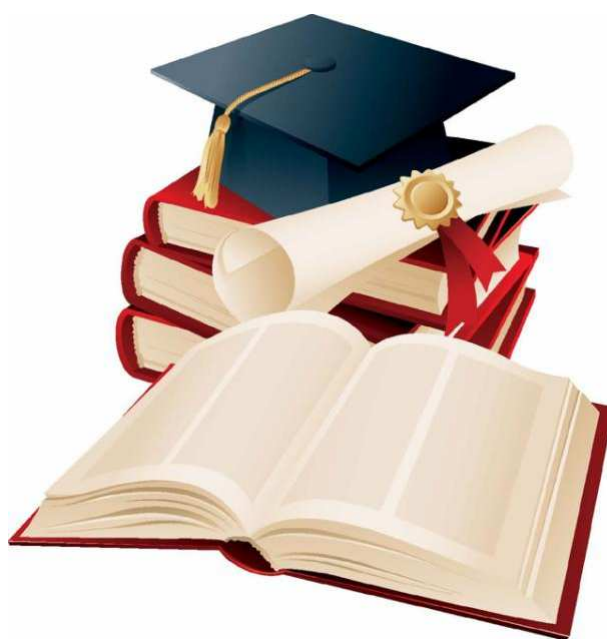
$$G(\mathfrak{M}_* + \mathfrak{M}_p)T^2 = 4\pi^2 R_*^3, \Rightarrow G T^2 = 4\pi^2 R_*^3 \frac{(\mathfrak{M}_* + \mathfrak{M}_p)^2}{\mathfrak{M}_p^3}, \Rightarrow$$

$$\mathfrak{M}_p = \left(\frac{4\pi^2 R_*^3}{G T^2} (\mathfrak{M}_* + \mathfrak{M}_p)^2 \right)^{1/3} \approx \left(\frac{4\pi^2 R_*^3}{G T^2} \mathfrak{M}_*^2 \right)^{1/3} = \left(\frac{V_{\text{max}}^2 \mathfrak{M}_*^2 R_*}{G} \right)^{1/3}. \quad (53)$$

Расчет искомой величины по формуле (53) дает значение $\mathfrak{M}_p = 9.0 \cdot 10^{26}$ кг $\approx 0.5 \mathfrak{M}_J$, где $\mathfrak{M}_J$ – масса Юпитера.

Ответ: $\mathfrak{M}_p = 9.0 \cdot 10^{26}$ кг $\approx 0.5 \mathfrak{M}_J$, где $\mathfrak{M}_J$ – масса Юпитера. ($\$_{\max} = 15$ баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

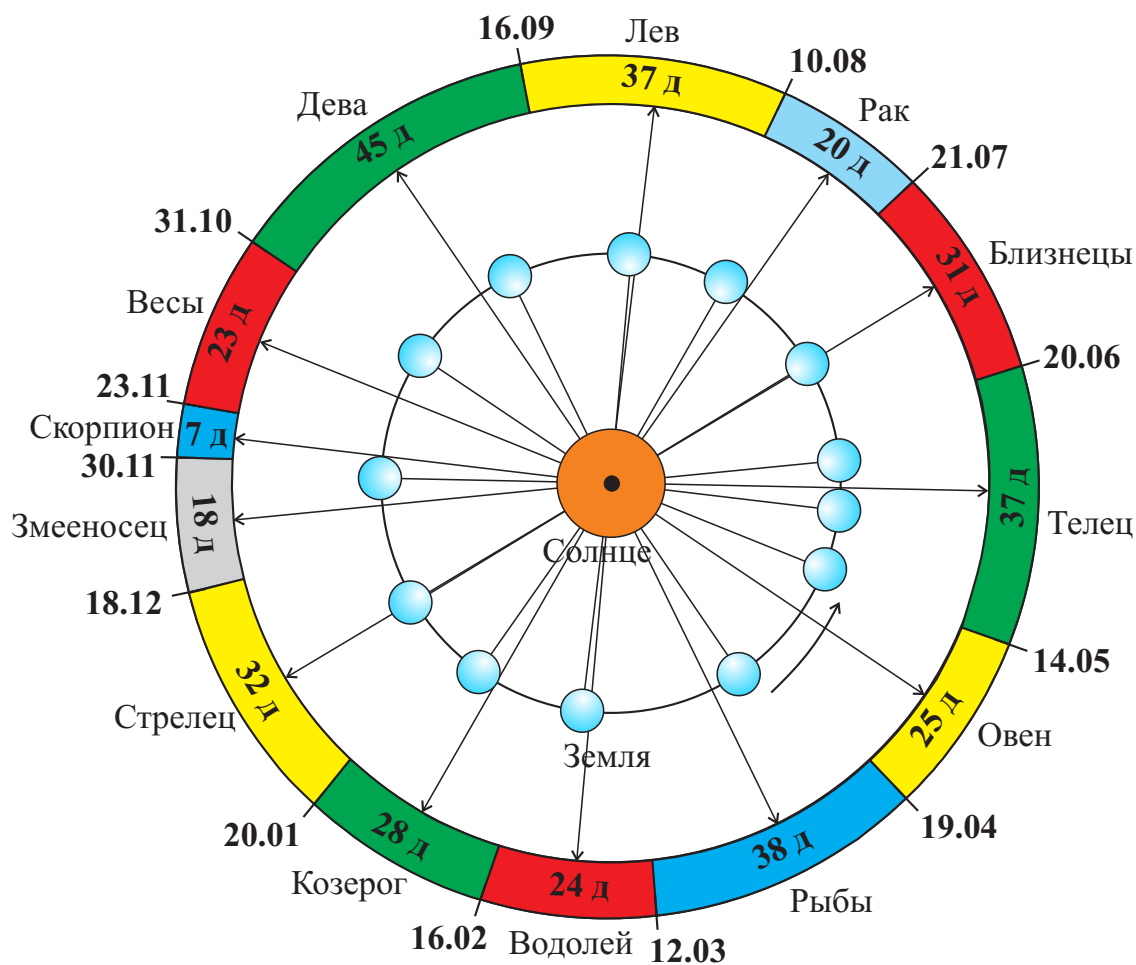


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

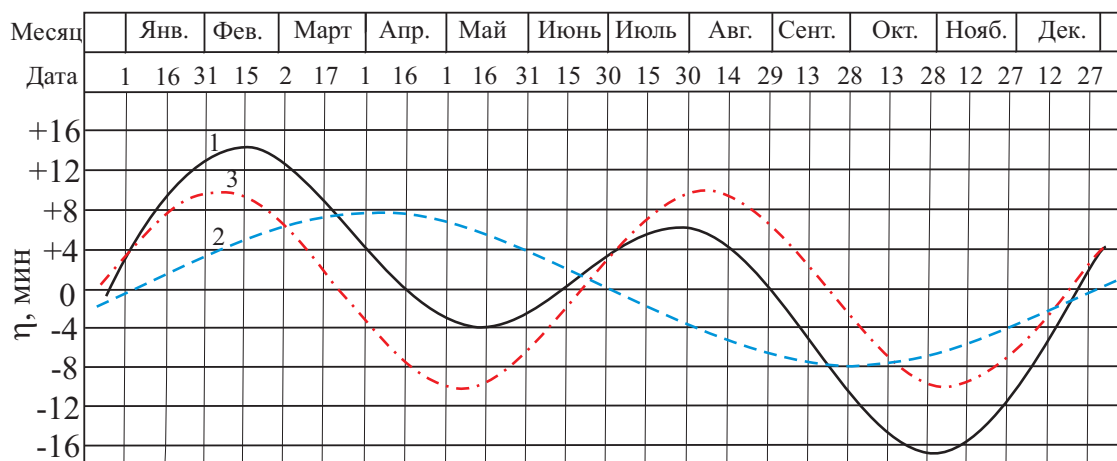


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 — уравнение времени, 2 — уравнение центра, 3 — уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

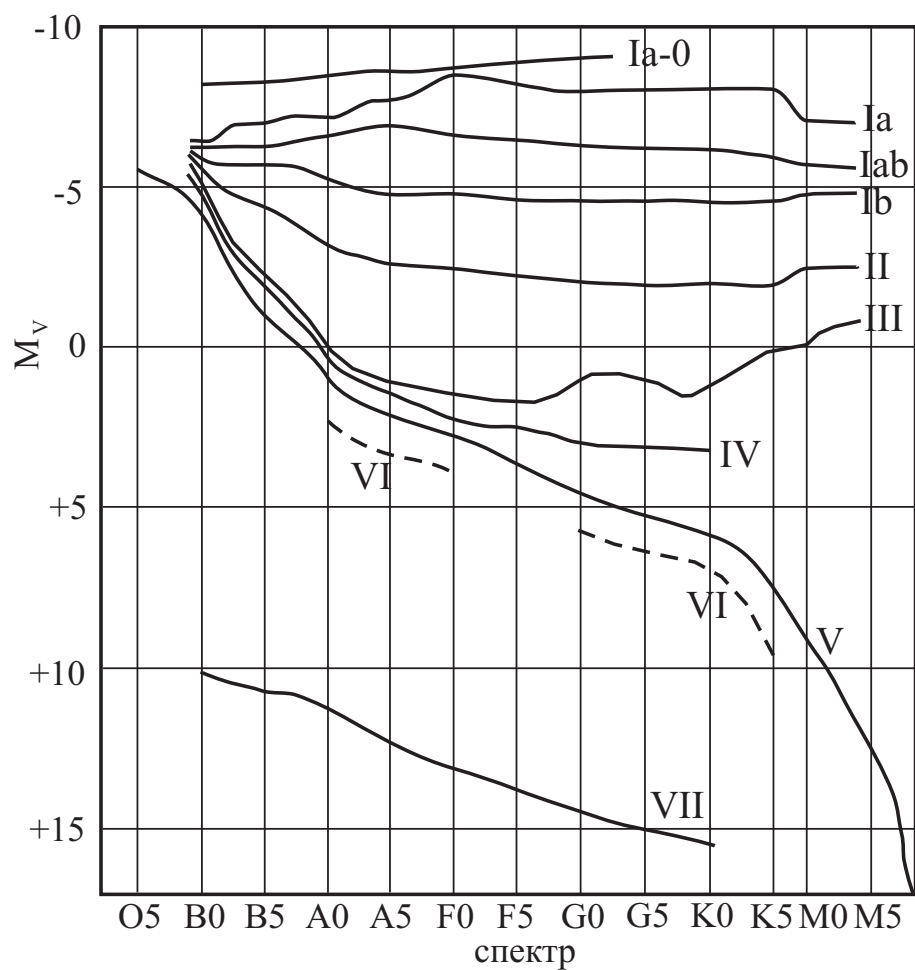


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.