

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ
SAMRAS-2018
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.
ТУР № 1



Самара, 2018 г.

Дорогие Друзья!

Вашему вниманию в данном релизе представлены 18 оригинальных задач трех уровней сложности – «Новичок» (уровень А), «Знаток» (уровень В) и «Профи» (уровень С). Задачи составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской Олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач заключительного этапа Олимпиады.*

При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2018 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 1». – <https://sites.google.com/site/samrasolimp/solutions>

Автор задач – *Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, методист СДДЮТ, к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева.

Верстка в системе *ИТ_ЕX* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

Памятка участника SamRAS-2018

1. Официальный сайт Астрошколы:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/>

2. Официальная группа в VK:

<http://vk.com/samrasolimp>

3. Сроки подачи работ SamRAS-2018 тура № 1 на проверку:
15.10.2017-15.01.2018!!!

4. Электронный ящик SamRAS-2018:
samrasolimp@mail.ru

5. Руководство зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2018:

<https://sites.google.com/site/samrasolimp/maindocs>

ИЛИ

https://vk.com/doc-57032141_451699934

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ



Дорогие Друзья!

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2018, внимательно ознакомьтесь с «Руководством зарегистрированного участника заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2018»! Электронный адрес последнего указан в **Памятке участника**.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Стихи об астрономических объектах и феноменах»

Приведите примеры пяти стихов русских поэтов, в строках которых упоминаются астрономические объекты или феномены. Для каждого примера следует обязательно указать название стихотворения, его автора, фрагмент стихотворения (например, четверостишие) с упоминанием указанных понятий. Дайте этим понятиям определения. (За каждый пример – 1 балл).

Задача № 2. «Значимые даты в истории астрономии»

Каким значимым событиям в истории астрономии отвечают следующие даты:

1. 46 год до н.э.;
2. 1582 год н.э.;
3. 1846 год н.э.;
4. 1929 год;
5. 1995 год.

За каждое правильно указанное событие – 1 балл.

Задача № 3. «Полярное сияние»

Что такое полярное сияние? Чем обусловлено разнообразие цветов данного феномена? В окрестности каких классических планет можно наблюдать указанный феномен? (3 балла).

Задача № 4. «Расстояние до яркого метеора»

Определите максимальное возможное расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на поверхности Земли, до точки возгорания яркого метеора (находящегося в пределах прямой видимости наблюдателя) в ее атмосфере, если полагать, что последний феномен возникает на высоте 100 км. Поглощением света атмосферой Земли пренебречь. (4 балла).

Задача № 5. «Абсолютная звездная величина метеора»

Опираясь на условия предыдущей задачи, определите максимально допустимую абсолютную звездную величину метеора, который еще может быть виден наблюдателем с искомого в предыдущей задаче расстояния. Поглощением света в атмосфере земли пренебречь. (4 балла).

Задача № 6. «Двойная видимость Венеры и ее угловое расстояние от Солнца»

25 марта 2017 года наступил период двойной видимости Венеры, что обусловлено ее наивысшим расположением над эклиптикой. Оцените угловое расстояние планеты от Солнца и ее склонение в этот момент, если весеннее равноденствие наступило в этом году 20 марта. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)**Задача № 7. «Продолжительности утренней и вечерней видимости Венеры на небосводе»**

Опираясь на данные предыдущей задачи, оцените максимальные продолжительности утренней и вечерней видимости Венеры в г. Самаре ($\varphi = 53^\circ 12'$) в случае, когда эклиптические долготы данных тел были одинаковыми. Конечными размерами диска Солнца и влиянием рефракции пренебречь. (6 баллов).

Задача № 8. «Максимальный допустимый радиус Солнца»

С использованием настоящих значений основных характеристик Солнца, определите значение максимального допустимого радиуса Солнца. (7 баллов).

Задача № 9. «Угловая скорость поворота серпа Венеры»

Опираясь на данные задачи № 6 настоящего релиза, определите угловую скорость поворота серпа Венеры, относительно ее центра, в окрестности нижнего соединения планеты с Солнцем, в период ее двойной видимости (25 марта 2017 года). Постройте график искомой зависимости от времени. Орбиты Венеры и Земли считать круговыми. (8 баллов).

Задача № 10. «Фазовый угол и минимальная звездная величина нижней планеты»

Определите значение фазового угла нижней планеты и соответствующий угол ее элонгации, при котором ее звездная величина достигает минимального значения. Оцените это значение звездной величины. Следует полагать орбиты Земли и нижней планеты круговыми, причем последняя лежит в плоскости эклиптики. Поверхности нижних планет следует считать ламбертовскими источниками света. Численный анализ результатов выполнить на примере Меркурия и Венеры. (8 баллов).

Задача № 11. «Звездная величина Солнца и фотосферное пятно»

Определите зависимость изменения звездной величины Солнца от времени, в случае, когда на его экваторе присутствует пятно радиуса R . Данную зависимость следует исследовать на временном интервале, равном половине периода вращения Солнца. Постройте график данной зависимости, в случае самого большого пятна за всю историю наблюдений с $d'' = 4'$. (9 баллов).

Задача № 12. «Радиус орбиты одинокого Юпитера»

Определите радиус орбиты Юпитера и период его обращения вокруг Солнца при условии, что все оставшиеся классические планеты покинули Солнечную систему. Орбиты все планет считать круговыми. Межпланетными взаимодействиями следует пренебречь. (10 баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)**Задача № 13. «Минимальный угловой диаметр сферического тела»**

Некоторое тело Солнечной системы сферической формы, с линейным радиусом R , при наблюдении с Земли, имеет фазу F . Определите минимально возможный угловой диаметр данного тела в этот момент. Орбиту Земли считать круговой. (11 баллов).

Задача № 14. «Двойные астероиды и их характеристики»

В настоящее время, в главном поясе астероидов (ГПА) насчитывается более 700 тыс. астероидов, но по оценкам ученых, их общее количество составляет 1.5 млн., среди которых, некоторые образуют гравитационно связанные пары. Однако, размеры данных пар не могут быть больше некоторого критического значения. Причем данное значение существенно зависит от положения двойной системы в поясе. Объясните причину такого ограничения. Учитывая, что внутренняя и внешняя границы ГПА отстоит от Солнца на расстояниях 2.2 и 3.6 а.е. соответственно, а занимаемая им область есть круглый тор, определите минимальное и максимальное значения для большой полуоси орбиты относительного движения компонентов двойной системы и соответствующие значения периода их обращения, относительного общего центра масс. Численные расчеты провести для двух одинаковых астероидов с радиусами, равными 1 км и массовой плотностью 2.5 г/см^3 . (12 баллов).

Задача № 15. «Звезда Шольца»

Звезда Шольца была открыта в 2014 году. Ее видимая звездная величина равна $m = 18.3^m$, лучевая скорость – $V_r = 83.1 \text{ км/с}$, годичный параллакс – $\pi = 0.166''$, собственное движение по прямому восхождению – $\mu_\alpha = -0.0403''/\text{год}$, по склонению – $\mu_\delta = -0.1148''/\text{год}$. Определите минимальное гелиоцентрическое расстояние на которое сближалась звезда с Солнцем. Сколько лет тому назад это произошло? Какова была, при этом, ее звезд-

ная величина? Чему были равны, при этом, ее тангенциальная и радиальная скорость? Сколько времени пребывала звезда в пределах Солнечной системы и когда она покинула ее, если современное значение радиуса гравитационной границы системы равно 1.87 св. года. Если полагать, что данная звезда породила возмущение в кометном облаке Оорта, то через какой минимальный промежуток времени следует ожидать кометный ливень в окрестности Земли? (13 баллов).

Задача № 16. «Свойства Sa-галактики»

В настоящее время, в нашей Вселенной около половины всех известных галактик являются спиральными. Значительная часть галактик данного типа состоят из массивного сферического ядра радиуса $\mathfrak{R}_N$, в котором распределение звездной материи является однородным и тонкого маломассивного кольцеобразного диска, внутренний радиус которого равен $\mathfrak{R}_N$, а внешний – $n\mathfrak{R}_N$. В теле диска звезды равномерно движутся по круговым орбитам вокруг оси симметрии системы. Многочисленные исследования показали, что линейная скорость движения звезд в диске не зависит от расстояния до центра галактики: от его внешнего края вплоть до поверхности ядра скорость звезд составляет V_0 . Такое явление может быть объяснено наличием несветящейся массы ("темной материи"), распределение которой сферически симметрично относительно центра галактики вне ее ядра (в ее гало). На примере галактики NGC3898 ($\mathfrak{R}_N = 5$ кпк, $n = 12$, $V_0 = 220$ км/с) Определите

1. Массу ($\mathfrak{M}_N$) ядра галактики;
2. Среднюю плотность (ρ_N) вещества ядра галактики;
3. Зависимость массовой плотности "темной материи" (ρ_{DM}) от расстояния (r) до центра галактики;
4. Отношение массы "темной материи", влияющей на движение звезд в диске, к массе ядра;
5. Долю, которую составляет масса темной материи ядра от полной массы галактики, если известно, что ее массовая доля в ядре равна массовой доле темной материи гало от всей массы галактики. (13 баллов).

Задача № 17. «Магнитные свойства нейтронной звезды»

Оцените, напряженность магнитного поля у поверхности нейтронной звезды и ее период вращения вокруг оси, образовавшейся из звезды, исходный радиус которой равен 1.5 радиуса Солнца и массой, равной 2.5 массы Солнца. Следует полагать, что при эволюции звезды, полный поток магнитного поля должен сохраняться. Средняя массовая плотность нейтронной материи равна 10^{17} кг/м³. Изменением массы звезды в процессе ее эволюции следует пренебречь. Средняя напряженность магнитного поля у поверхности исходной

№ п/п	h_1 , град	h_2 , град	ΔA , град	T_0 , час	ΔT , с
1	12.175	13.367	0.875	20.583	372.59
2	14.408	15.225	1.038	20.833	333.06
3	16.446	17.333	1.142	21.067	354.88
4	18.933	19.592	0.842	21.333	264.32
5	21.150	21.883	0.946	21.583	295.15
6	23.417	24.242	1.083	21.833	324.69
7	27.733	28.592	1.129	22.333	328.69
8	29.925	30.500	0.825	22.550	228.69
9	34.183	35.000	1.183	23.033	329.16
10	35.800	36.392	0.913	23.217	242.75
11	37.508	38.350	1.317	23.400	342.09
12	39.150	39.875	1.200	23.583	304.09
13	40.846	41.692	1.617	23.783	382.43
14	42.967	43.525	1.054	24.050	245.28
15	44.675	45.308	1.283	24.250	286.91
16	46.592	47.183	1.229	24.500	265.25
17	48.167	48.767	1.604	24.700	311.28

Таблица 1: Значения данных наблюдений Юпитера от 22-23.08.2000 г, полученные Филипповым Ю.П.

звезды составляла 10^4 А/м, а ее период вращения равен 25 суток. Оцените также, максимальное, допустимое ускорение, которое может приобрести протон в магнитном поле нейтронной звезды, движущийся со скоростью $0.1 \cdot c$, где c – скорость света. (14 баллов).

Задача № 18. «Юпитер над горизонтом»

В таблице 1 представлены данные измерений горизонтальных координат и их изменений (здесь h_1 – высота Юпитера, измеренная в момент времени T_0 (по летнему времени 3 часового пояса), h_2 – высота Юпитера, измеренная в момент времени $T_0 + \Delta T$, ΔA – изменение азимута Юпитера за промежуток времени ΔT) для Юпитера, полученные Филипповым Ю.П. 22-23 августа 2000 года с помощью теодолита. Измерения проводились на территории Самарской области, на широте $\varphi = 52^\circ 53'$. С использованием представленных данных

1. определите часовой угол небесного тела, как функцию его горизонтальных координат, склонения и астрономической широты места наблюдения.
2. Исправьте полученный результат за явление атмосферной рефракции, с использованием формулы Лапласа:

$$\delta h_i = A_h \operatorname{ctg} h_i - B_h \operatorname{ctg}^3 h_i, \quad A_h = 57.085'', \quad B_h = 0.067''. \quad (1)$$

3. Определите склонение Юпитера на указанную дату, с учетом явления рефракции.
 4. Вычислите часовой угол и азимута точек восхода и захода Юпитера за горизонт на указанную дату, с учетом явления рефракции.
 5. Рассчитайте моменты времени, соответствующие восходу, верхней кульминации и заходу светила за горизонт.
 6. Определите продолжительность видимости Юпитера над горизонтом на указанные сутки.
 7. Оцените погрешности основных результатов. (15 баллов).
-
-

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Стихи об астрономических объектах и феноменах»

Решение.

1. Название: «Звезды»; Автор: С. Есенин;

*"Звездочки ясные, звезды высокие,
что вы храните в себе, что скрываете?
Звезды, таящие мысли глубокие,
силой какою вы душу пленяете?..."*

Звезда – это массивное самосветящееся тело, состоящее преимущественно из плазмы, излучающее свет и находящееся в состоянии (механического и теплового) равновесия под влиянием сил собственной гравитации и внутреннего давления. В ее недрах происходят (или происходили ранее) реакции термоядерного синтеза.

2. Название: «Звезды ясные»; Автор: К. Фофанов;

*"Звезды ясные, звезды прекрасные,
нашептали цветам сказки чудные,
лепестки улыбнулись атласные,
задрожали листья изумрудные..."*

3. Название: «Посреди небесных тел...»; Автор: М. Лермонтов;

*"Посреди небесных тел, лик Луны туманный:
как он кругл и как он бел, точно блин с сметаной,
каждую ночь она в лучах, путь проходит млечный:
видно там на небесах масленица вечно!..."*

Луна – единственный естественный спутник Земли, имеющий сферическую форму дифференциальное внутреннее строение и значительную массу.

4. Название: «Месяц рогом облако бодает...»; Автор: С. Есенин;

*"Месяц рогом облако бодает,
в голубой купается пыли,
в эту ночь никто не отгадает,
отчего кричали журавли..."*

Месяц – Луна, естественный спутник Земли, наблюдаемый вблизи новолуния;

5. Название: «По порядку все планеты...»; Автор: А. Хайт;

"По порядку все планеты назовет любой из нас:

*раз – Меркурий, два – Венера,
три – Земля, четыре – Марс,
пять – Юпитер, шесть – Сатурн,
семь – Уран, за ним – Нептун..."*

Планета – это небесное тело, вращающееся по орбите вокруг звезды или ее остатков, достаточно массивное, чтобы принять равновесную форму, близкую к форме шара, под действием собственной гравитации, но недостаточно массивное для начала термоядерной реакции, и сумевшее очистить окрестности своей орбиты от планетезималей.

Ответ: ($S_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 2. «Значимые даты в истории астрономии»

Решение. Указанные даты отвечают следующим значимым событиям в истории астрономии:

1. 46 год до н.э. – введение юлианского календаря Ю. Цезарем;
2. 1582 год н.э. – введение григорианского календаря папой римским Григорием XIII;
3. 1846 год н.э. – открытие И. Галле восьмой классической планеты Солнечной системы – Нептуна;
4. 1929 год – экспериментальное обоснование Э. Хабблом космологического закона (закона Хаббла), описывающего расширение Вселенной.
5. 1995 год – открытие первой экзопланеты (обращающейся вокруг звезды 51 Пегаса) швейцарскими астрофизиками М. Мейором и Д. Квелоцем, с использованием метода радиальных скоростей.

Ответ: ($S_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 3. «Полярное сияние»

Решение. **Полярное сияние**, или **северное сияние**, или **аврора** – свечение (люминесценция) верхних слоев атмосфер планет, обладающих магнитосферой, вследствие их взаимодействия с заряженными частицами солнечного ветра.

Цветовая гамма полярного сияния зависит от химического состава атмосферы и ее состояния. Самыми интенсивными, в случае земной атмосферы, являются линии излучения атомарного кислорода и ионизированных молекул азота. Свечение кислорода обусловлено излучением возбужденных атомов в метастабильных состояниях, с длинами волн 557.7 нм (зеленая линия, время жизни 0.74 с) и дублетом 630 и 636.4 нм (красная область, время жизни 110 с). Вследствие этого, красный дублет излучается на высотах 150-400 км, где вследствие высокой разреженности атмосферы, низкая скорость гашения

возбужденных состояний при столкновениях. Ионизованные молекулы азота излучают на длинах 391.4 нм (ближний ультрафиолет), 427.8 нм (фиолетовый) и 522.8 нм (зеленый). Совместное свечение азота и кислорода достигается на высоте 110 км. Однако, каждое явление обладает своей неповторимой гаммой, в силу непостоянства химического состава атмосферы и погодных факторов.

Данные наблюдений межпланетных аппаратов свидетельствуют о том, что в атмосферах всех классических планет, обладающих атмосферой, наблюдается данный феномен. Лишь у Меркурия, лишённого атмосферы, невозможно наблюдение полярного сияния! (\$_{\max} = 3\$ балла).

Задача № 4. «Расстояние до яркого метеора»

Решение. Для определения искомой величины, рассмотрим рис. 1, соответствующий условиям задачи. Из рисунка видно, что максимальное возможное расстояние достигается при условии, когда точка возгорания (точка А) метеора, на указанной высоте, расположена точно на линии горизонта, для земного наблюдателя (находящегося в точке О). Очевидно, что искомое расстояние определяется величиной катета ОА. Применим теорему Пифагора для прямоугольного треугольника $\triangle OAC$:

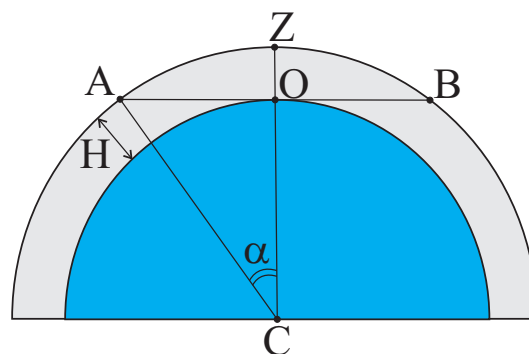


Рис. 1: к определению искомой величины.

$$OA^2 = AC^2 - OC^2, \Rightarrow r = \sqrt{(\mathfrak{R}_{\oplus} + H)^2 - \mathfrak{R}_{\oplus}^2} \approx \sqrt{2\mathfrak{R}_{\oplus}H} = 1130 \text{ км.}$$

В расчете искомой величины учтено, что высота возгорания метеора много меньше радиуса Земли ($H \ll \mathfrak{R}_{\oplus}$).

Ответ: $r \approx \sqrt{2\mathfrak{R}_{\oplus}H} = 1130 \text{ км.}$ (\$_{\max} = 4\$ балла).

Задача № 5. «Абсолютная звездная величина метеора»

Решение. Как известно, *абсолютной звездной величиной метеора* называется звездная величина метеора, наблюдаемого в зените, высота точки возгорания которого равна 100 километров. Чтобы наблюдатель мог увидеть данный метеор, находящийся на горизонте, невооруженным глазом, необходимо, чтобы его видимая звездная величина была не больше 6^m (в предельном случае – $m = 6^m$). Воспользуемся формулой Погсона:

$$m - M = -2.5 \cdot \lg \left(\frac{E_m}{E_M} \right), \quad (2)$$

здесь m , M – видимая и абсолютная звездные величины метеора, E_m , E_M – освещенности, соответствующие звездным величинам m и M . Учтем далее,

что освещенность подчиняется закону обратных квадратов:

$$E \sim \frac{1}{r^2}. \quad (3)$$

Следовательно, из выражения (2) следует, что

$$M_{\max} = m + 2.5 \cdot \lg \left(\frac{H}{r} \right)^2 = m - 5 \cdot \lg \left(\frac{r}{H} \right) = 0.73^m, \quad (4)$$

где $H=100$ км.

Ответ: $M_{\max} = 0.73^m$. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Двойная видимость Венеры и ее угловое расстояние от Солнца»

Решение. Рассмотрим рис. 2.а), соответствующий условиям задачи, здесь S - Солнце, V_1V_2 – орбита Венеры, E_1E_2 – орбита Земли. V_2 – текущее положение Венеры, E_2 – текущее положение Земли, i_V – наклонение орбиты Венеры к плоскости земной орбиты (эклиптики). Определим угол β_V – угол элонгации Венеры в соединении с Солнцем. Воспользуемся теоремой синусов для $\triangle SV_2E_2$:

$$\frac{a_V}{\sin \beta_V} = \frac{a_{\oplus}}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \beta_V = \left(\frac{a_V}{a_{\oplus}} \right) \sin \alpha. \quad (5)$$

Учитывая также, что сумма углов в треугольнике равна π , то можем записать

$$\alpha + \beta_V + i_V = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - i_V - \beta_V. \quad (6)$$

В итоге, получаем

$$\sin \beta_V = \frac{a_V}{a_{\oplus}} (\sin i_V \cos \beta_V + \cos i_V \sin \beta_V).$$

Разделим последнее выражение на $\sin \beta_V$, в результате получаем

$$1 = \frac{a_V}{a_{\oplus}} (\sin i_V \operatorname{ctg} \beta_V + \cos i_V), \Rightarrow \operatorname{ctg} \beta_V = \frac{a_{\oplus}}{a_V} \frac{1}{\sin i_V} - \operatorname{ctg} i_V, \text{ или}$$

$$\operatorname{ctg} \beta_V = \frac{a_{\oplus}}{a_V} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 i_V} - \operatorname{ctg} i_V. \quad (7)$$

Используя значения параметров ($a_{\oplus} = 1$ а.е., $a_V = 0.723$ а.е., $i = 3.4^\circ$) орбит из раздела «Справочные данные», в результате получаем

$$\operatorname{ctg} \beta_V = 6.50, \Rightarrow \beta_V = 8.8^\circ. \quad (8)$$

Т.о., Венера в наивысшей точке располагалась над Солнцем под углом $\beta_V = 8.8^\circ$. Следовательно, планета располагалась над эклиптикой под таким же углом (ему отвечает отрезок SV на рис. 2.б).

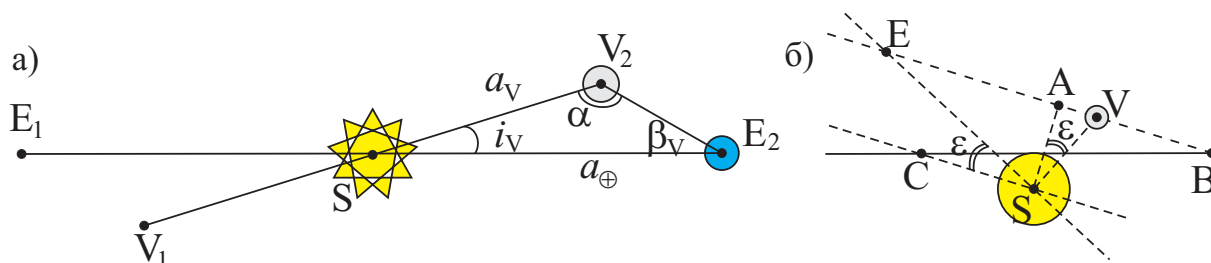
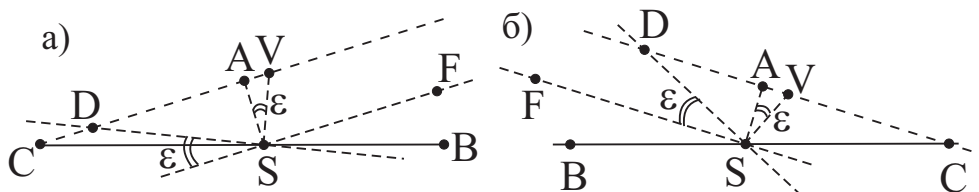
Рис. 2: к определению углов β_V и δ_V .

Рис. 3: к определению времен утренней и вечерней видимости Венеры.

В 2017 году день весеннего равноденствия наступил 20 марта. Значит, указанная дата отстает от последней на $\tau = 5$ суток. За данный промежуток времени Солнце пройдет по эклиптике дугу

$$\ell_e = \frac{360^\circ}{T_\oplus} \cdot \tau = 4.9^\circ.$$

где $T_\oplus$ – звездный год Земли. При этом, склонение Солнца будет (см. рис. 2.б)

$$\delta_\odot \approx \ell_e \sin \varepsilon \approx 2.0^\circ.$$

Поскольку, угол между эклиптикой и экватором, вблизи точки весны, равен $\varepsilon = 23^\circ 26'$, то и угол, между кругом широты Венеры (SV) и кругом склонения Солнца (SA), тоже должен быть равен ε (см. рис. 2.б). Тогда, склонение Венеры будет определяться выражением вида:

$$\delta_V = SV \cos \varepsilon + \delta_\odot = \beta_V \cos \varepsilon + \delta_\odot = 10.1^\circ \approx 10^\circ.$$

Ответ: $\delta_V \approx 10^\circ$. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень В)

Задача № 7. «Определение видимости Венеры на небосводе»

Решение. Рассмотрим движение Венеры и Солнца вблизи горизонта (см. рис. 3). Здесь CV – суточная параллель Венеры, SF – суточная параллель Солнца, SD – эклиптика. В точках V и S находятся Венера и Солнце, на момент восхода последнего. В силу относительной близости Венеры к Солнцу, увидеть планету можно лишь в случае, когда Солнце находится под горизонтом. Следовательно, время утренней видимости Венеры соответствует промежутку времени, в течение которого планета проходит дугу CV (см. рис. 3.а). Окончание утренней видимости наступит в момент когда Солнце попадет в

точку S , при этом планета окажется в точке V . Тогда, время утренней видимости будет

$$t_{yb} = \frac{CV}{\omega_V}, \quad (9)$$

где

$$CV = CA + AV = \beta_V \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi + \beta_V \sin \varepsilon = \beta_V (\sin \varepsilon + \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi), \quad (10)$$

где $\beta_V = SV$. Угловая скорость видимого движения Венеры по небосводу равна

$$\omega_V = \omega_{\oplus} \cos \delta_V, \quad (11)$$

здесь $\omega_{\oplus} = 15''/\text{сек}$ – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси, δ_V – склонение Венеры. Подставляя (10) и (11) в (9), в результате получаем

$$t_{yb} = \frac{\beta_V (\sin \varepsilon + \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi)}{\omega_{\oplus} \cdot \cos \delta_V} = 58.1 \text{ мин} \approx 58 \text{ мин}. \quad (12)$$

Рассмотрим положение Венеры и Солнца по отношению к горизонту, вечером, на западе (см. рис. 3.б). Время вечерней видимости Венеры определяется временем движения планеты по участку VC суточной параллели, от момента, когда Солнце пройдет точку захода S , до момента захода Венеры в точке C . Тогда, время вечерней видимости Венеры будет равно

$$t_{bb} = \frac{VC}{\omega_V} = \frac{AC - VC}{\omega_{\oplus} \cos \delta_V} = \frac{\beta_V}{\omega_{\oplus} \cos \delta_V} (\cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi - \sin \varphi).$$

В итоге,

$$t_{bb} = \frac{\beta_V}{\omega_{\oplus} \cos \delta_V} (\cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi - \sin \varepsilon) = 29.6 \text{ мин} \approx 30 \text{ мин}. \quad (13)$$

Ответ: к задаче представляется результатами (12)-(13). (6 баллов).

Задача № 8. «Максимальный допустимый радиус Солнца»

Решение. Как известно, внешняя граница тела Солнца определяется положением внешней границы ее короны – наиболее протяженной и разреженной части атмосферы Солнца. Поскольку, Солнце обладает вращательным движением вокруг оси, следовательно, все его составляющие элементы должны двигаться по круговым орбитам и обладать центростремительным ускорением, при этом данное вращение должно порождаться притяжением областей Солнца, расположенных ближе к центру Солнца, чем рассматриваемый элемент массы. Запишем второй закон Ньютона для пробного элемента массы Солнца, находящегося на его поверхности:

$$m a_{\text{ц}} = F_{\text{пр}} \text{ или } m \omega^2 r = \frac{G m \mathfrak{M}_{\odot}}{r^2} \Rightarrow r_0 = \sqrt[3]{\frac{G \mathfrak{M}_{\odot} T_{\odot}^2}{4 \pi^2}}. \quad (14)$$

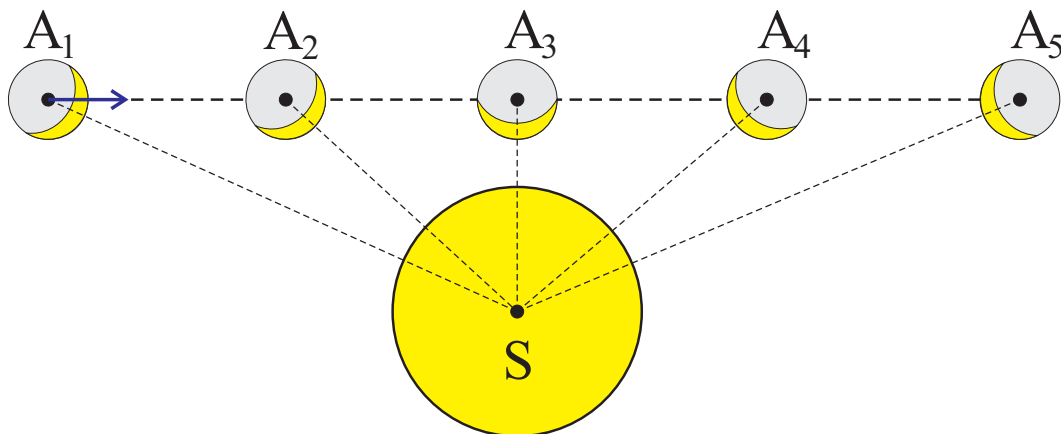


Рис. 4: к определению угла поворота серпа Венеры.

На расстояниях, больших r_0 , сила притяжения будет меньше необходимой центростремительной силы, и следовательно, элемент массы не сможет двигаться по круговой орбите, он сорвется с нее и будет выброшен прочь от Солнца (суть ротационной неустойчивости тела Солнца). Следовательно, при $r > r_0$, вещество уже не может принадлежать Солнцу. Поэтому, r_0 , определяемый (14), и есть максимально возможный радиус Солнца. Вычислим его, согласно современным данным для Солнца

$$r_0 = 2.50 \cdot 10^7 \text{ км} = 0.167 \text{ а.е.}$$

Ответ: $r_0 = \sqrt[3]{\frac{G m_{\odot} T_{\odot}^2}{4\pi^2}} = 2.5 \cdot 10^{10} \text{ км} = 0.167 \text{ а.е.}$ (7 баллов).

Задача № 9. «Угловая скорость поворота серпа Венеры»

Решение. Рассмотрим рис. 4, соответствующий условию задачи. В малой окрестности нижнего соединения Венера будет перемещаться относительно Солнца, по участку дуги эллиптической орбиты, близкому по форме к прямой. Пусть, в начальный момент времени, центр видимого диска Венеры находится в точке A_1 данной прямой. Угол между направлением движения и направлением на Солнце, пусть равен φ_1 . Спустя промежуток времени Δt Венера оказывается в точке A_2 , при этом угол между теми же направлениями равен φ_2 . За указанный промежуток времени серп Венеры относительно центра ее диска поворачивается на угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Следовательно, искомая угловая скорость поворота серпа Венеры есть

$$\omega_s \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (15)$$

В последнем выражении мы перешли от конечных приращений к производной от угла поворота по времени. Заметим, что из $\triangle A_1 A_3 S$ следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta_V}{\omega_{\text{vis}}(t_0 - t)}. \quad (16)$$

здесь ω_{vis} – угловая скорость видимого движения Венеры, в окрестности нижнего соединения, t – момент времени пребывания Венеры в точке A_1 ; t_0 – мо-

мент пребывания планеты в точке A_3 . Продифференцируем последнее уравнение по времени t , тогда

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\beta_V}{\omega_{\text{vis}}(t_0 - t)^2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\beta_V \cos^2 \varphi}{\omega_{\text{vis}}(t_0 - t)^2},$$

или

$$\omega_s = \frac{\beta_V}{\omega_{\text{vis}}(t_0 - t)^2(1 + \tan^2 \varphi)} = \frac{\beta_V \omega_{\text{vis}}}{\omega_{\text{vis}}^2(t_0 - t)^2 + \beta_V^2}. \quad (17)$$

Ради простоты вычислений, в дальнейшем, будем полагать, что $t_0 = 0$. Для определения явной зависимости $\omega_s(t)$ необходимо вычислить ω_{vis} . Для этого учтем, что наклонение орбиты Венеры мало, следовательно, им можно пренебречь и считать, что Венера перемещается в плоскости эклиптики относительно Солнца, со скоростью

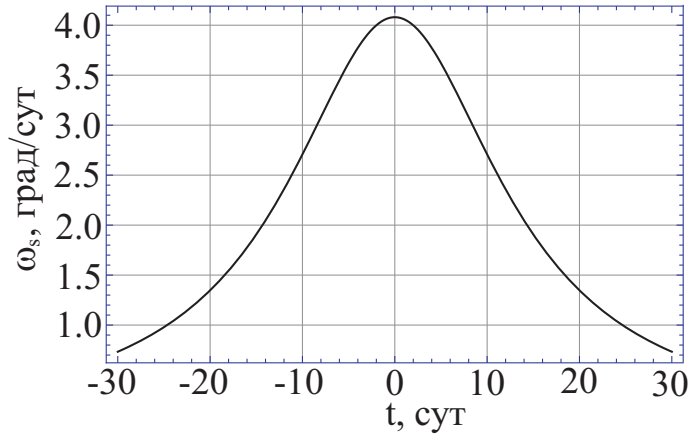


Рис. 5: зависимость угловой скорости ω_s от времени t .

$$v_V = \frac{2\pi a_V}{T_V}. \quad (18)$$

При этом, гелиоцентрическая скорость Земли равна

$$v_{\oplus} = \frac{2\pi a_{\oplus}}{T_{\oplus}}. \quad (19)$$

Следовательно, скорость Венеры, относительно Земли направлена перпендикулярно прямой "Венера-Земля" и равна

$$\Delta v = v_V - v_{\oplus} = \frac{2\pi a_{\oplus}}{T_{\oplus}} \left(\left(\frac{a_V}{a_{\oplus}} \right) \cdot \left(\frac{T_{\oplus}}{T_V} \right) - 1 \right) = \frac{2\pi a_{\oplus}}{T_{\oplus}} \left(\sqrt{\frac{a_{\oplus}}{a_V}} - 1 \right). \quad (20)$$

При записи последнего равенства мы использовали третий закон Кеплера. Следовательно, угловая скорость видимого движения Венеры в нижнем соединении есть

$$\omega_{\text{vis}} = \frac{\Delta v}{(a_{\oplus} - a_V)} = \frac{2\pi a_{\oplus}}{T_{\oplus}(a_{\oplus} - a_V)} \left(\sqrt{\frac{a_{\oplus}}{a_V}} - 1 \right) = 0.011 \text{ рад/сут} = 37.6' / \text{сут}.$$

С использованием последнего результата можно легко построить искомый график. Последний представлен на рис. 5. Из рисунка видно, что максимального значения ($\omega_{s \text{ max}} = 4.1^\circ / \text{сут}$) искомая величина достигает, очевидно, в момент прохождения планеты над Солнцем. Посредством интегрирования

полученной функции по времени можно строго показать, что полный угол поворота серпа Венеры за 60 дней составляет 130° .

Ответ: представлен формулами (17) и (21); график зависимости представлен на рис. 5. (8 баллов).

Задача № 10. «Фазовый угол и минимальная звездная величина нижней планеты»

Решение. Построим рисунок, соответствующий условию задачи. Определим освещенность, создаваемую Солнцем у поверхности планеты:

$$E_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_p^2}, \quad (21)$$

здесь $L_{\odot}$ – светимость Солнца, a_p – большая полуось орбиты нижней планеты. На освещенную часть поверхности планеты падает поток

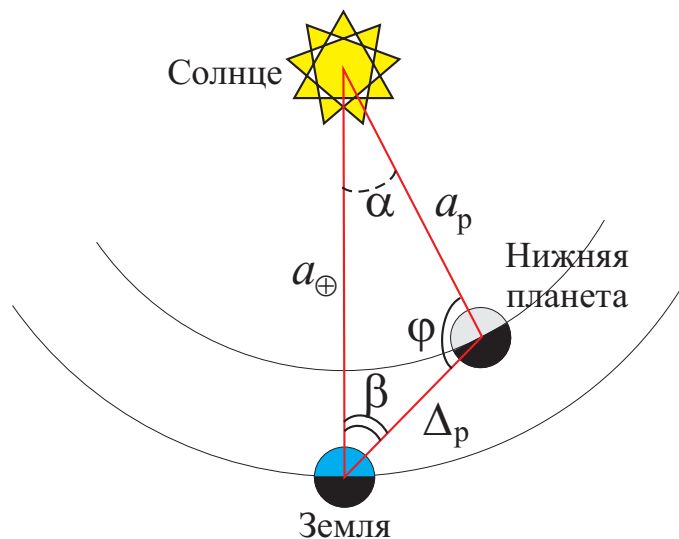


Рис. 6: к определению искомых величин: фазового угла φ и угла элонгации α .

$$\Phi_0 = E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_p^2, \quad (22)$$

где $\mathfrak{R}_p$ – радиус планеты. Поток, рассеянный поверхностью планеты с альбедо A , есть

$$\Phi_{\text{sca}} = A \cdot \Phi_0 = A E_{\odot} \pi \mathfrak{R}_p^2. \quad (23)$$

Согласно рис. 6, с поверхности Земли видна лишь доля F освещенного диска планеты, называемая **фазой планеты**. Следовательно, освещенность, создаваемая освещенной частью видимого диска планеты у поверхности Земли, есть

$$E_p = \frac{F \Phi_{\text{sca}}}{2\pi \Delta_p^2}. \quad (24)$$

Здесь мы учли, что поверхность нижней планеты является ламбертовским источником, и потому излучает по всем направлениям одинаковое количество энергии, высвечиваемое в полусферу, в которой находится наблюдатель. Далее учтем, что фаза планеты может быть представлена в терминах ее фазового угла φ :

$$F = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi). \quad (25)$$

С использованием теоремы синусов для треугольника "Солнце-нижняя планета-Земля" определим геоцентрическое расстояние Δ_p нижней планеты:

$$\frac{\Delta_p}{\sin \alpha} = \frac{a_{\oplus}}{\sin \varphi} = \frac{a_p}{\sin \beta}, \Rightarrow \quad (26)$$

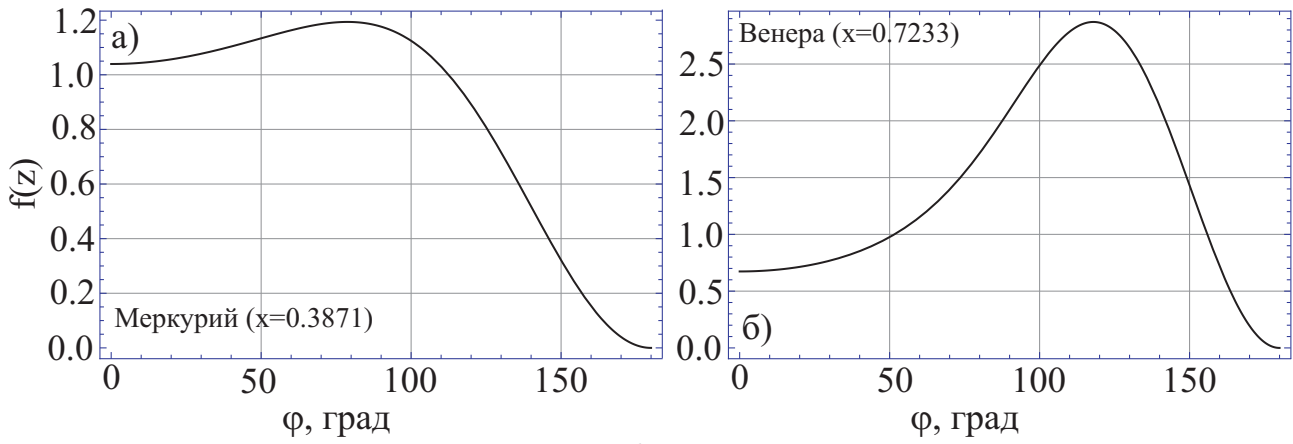


Рис. 7: к определению значения фазового угла Меркурия и Венеры.

$$\Delta_p = a_{\oplus} \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = a_{\oplus} \frac{\sin(\pi - (\varphi + \beta))}{\sin \varphi} = a_{\oplus} \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\sin \varphi}.$$

или

$$\Delta_p = a_{\oplus} \left(\frac{\sin \varphi \cos \beta + \sin \beta \cos \varphi}{\sin \varphi} \right),$$

$$\Delta_p = a_{\oplus} (\cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi). \quad (27)$$

Из (26) также следует, что

$$\sin \beta = x \sin \varphi, \quad \text{где } x = \left(\frac{a_p}{a_{\oplus}} \right). \quad (28)$$

С использованием последнего результата, выражение (24) представляется в виде:

$$E_p = \frac{L_{\odot}}{4 \pi a_p^2} \cdot \frac{\pi \Re_p^2 A}{4 \pi a_{\oplus}^2} \frac{(1 + \cos \varphi)}{(\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi} + x \cos \varphi)^2}. \quad (29)$$

или

$$E_p = B \cdot f(Z), \quad \text{где } f(Z) = \frac{(1 + Z)}{(1 - x^2 + 2x^2 \cdot Z^2 + 2xZ\sqrt{1 - x^2 + x^2 Z^2})}, \quad (30)$$

$$Z = \cos \varphi, \quad -1 \leq Z \leq 1, \quad B = \frac{L_{\odot} \Re_p^2 A}{16 \pi a_p^2 a_{\oplus}^2}. \quad (31)$$

Чтобы звездная величина нижней планеты достигла минимального значения, ее освещенность должна быть максимальна. Следовательно, когда функция $f(Z)$ будет максимальна, то и освещенность будет максимальной. Исследуем данную функцию графически, в случае Меркурия ($x_{\text{М}} = 0.3871$) и Венеры ($x_2 = 0.7233$), см. рис. 7.

Из рис. 7.а) видно, что в случае Меркурия максимум достигается незадолго до момента наибольшей восточной элонгации или сразу после западной элонгации, при $\varphi_{\text{М}} = 78.76^\circ$, и $\beta_{\text{М}} = 22.31^\circ$. Соответствующее значение функции $f(Z(\varphi_{\text{М}})) = 1.1936$ и освещенности $E_{\text{max}}^{(\text{М})} = 7.207 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2$.

Согласно рис. 7.б), в случае Венеры, максимальное значение функция $f(Z)$ достигается существенно позже момента наибольшей восточной элонгации или существенно раньше момента наибольшей западной элонгации, при $\varphi_{\text{В}} = 117.927^\circ$, и $\beta_{\text{В}} = 39.72^\circ$. Соответствующее значение функции $f(Z(\varphi_{\text{В}})) = 2.8706$ и освещенности $E_{\text{max}}^{(\text{В})} = 1.986 \cdot 10^{-6}$ Вт/м².

С использованием формулы (29), оценим минимальную звездную величину нижней планеты. Поскольку, звезда с $m = 0^m$ создает поток $E_0 = 2.48 \cdot 10^{-8}$ Вт/м², то нижняя планета будет иметь звездную величину

$$m_{\text{min}} = -2.5 \cdot \lg \left(\frac{E}{E_0} \right) = 2.5 \lg \left(\frac{E_0}{B f(Z)} \right). \quad (32)$$

где $f(z)$ по-прежнему определяется выражением (30). В результате, для Меркурия и Венеры получаем значения минимальной звездной величины:

$$m_{\text{min}}^{(\text{М})} = -1.16^m, \quad m_{\text{min}}^{(\text{В})} = -4.76^m. \quad (33)$$

Ответ: $\varphi_{\text{М}} = 78.76^\circ$, $\beta_{\text{М}} = 22.31^\circ$, $m_{\text{min}}^{(\text{М})} = -1.16^m$; $\varphi_{\text{В}} = 117.927^\circ$, $\beta_{\text{В}} = 39.72^\circ$, $m_{\text{min}}^{(\text{В})} = -4.76^m$. (8 баллов).

Задача № 11. «Звездная величина Солнца и фотосферное пятно»

Решение. Построим рис. 8, соответствующий условиям задачи. Пусть угол, между направлениями на солнечное пятно и на наблюдателя (если смотреть из центра Солнца), равен φ . Наблюдателю круглое пятно будет видиться эллипсоидальным, с большой полуосью, равной $D = 2R$, и малой – $d = 2R \cdot \cos \varphi$. Следовательно, площадь видимого пятна составит

$$S = \frac{\pi}{4} D d = \pi R^2 \cdot \cos \varphi. \quad (34)$$

Яркость поверхности Солнца в области пятна существенно меньше, поскольку его температура на $\Delta T = 1.5 \cdot 10^3$ К меньше температуры окружающих областей. Учитывая, что температура поверхности Солнца $T_{\odot} = 5780$ К, то температура в области пятна $T_s = T_{\odot} - \Delta T = 4.28 \cdot 10^3$ К. Яркость единичной площадки поверхности Солнца определяется законом Стефана-Больцмана, следовательно отношение потоков энергии, испускаемой единичными площадками внутри и вне пятна, есть

$$\eta = \frac{\Phi_0}{\Phi_s} = \left(\frac{T_{\odot}}{T_s} \right)^4 = \left(\frac{T_{\odot}}{T_{\odot} - \Delta T} \right)^4 = 3.33. \quad (35)$$

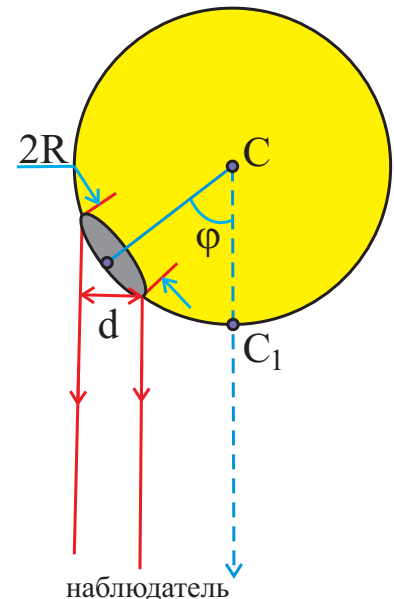


Рис. 8: к определению видимых размеров пятна.

Следовательно, освещенность создаваемая Солнцем с пятном, будет равна

$$E = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2} \cdot \left(1 - \frac{S}{\pi \Re_{\odot}^2} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\right) = f_{\odot} \left(1 - \left(\frac{R}{\Re_{\odot}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{h}\right) \cos \varphi\right). \quad (36)$$

Учитывая, что угол φ можно представить в виде:

$$\varphi = \omega_{\odot}(t - t_0), \quad (37)$$

где t_0 – момент времени, когда пятно окажется в точке C_1 (далее, ради простоты вычислений, полагаем $t_0 = 0$), $\omega_{\odot}$ – угловая скорость вращения Солнца на экваторе

$\omega_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\odot}}$, где $T_{\odot} = 25$ сут – период вращения Солнца на экваторе.

В результате, освещенность представляется в виде:

$$E = f_{\odot} \left(1 - \left(\frac{R}{\Re_{\odot}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \cos \omega_{\odot} t\right). \quad (38)$$

С использованием формулы Погсона, звездную величину Солнца можно представить в виде:

$$m_{\odot} = m_{\odot}^{(0)} - 2.5 \lg \left(1 - \left(\frac{R}{\Re_{\odot}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \cos \omega_{\odot} t\right). \quad (39)$$

тогда изменение звездной величины Солнца есть

$$\Delta m_{\odot} = m_{\odot} - m_{\odot}^{(0)} = -2.5 \lg \left(1 - \left(\frac{R}{\Re_{\odot}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \cos \omega_{\odot} t\right). \quad (40)$$

Перейдем к натуральному логарифму:

$$\Delta m_{\odot} = -\frac{2.5}{\ln 10} \ln \left[1 - \left(\frac{R}{\Re_{\odot}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \cos \omega t\right]. \quad (41)$$

Поскольку $R \ll \Re_{\odot}$, $\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) < 1$, $\cos \omega_{\odot} t \leq 1$, то можно воспользоваться приближением вида:

$$\ln(1 + x) \approx x, \quad \text{при } x \ll 1. \quad (42)$$

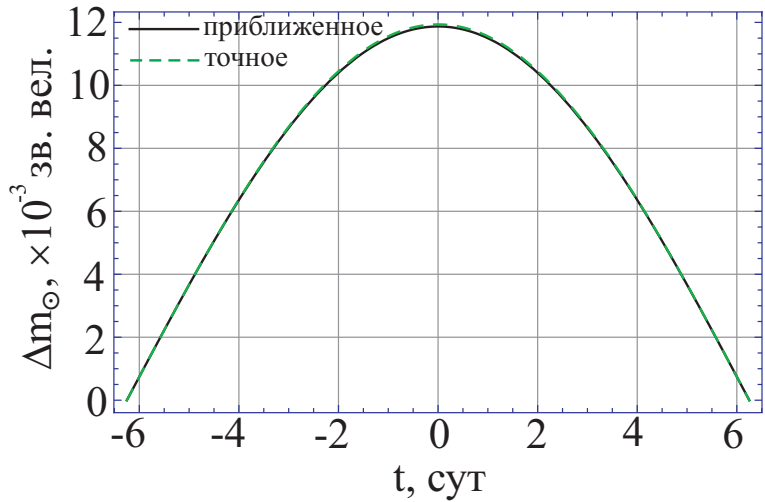


Рис. 9: зависимость изменения звездной величины Солнца $\Delta m_{\odot}$ от времени t .

В итоге,

$$\Delta m_{\odot} \approx \frac{2.5}{\ln 10} \left(\frac{R}{\mathfrak{R}_{\odot}} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) \cos \omega_{\odot} t. \quad (43)$$

при $-\frac{T_{\odot}}{4} \leq t \leq \frac{T_{\odot}}{4}$, $\omega_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\odot}}$. Т. о., искомая величина с течением времени изменяется по закону косинуса.

Поскольку, угловой диаметр Солнца (пятна) пропорционален его линейному диаметру, то отношение $R/\mathfrak{R}_{\odot} = d''/D''_{\odot}$, здесь $D''_{\odot} = 32'$ – угловой диаметр Солнца. В результате, точное и приближенное выражения для зависимости $\Delta m_{\odot}(t)$ представляются в виде:

$$\Delta m_{\odot} = -\frac{2.5}{\ln 10} \ln \left[1 - \left(\frac{d''}{D''_{\odot}} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) \cos \omega t \right], \quad (44)$$

$$\Delta m_{\odot} \approx \frac{2.5}{\ln 10} \left(\frac{d''}{D''_{\odot}} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) \cos \omega_{\odot} t. \quad (45)$$

Кривые данных зависимостей для самого большого пятна представлены на рис. 9. Здесь $\frac{d''_{\odot}}{D''_{\odot}} = \frac{4'}{32'} = \frac{1}{8}$. Очевидно, что амплитуда изменения блеска Солнца, в этом случае, не превосходит 0.012^m , что, конечно, неразличимо человеческим глазом (предел его разрешения составляет около 0.1^m), поэтому человек не может заметить по освещенности, создаваемой Солнцем на Земле, наличие (отсутствие) на его поверхности пятен. Следует также отметить, что приближенное выражение (45) весьма точно описывает поведение искомой зависимости (графики фактически совпадают всюду).

Ответ: к задаче представлен выражениями (44)-(45); кривые указанных зависимостей представлены на рис. 9. (9 баллов).

Задача № 12. «Радиус орбиты одинокого Юпитера»

Решение. Поскольку, все планеты Солнечной системы изначально двигались по круговым орбитам, то для каждой справедлив второй закон Ньютона:

$$m_i \frac{V_i^2}{r_i} = \frac{G m_i \mathfrak{M}_{\odot}}{r_i^2}, \Rightarrow m_i \frac{V_i^2}{2} = \frac{G m_i \mathfrak{M}_{\odot}}{2r_i}, \text{ где } i = 1, \dots, 7, \quad (46)$$

здесь m_i, V_i, r_i – масса, скорость, радиус орбиты i -й классической планеты соответственно, $\mathfrak{M}_{\odot}$ – масса Солнца, G – универсальная гравитационная постоянная.

Полная механическая энергия i -й планеты есть

$$E_i = m_i \frac{V_i^2}{2} - \frac{G m_i \mathfrak{M}_{\odot}}{r_i} = -\frac{G m_i \mathfrak{M}_{\odot}}{2r_i}, \quad i = 1, \dots, 7. \quad (47)$$

Чтобы i -ая планета могла покинуть Солнечную систему, необходимо чтобы ее полная энергия была неотрицательной. Следовательно, в предельном случае,

данная планета должна "забрать" у Юпитера энергию, равную

$$|E_i| = \frac{G m_i \mathfrak{M}_\odot}{2 r_i}. \quad (48)$$

Чтобы все классические планеты (кроме Юпитера) смогли покинуть Солнечную систему, необходимо чтобы Юпитер отдал энергию

$$\sum_{i=1}^7 |E_i| = \frac{G \mathfrak{M}_\odot}{2} \sum_{i=1}^7 \frac{m_i}{r_i}. \quad (49)$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии для Солнечной системы:

$$-\frac{G \mathfrak{M}_\odot}{2} \sum_{i=1}^7 \frac{m_i}{r_i} - \frac{G m_{\text{ж}} \mathfrak{M}_\odot}{2 r_{\text{ж}}^{(0)}} = -\frac{G m_{\text{ж}} \mathfrak{M}_\odot}{2 r_{\text{ж}}},$$

здесь $r_{\text{ж}}^{(0)}, r_{\text{ж}}$ – начальное и конечное значения радиуса орбиты Юпитера.

$$r_{\text{ж}} = m_{\text{ж}} \left(\sum_{i=1}^8 \frac{m_i}{r_i} \right)^{-1}. \quad (50)$$

Используя значения масс классических планет, выраженных в массах Земли, и значения больших полуосей, выраженных в а.е., в результате получаем значение $r_{\text{ж}} = 4.253$ а.е. т.о., большая полуось (радиус) орбиты Юпитера уменьшится на 0.95 а.е. Период обращения планеты-гиганта определим с помощью третьего закона Кеплера:

$$\left(\frac{T_{\text{ж}}}{T_{\text{ж}}^{(0)}} \right)^2 = \left(\frac{r_{\text{ж}}}{r_{\text{ж}}^{(0)}} \right)^3, \Rightarrow T_{\text{ж}} = T_{\text{ж}}^{(0)} \left(\frac{r_{\text{ж}}}{r_{\text{ж}}^{(0)}} \right)^{3/2} = 8.77 \text{ лет}. \quad (51)$$

Ответ: к задаче представляется выражениями (50), (51); $r_{\text{ж}} = 4.253$ а.е. ($\$_{\text{max}} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Минимальный угловой диаметр сферического тела»

Решение: Согласно определению, *фаза сферического тела* есть доля освещенной части диска или освещенной части диаметра, проходящего через середину терминатора (см. рис. 10.а)-б), и равна

$$F = \frac{d}{2r} = \frac{1 + \cos \varphi}{2},$$

где φ – угол с вершиной в центре тела, образованный направлениями на Солнце и Землю (его еще называют *фазовым углом*). Для него выполняется очевидное соотношение

$$\varphi = \arccos(2F - 1).$$

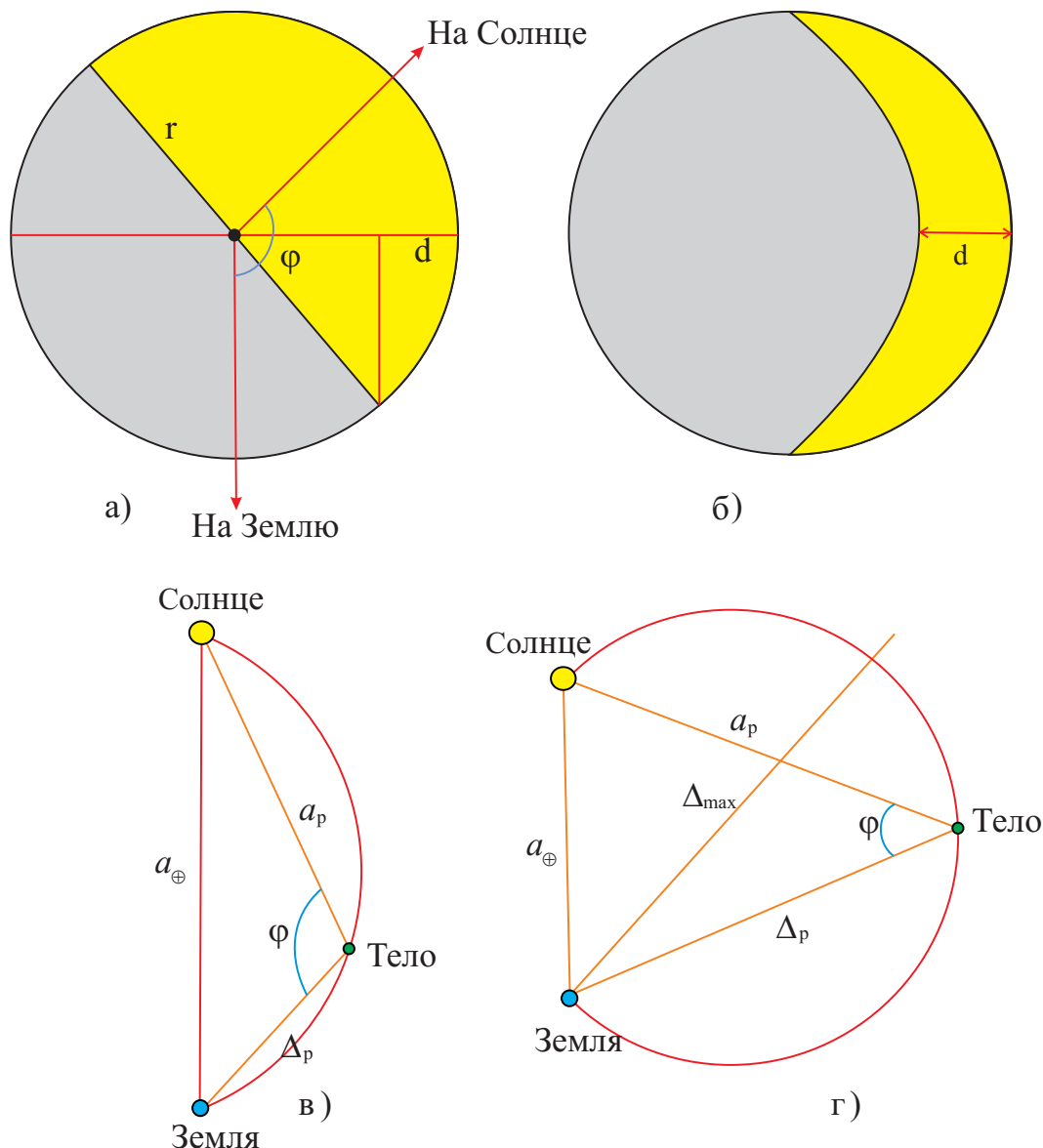


Рис. 10: к определению минимального углового диаметра планеты.

Рассмотрим рис. 10.в)-г). Здесь Солнце, Земля и наблюдаемое тело лежат в одной плоскости (которая не должна обязательно совпадать с плоскостью эклиптики). Обозначим расстояние между Солнцем и Землей через $a_{\oplus}$. Итак, чтобы угловой диаметр тела был минимален, необходимо чтобы его геоцентрическое расстояние было максимально возможным, при данном значении фазы F .

Случай № 1. $F \leq 0.5$. Если фаза тела F меньше 0.5, и фазовый угол φ больше 90° (см. рис. 10.в), то тело должно находиться на малой дуге окружности, описанной около треугольника «Солнце-Земля-тело». Очевидно, что максимально возможное расстояние между Землей и телом равно $a_{\oplus}$ и достигается, если тело находится вблизи Солнца. При этом, угловой диаметр тела равен

$$D''_{\min} = \left(\frac{2R}{a_{\oplus}} \right) \times 2062065''. \quad (52)$$

Случай № 2. $F > 0.5$. В случае, когда фаза F больше 0.5, фазовый угол $\varphi < 90^\circ$, тело будет находиться на большой дуге окружности. Максимальное расстояние от Земли $\Delta_{\max}$ будет равно диаметру этой окружности. Из теоремы синусов имеем:

$$\Delta_{\max} = \frac{a_{\oplus}}{\sin \varphi} = \frac{a_{\oplus}}{2\sqrt{F(1-F)}}.$$

При этом, минимальный угловой диаметр тела равен

$$D''_{\min} = \left(\frac{2R}{\Delta_{\max}} \right) \times 2062065'' = 4 \left(\frac{R}{a_{\oplus}} \right) \sqrt{F(1-F)} \times 2062065''. \quad (53)$$

В итоге,

$$D''_{\min} = 2062065'' \times \left(\frac{2R}{a_{\oplus}} \right) \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{при } F \leq 0.5, \\ 2\sqrt{F(1-F)}, & \text{при } F > 0.5 \end{array} \right\}. \quad (54)$$

Ответ: к задаче представлен системой (54). ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Двойные астероиды и их характеристики»

Решение. На движение астероидов ГПА, главным образом, оказывают гравитационное воздействие два массивных тела Солнечной системы: Солнце и Юпитер. Их приливные силы, действующие на двойные и кратные системы взаимодействующих астероидов, способствуют их разрушению. Рассмотрим пару взаимодействующих астероидов и Солнце. Ради простоты рассуждений будем полагать, что орбита двойной системы совпадает с плоскостью их орбиты относительно Солнца. Если астероиды отстоят друг от друга на искомом предельном расстоянии r , то в этом случае, сила притяжения, действующая на данный астероид A_2 со стороны астероида A_1 , должна быть скомпенсирована силой приливного действия Солнца, т.е.

$$\frac{G \mathfrak{M}^2}{r^2} = \frac{G \mathfrak{M} \mathfrak{M}_{\odot}}{r_{\odot}^3} \cdot 2r, \quad (55)$$

где $r_{\odot}$ – гелиоцентрическое расстояние двойной системы. При больших расстояниях между компонентами сила приливного действия Солнца становится больше силы взаимного притяжения астероидов, и потому такие пары будут разорваны приливным действием центральной звезды. При записи (55) учтено, что расстояние между астероидами (56) должно быть много меньше $r_{\odot}$, т.е. $r \ll r_{\odot}$. Из (55) следует, что максимально допустимое расстояние (критическое значение) между астероидами есть

$$r = r_{\odot} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{M}_{\odot}}}. \quad (56)$$

Очевидно, что последний результат сильно зависит от гелиоцентрического расстояния системы. Чтобы система существовала длительное время, необходимо чтобы

$$r \leq r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{M}_{\odot}}} \cdot r_{\odot \min}, \quad (57)$$

здесь $r_{\odot \min}$ – минимальное гелиоцентрическое расстояние. Очевидно, что последний результат зависит от большой полуоси астероида. Согласно условию задачи,

$$2.2 \text{ а.е.} \leq a_a \leq 3.6 \text{ а.е.} \quad (58)$$

Следовательно, параметр $r_{\max}$ будет изменяться в пределах

$$454 \text{ км} \leq r_{\max} \leq 744 \text{ км.} \quad (59)$$

здесь учтено, что масса астероида с $R = 1$ км есть

$$\mathfrak{M} = \frac{4\pi}{3} \rho_a R^3 = 1.05 \cdot 10^{13} \text{ кг.} \quad (60)$$

Далее воспользуемся вторым законом Ньютона для астероида из двойной системы

$$\mathfrak{M} \frac{4\pi^2 r_{\max}}{2T^2} = \frac{G\mathfrak{M}^2}{r_{\max}^2}, \quad T = \pi \sqrt{\frac{2}{G\mathfrak{M}}} r_{\max}^{3/2}. \quad (61)$$

Следовательно, возможные значения периода обращения представляются в виде:

$$1.63 \text{ лет} \leq T \leq 3.41 \text{ лет.} \quad (62)$$

Выполним подобный анализ в случае Юпитера: здесь $r_{J \min} = a_J - a_a$ (в случае противостояния Юпитера), где a_J – большая полуось орбиты Юпитера. В итоге, имеем

$$r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{M}_J}} (a_J - a_a). \quad (63)$$

Следовательно, параметр $r_{\max}$ будет изменяться в пределах

$$r_{\max}^{(\min)} \leq r_{\max} \leq r_{\max}^{(\max)}, \quad \text{где} \quad (64)$$

$$r_{\max}^{(\min)} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{M}_J}} (a_J - a_a^{(\max)}), \quad r_{\max}^{(\max)} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{M}_J}} (a_J - a_a^{(\min)}). \quad (65)$$

Следовательно,

$$3366 \text{ км} \leq r_{\max} \leq 6305 \text{ км.} \quad (66)$$

Соответствующие возможные значения периода обращения системы представляются в виде:

$$T_{\min} \leq T \leq T_{\max}, \quad \text{где} \quad (67)$$

$$T_{\min} = \pi \sqrt{\frac{1}{G\mathfrak{M}_J}} (a_J - a_a^{(\max)})^{3/2}, \quad T_{\max} = \pi \sqrt{\frac{1}{G\mathfrak{M}_J}} (a_J - a_a^{(\min)})^{3/2}. \quad (68)$$

или

$$32.84 \text{ лет} \leq T \leq 84.20 \text{ лет}. \quad (69)$$

Из сопоставления интервалов (59) и (66) следует, что ограничение на размеры двойных и кратных систем астероидов налагает именно Солнце, а не Юпитер!

Замечание. Разрушающее действие на двойные астероиды могут также оказывать и другие такие же астероиды. Убедимся, что влиянием последних можно пренебречь. Для этого оценим среднее расстояние между астероидами в главном поясе. Прежде всего, вычислим их концентрацию в главном поясе:

$$n = \frac{N}{V}. \quad (70)$$

где V – объем главного пояса. Согласно условию задачи, форма пояса близка к форме круглого тора (баранки). Объем последнего можно вычислить по теореме *Гульдена-Паппа*, в виде:

$$V = 2\pi\bar{r}\pi R_T^2 = 2\pi^2\bar{r}R_T^2, \quad (71)$$

здесь $\bar{r}$ – среднее расстояние от оси вращения тора до центра его геометрического сечения. В случае ГПА имеем

$$\bar{r} = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = 2.9 \text{ а.е.} \quad (72)$$

В формуле (56) R_T – радиус тора. Очевидно, его можно представить в виде:

$$R_T = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} = 0.7 \text{ а.е.}$$

В итоге, объем пояса равен $V = 28 \text{ а.е.}^3$, а концентрация $n = 1.597 \cdot 10^{-20} \text{ км}^{-3}$

Следовательно, среднее расстояние между астероидами в поясе равно

$$\ell = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 3.97 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

Последняя величина много больше расстояния между компонентами в двойной системе астероидов. Следовательно, гравитационное влияние соседних астероидов на данные пары пренебрежительно мало и им можно смело пренебречь.

Ответ: к задаче представлен выражениями (59), (66). ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Звезда Шольца»

Дано:

$$R_{ss} = 1.87 \text{ CB.Г.};$$

$$m = 18.3^m,$$

$$v_r = 83.1 \text{ km/c},$$

$$\pi'' = 0.166'',$$

$$\mu_{\alpha} = -0.0403'' / \text{год};$$

$$\mu_\delta = -0.1148'' / \text{год.}$$

Наўту:

$$r_{\min}, \pi^{(0)}, t_0, -?$$

$$v_{\tau}^{(0)}, v_r^{(0)} = ?$$

$$\Delta t, \Delta t_r, \Delta t_c = ?$$

Решение:

Рассмотрим рис. 11, соответствующий условию задачи. Пусть AB – это траектория движения звезды Шольца в окрестности Солнца. Точка C – точка максимального сближения звезды с Солнцем S . Очевидно, что полный вектор скорости звезды можно представить в виде суммы двух векторов: радиальной – $\vec{v}_r$ и тангенциальной – $\vec{v}_\tau$ составляющих, причем

$$\sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} = v \quad (72)$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_{\tau}^2}. \quad (73)$$

Определим v_τ , для этого учтем, что данная составляющая скорости отвечает за движение по окружности радиуса r . Следовательно,

$$v_\tau = \omega \cdot r, \quad (74)$$

где ω – угловая скорость перемещения звезды по небосводу. Ее можно преобразовать к виду: $[v_T] = \text{км/с}$; $[\omega] = \frac{1}{\text{с}}$; $[r] = \text{м}$. Тогда,

$$v_{\tau} = 10^{-3} \text{ (км/с)} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot r = \frac{\Delta\varphi''}{206265''} \cdot \frac{1}{T \cdot 3.156 \cdot 10^7 \text{ с/год}} \cdot x \cdot 3.086 \cdot 10^{13} \text{ км/пк},$$

$$v_\tau = 4.74 \cdot \frac{\mu''}{\pi''} \text{ (KM/C)}. \quad (75)$$

Здесь мы учли, что $[\Delta \varphi'']$:
угл. сек., $[T] = \text{год}$, $[x] = \text{пк}$.
 $\mu'' = \frac{\Delta \varphi''}{T}$ – собственное дви-
жение звезды, которое мож-
но представить, согласно тео-
реме Пифагора, как

$$\mu'' = \sqrt{\mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2} = 0.122''/\text{год}. \quad (76)$$

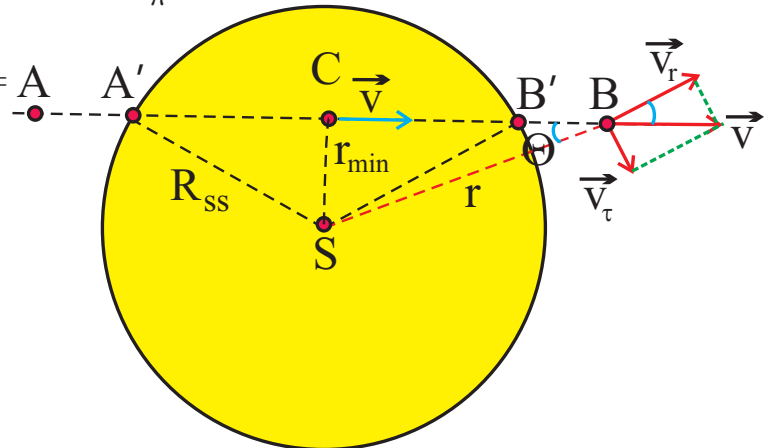


Рис. 11: к определению искомых величин задачи.

Следовательно, тангенциальная скорость равна $v_\tau = 3.47$ км/с. Согласно, (73) полная скорость звезды $v = 83.2$ км/с. В точке наибольшего сближения (точка С):

$$v_{\tau}^{(0)} = v = 83.2 \text{ KM/C}; \quad v_r^{(0)} = 0. \quad (77)$$

Из рисунка следует, что

$$\sin \Theta = \frac{r_{\min}}{r} = \frac{v_{\tau}}{v}, \Rightarrow$$

$$r_{\min} = r \left(\frac{v_\tau}{v} \right) = \frac{1}{\pi''} \left(\frac{v_\tau}{v} \right) = 0.251 \text{ пк} = 51820 \text{ а.е.}, \quad (78)$$

$$\pi^{(0)} = \frac{1}{r_{\min}} = 3.968''. \quad (79)$$

$$m^{(0)} = m - 5 \lg \left(\frac{r}{r_{\min}} \right) = m - 5 \lg \left(\frac{\pi^{(0)}}{\pi} \right) = 11.4^m. \quad (80)$$

Определим момент времени пребывания звезды в точке C :

$$t_0 = \frac{CB}{v} = \frac{r \cdot \cos \Theta}{v} = \frac{\sqrt{r^2 - r_{\min}^2}}{v} = 2.232 \cdot 10^{12} \text{ с} = 70740 \text{ лет}. \quad (81)$$

Время пребывания в Солнечной системе есть

$$\Delta t = \frac{A'B'}{v} = \frac{2\sqrt{R_{ss}^2 - r_{\min}^2}}{v} = 3.820 \cdot 10^{11} \text{ с} = 12120 \text{ лет}.$$

Следовательно, звезда Шольца покинула Солнечную систему

$$\Delta t_\ell = t_0 - \frac{\Delta t}{2} = 64680 \text{ лет}. \quad (82)$$

Если звезда вызвала возмущение в кометном облаке Оорта, то часть кометных ядер может быть отброшена в сторону Солнца. Поскольку, скорости ядер много меньше скорости звезды, то первыми прилетят кометы, отброшенные в сторону Солнца в точке C . При движении к Солнцу по сильно вытянутой эллиптической орбите большая полуось последней будет $a_c = r_{\min}/2$, тогда по третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{a_c}{a_\oplus} \right)^3 = \left(\frac{T_c}{T_\oplus} \right)^2, \Rightarrow T_c = T_\oplus \left(\frac{a_c}{a_\oplus} \right)^{3/2},$$

а время движения к Солнцу есть

$$t_f = \frac{T_c}{2} = \frac{1}{2} T_\oplus \left(\frac{r_{\min}}{2a_\oplus} \right)^{3/2} = 2.085 \cdot 10^6 \text{ лет}. \quad (83)$$

Тогда, оставшееся время до кометного ливня есть

$$\Delta t_c = t_f - t_0 = 2.015 \cdot 10^6 \text{ лет}. \quad (84)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (73)-(84). (\$_{\max} = 13\$ баллов).

Задача № 16. «Свойства Sa-галактики»

Решение. 1. Запишем второй закон Ньютона для звезды, движущейся в диске, по круговой орбите, вблизи поверхности ядра. Учтем, что согласно теореме Гаусса, вклад в силу притяжения дает лишь гравитационное поле ядра галактики, тогда

$$\frac{v_0^2}{\mathfrak{R}_N} = \frac{G \mathfrak{M}_N}{\mathfrak{R}_N^2}, \Rightarrow \mathfrak{M}_N = \frac{\mathfrak{R}_N v_0^2}{G} = 1.1 \cdot 10^{41} \text{ кг}. \quad (85)$$

2. Средняя плотность материи ядра галактики есть

$$\rho_N = \frac{\mathfrak{M}_N}{(4/3)\pi \mathfrak{R}_N^3} = \frac{3v_0^2}{4\pi G \mathfrak{R}_N^2} = 7.15 \cdot 10^{-21} \text{ кг/м}^3. \quad (86)$$

3. Вновь запишем второй закон Ньютона для звезды, движущейся в диске галактики на расстоянии r от ее центра

$$m \frac{v_0^2}{r} = \left(\frac{Gm}{r^2} \right) (\mathfrak{M}_N + \mathfrak{M}_{DM}(r)), \Rightarrow$$

здесь $\mathfrak{M}_{DM}(r)$ – масса темной материи, расположенной внутри сферического слоя с внутренним радиусом $\mathfrak{R}_N$ и внешним r (вкладом обычной материи в итоговое гравитационное поле можно пренебречь, в силу маломассивности диска из звезд).

$$v_0^2 r = G(\mathfrak{M}_N + \mathfrak{M}_{DM}(r)).$$

Продифференцируем последнее уравнение:

$$v_0^2 dr = G d\mathfrak{M}_{DM}(r) = G \rho_{DM}(r) 4\pi r^2 dr,$$

Из последнего уравнения найдем зависимость плотности «темной материи» $\rho_{DM}(r)$ от расстояния до центра галактики:

$$\rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2}. \quad (87)$$

4. Запишем второй закон Ньютона для звезды, движущейся на окраине диска по круговой орбите:

$$\frac{v_0^2}{(n\mathfrak{R}_N)} = \frac{G(\mathfrak{M}_N + \mathfrak{M}_{DM}(n\mathfrak{R}_N))}{(n\mathfrak{R}_N)^2}, \Rightarrow \mathfrak{M}_{DM} = \frac{n\mathfrak{R}_N v_0^2}{G} - \mathfrak{M}_N = (n-1)\mathfrak{M}_N,$$

$$\mathfrak{M}_{DM} = 1.21 \cdot 10^{42} \text{ кг}, \Rightarrow \frac{\mathfrak{M}_{DM}}{\mathfrak{M}_N} = (n-1) = 11. \quad (88)$$

Этот же результат можно получить иначе:

$$\mathfrak{M}_{DM} = \int_{\mathfrak{R}_N}^{n\mathfrak{R}_N} 4\pi \rho(r) r^2 dr = (n-1)\mathfrak{M}_N.$$

Таким образом, искомое отношение равно 11.

5. Определим долю, которую составляет масса темной материи ядра от полной массы галактики. Согласно условию задачи:

$$\frac{\mathfrak{M}_{DM}^{(N)}}{\mathfrak{M}_N} = \frac{\mathfrak{M}_{DM}}{\mathfrak{M}_N + \mathfrak{M}_{DM}}, \Rightarrow \mathfrak{M}_{DM}^{(N)} = \mathfrak{M}_N \frac{(n-1)\mathfrak{M}_N}{n\mathfrak{M}_N}, \Rightarrow$$

$$\frac{\mathfrak{M}_{DM}^{(N)}}{\mathfrak{M}_N + \mathfrak{M}_{DM}} = \frac{(n-1)}{n^2} = \frac{11}{144}. \quad (89)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (85)-(89). (\$_{\max} = 13\$ баллов).

Задача № 17. «Магнитные свойства нейтронной звезды»

Дано:

$$\rho_N = 10^{17} \text{ кг/м}^3,$$

$$\mathfrak{R}_* = 1.5 \mathfrak{R}_{\odot},$$

$$\mathfrak{M}_* = 2.5 \mathfrak{M}_{\odot},$$

$$H_0 = 10^4 \text{ А/м.}$$

Решение:

Определим радиус нейтронной звезды с учетом факта сохранения массы в процессе эволюции:

$$\mathfrak{M}_* = \rho_N \cdot \frac{4}{3} \pi \mathfrak{R}_N^3, \Rightarrow$$

$$\mathfrak{R}_N = \sqrt[3]{\frac{3\mathfrak{M}_*}{4\pi\rho_N}} = \sqrt[3]{\frac{7.5\mathfrak{M}_{\odot}}{4\pi\rho_N}} = 22.8 \text{ км.} \quad (90)$$

Найти:

$$H_N - ?, T, a_{\max} - ?$$

Поток магнитного поля – это скалярная физическая величина, равная

$$\Phi_H = \oint_{S_*} (\vec{H} \cdot \vec{n}) dS, \quad (91)$$

здесь $\vec{n}$ – единичная нормаль к площадке dS замкнутой поверхности, по которой ведется интегрирование. Здесь интеграл вычисляется от скалярного произведения напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и вектора $\vec{n}$. Можно строго показать, что данный интеграл можно представить в виде:

$$\Phi_H = k \cdot H \cdot R_*^2, \quad (92)$$

здесь k – размерный коэффициент пропорциональности. Поскольку магнитный поток звезды сохраняется, то

$$k H_0 R_*^2 = k H_N R_N^2, \Rightarrow H_N = H_0 \left(\frac{R_*}{R_N} \right)^2 = 2.09 \cdot 10^{13} \left(\frac{\text{А}}{\text{м}} \right). \quad (93)$$

Угловую скорость вращения нейтронной звезды можно определить из закона сохранения ее момента импульса

$$L_0 = L_N, \Rightarrow \frac{2}{5} \mathfrak{M}_* R_*^2 \cdot \omega_0 = \frac{2}{5} \mathfrak{M}_* R_N^2 \cdot \omega_N, \Rightarrow \omega_N = \omega_0 \left(\frac{R_*}{R_N} \right)^2, \Rightarrow$$

$$T_N = T_* \left(\frac{R_N}{R_*} \right)^2 = 10^{-3} \text{ с.} \quad (94)$$

Протон в магнитном поле может ускориться под действием силы Лоренца. Предположим, что начальная скорость протона равна v_0 , тогда второй закон Ньютона для протона запишется в виде:

$$m a = q v_0 B \cdot \sin \alpha, \quad a = \frac{q v_0 B \cdot \sin \alpha}{m} \quad (95)$$

Очевидно, что ускорение максимально, если $\sin \alpha = 1$, т.е. $v_0 \perp B$ и протон будет двигаться по окружности. Кроме того, $v_0 = 0.1 \cdot c$.

$$a_{\max} = \frac{1}{10} \frac{q c B}{m} = \frac{1}{10} \cdot \frac{q c \mu_0 H_N}{m} = 7.54 \cdot 10^{22} \text{ м/с}^2. \quad (96)$$

Ответ: к задаче представлен выражениями (93), (94), (96). ($S_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Юпитер над горизонтом»

Решение. 1. Рассмотрим сферический треугольник, у которого вершинами являются: зенит места наблюдения, полюс мира и светило (см. рис. 12). Такой треугольник называется **параллактическим треугольником**.

В параллактическом треугольнике одна сторона – дуга небесного меридиана между полюсом P_n и зенитом Z – равна $90^\circ - \varphi$, где φ – широта места наблюдения. Другая сторона – полярное расстояние светила C равна $90^\circ - \delta$, и третья равна зенитному расстоянию светила z . Если светило находится к западу от небесного меридиана, то угол при полюсе есть часовой угол светила t , угол при зените – $180^\circ - A$.

Если светило находится к востоку от небесного меридиана, то угол при полюсе будет $360^\circ - t$, а угол при зените – $A - 180^\circ$. Угол q при светиле называется **параллактическим углом**. Воспользуемся формулами синусов, косинусов и формулой пяти элементов для данного треугольника. Запишем их для экваториальных и горизонтальных координат светила:

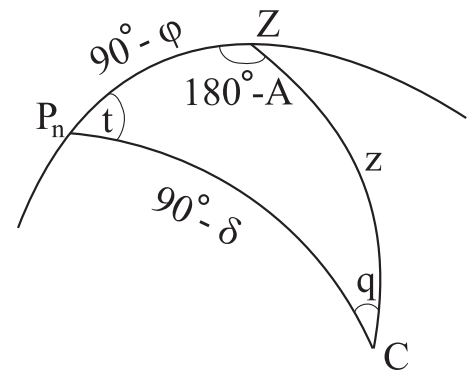


Рис. 12: к определению основных формул сферической тригонометрии для параллактического треугольника.

$$\left. \begin{aligned} a) \sin z \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ b) \cos z &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ c) \sin z \cos A &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Эти формулы связывают горизонтальную систему координат с первой экваториальной. Т.о, при известной широте места наблюдения, зная часовой угол и склонение светила, можно вычислить его зенитное расстояние и азимут. Точно так же, по известному зенитному расстоянию и азимуту светила, можно вычислить его часовой угол и склонение:

$$\left. \begin{aligned} a) \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ b) \cos \delta \cos t &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A, \\ c) \sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Для определения значения t воспользуемся формулой (97.b):

$$\cos t = \frac{(\sin h - \sin \delta \sin \varphi)}{\cos \delta \cos \varphi}, \quad t = \arccos \left[\frac{(\sin h - \sin \delta \sin \varphi)}{\cos \delta \cos \varphi} \right]. \quad (99)$$

Очевидно, уравнению (99) будут отвечать два корня t_1, t_2 , удовлетворяющие условиям:

$$0 \leq t_1 < \pi, \quad \pi \leq t_2 < 2\pi.$$

Действительно, любой точке небесной параллели данного тела соответствует зеркально симметричная точка, относительно небесного меридиана, в которой высота светила будет такой же, что и в исходной точке. Для определения истинного значения t , для данной точки наблюдения, необходимо пронаблюдать данный объект, как минимум, еще в одной близкой точке, в последующий момент времени. Предположим, что в момент времени T_0 выполнено измерение высоты h_0 светила, в последующий близкий момент времени $T > T_0$ ($T - T_0 \ll T_{\oplus}$) выполнено измерение высоты и получено значение h . Если $h_0 < h$, то очевидно что светило является восходящим, располагается слева от небесного меридиана (если смотреть на точку юга) и $t = t_2$. В противном случае, светило – заходящее, находится справа от небесного меридиана и $t = t_1$.

Отметим, что формула (99) имеет свои границы применимости. Данная формула не применима для определения часового угла небесного тела, находящегося в одном из полюсов мира P_n или P_s ($\delta = \pm 90^\circ$). Действительно, если небесное тело в одной из этих точек небесной сферы, то оно остается неподвижным при суточном вращении небесной сферы и ему можно приписать любое значение t . Формула (99) также неприменима в случае, когда наблюдатель находится на одном из географических полюсов ($\varphi = \pm 90^\circ$). В данной ситуации любая точка математического горизонта является точкой юга, если наблюдатель находится на северном (южном) полюсе мира. Тогда часовой угол вновь может быть любым.

Зная высоту светила и его склонение, можно однозначно определить азимут светила с использованием выражения (98.c):

$$\cos A = \frac{\sin \varphi \sin h - \sin \delta}{\cos \varphi \cos h}. \quad (100)$$

2. Исправим результаты (99), (100) за рефракцию света, посредством переопределения высот небесного тела:

$$h_i \rightarrow h_i - \delta h_i, \quad (101)$$

в указанных формулах, с использованием формулы Лапласа (1), в результате

получим

$$\cos t = \frac{(\sin(h - \delta h) - \sin \delta \sin \varphi)}{\cos \delta \cos \varphi}, \quad (102)$$

$$\cos A = \frac{\sin \varphi \sin(h - \delta h) - \sin \delta}{\cos \varphi \cos(h - \delta h)}. \quad (103)$$

3. Определим склонение светила. Пусть небесное тело в момент времени t_1 находится в точке C_1 , с известными горизонтальными координатами (h_1, A_1) , а в момент времени t_2 (причем $t_2 - t_1 \ll T_{\oplus}$) объект окажется в точке C_2 , с координатами (h_2, A_2) . Воспользуемся выражением (98.с), для каждой пары горизонтальных координат можем записать

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \sin h_1 \sin \varphi - \cos h_1 \cos A_1 \cos \varphi, \\ \sin \delta &= \sin h_2 \sin \varphi - \cos h_2 \cos A_2 \cos \varphi, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\cos A_1 = \frac{\sin h_1 \sin \varphi - \sin \delta}{\cos h_1 \cos \varphi}, \quad \cos A_2 = \frac{\sin h_2 \sin \varphi - \sin \delta}{\cos h_2 \cos \varphi}. \quad (104)$$

На эксперименте проводится измерение горизонтальных координат с помощью угломерных приборов, например, теодолита. С помощью таких инструментов достаточно легко добиться корректного измерения высоты светила (необходимо лишь отъюстировать вертикальную ось симметрии прибора с помощью уровней, вдоль отвесной линии). Гораздо более трудной задачей является точное определение положения точки юга, от которой ведется отсчет азимута светила. Однако, эту трудность можно избежать, если проводить измерения горизонтальных координат светила через малые промежутки времени (3-5 мин), когда светило, очевидно, находится в одной из четвертей возможных значений A . В этом случае можно ограничиться определением изменения азимута $\Delta A = A_2 - A_1 > 0$. Тогда,

$$\cos(\Delta A) = \cos(A_2 - A_1) = \cos A_1 \cos A_2 + \sin A_1 \sin A_2, \Rightarrow \quad (105)$$

$$\cos^2(\Delta A) + \cos^2 A_1 \cos^2 A_2 - 2 \cos(\Delta A) \cos A_1 \cos A_2 = \sin^2 A_1 \sin^2 A_2,$$

$$\cos^2(\Delta A) - 2 \cos(\Delta A) \cos A_1 \cos A_2 = 1 - \cos^2 A_1 - \cos^2 A_2,$$

$$\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 - 2 \cos(\Delta A) \cos A_1 \cos A_2 = \sin^2(\Delta A), \quad (106)$$

из (106) с учетом (104) следует, что

$$\begin{aligned} &(\sin h_1 \sin \varphi - \sin \delta)^2 \cos^2 h_2 + (\sin h_2 \sin \varphi - \sin \delta)^2 \cos^2 h_1 - 2 \cos \Delta A \cos h_1 \times \\ &\times \cos h_2 (\sin h_1 \sin \varphi - \sin \delta) (\sin h_2 \sin \varphi - \sin \delta) = \sin^2(\Delta A) \cos^2 h_1 \cos^2 h_2 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Последнее уравнение можно представить в виде

$$a \sin^2 \delta - b \sin \delta + c = 0, \quad (107)$$

$$a = \cos^2 h_1 + \cos^2 h_2 - 2 \cos \Delta A \cos h_1 \cos h_2, \quad (108)$$

$$b = 2 \sin \varphi [(\sin h_1 \cos^2 h_2 + \sin h_2 \cos^2 h_1) - \cos \Delta A \cos h_1 \cos h_2 \times \\ \times (\sin h_1 + \sin h_2)], \quad (109)$$

$$c = \sin^2 \varphi (\sin^2 h_1 \cos^2 h_2 + \sin^2 h_2 \cos^2 h_1 - \frac{1}{2} \cos \Delta A \sin 2h_1 \sin 2h_2) - \\ - \cos^2 \varphi \sin^2(\Delta A) \cos^2 h_1 \cos^2 h_2. \quad (110)$$

Решение этого уравнения представляется в виде:

$$\delta_{\mp} = \arcsin \left[\frac{b}{2a} \mp \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \right] = \arcsin \left[\left[\sin \varphi [(\sin h_1 \cos^2 h_2 + \sin h_2 \times \right. \right. \\ \times \cos^2 h_1) - \cos \Delta A \cos h_1 \cos h_2 (\sin h_1 + \sin h_2)] \mp |\sin \Delta A \cos h_1 \cos h_2| \times \\ \times [(\cos^2 h_1 + \cos^2 h_2 - 2 \cos h_1 \cos h_2 \cos \Delta A) \cos^2 \varphi - (\sin h_1 - \sin h_2)^2 \times \\ \times \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \left. \right] / (\cos^2 h_1 + \cos^2 h_2 - 2 \cos \Delta A \cos h_1 \cos h_2) \right]. \quad (111)$$

Оба корня уравнения могут быть физическими. Однако, первый корень отвечает положению тела с $\delta < \varphi$, т.е. такой объект должен кульминировать к югу от зенита, а второй корень – положению тела с $\delta > \varphi$, т.е. данный объект должен кульминировать к северу от зенита. Для однозначного определения истинного значения склонения небесного тела достаточно лишь один раз пронаблюдать его движение в окрестности меридиана и оценить положение его точки кульминации по отношению к точке зенита. Согласно оценке выбрать соответствующий корень системы решений (111).

В таблице 2 представлены значения искоемых параметров для Юпитера на 22 августа 2000 г. Итоговые результаты исправлены за рефракцию света. Истинному значению склонения Юпитера отвечает решение δ_- . В 5-ой и 7-ой колонках таблицы представлены ошибки определения склонения δ планеты, вычисленные согласно формуле схемы обработки косвенных измерений:

$$\Delta \delta = t_n \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\bar{\delta} - \delta_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (112)$$

где δ_i – i -ое значение склонения планеты, n – количество полученных значений искомой величины (в данном случае $n = 17$), $t_n = 2.120$ – коэффициент Стьюдента для $n = 17$.

№ п/п	h_1 , град	h_2 , град	ΔA , град	δ_- , град	$\Delta\delta_-$, град	δ_+ , град	$\Delta\delta_+$, град
1	12.175	13.367	0.875	21.228		21.228	
2	14.408	15.225	1.038	18.788		18.788	
3	16.446	17.333	1.142	21.324		21.324	
4	18.933	19.592	0.842	23.294		25.455	
5	21.150	21.883	0.946	20.555		33.717	
6	23.417	24.242	1.083	19.597		40.116	
7	27.733	28.592	1.129	22.561		47.903	
8	29.925	30.500	0.825	18.502		55.055	
9	34.183	35.000	1.183	21.986		61.945	
10	35.800	36.392	0.913	20.649		65.456	
11	37.508	38.350	1.317	21.838		68.302	
12	39.150	39.875	1.200	21.365		71.257	
13	40.846	41.692	1.617	18.919		74.873	
14	42.967	43.525	1.054	21.250		77.332	
15	44.675	45.308	1.283	21.330		79.909	
16	46.592	47.183	1.229	22.725		82.376	
17	48.167	48.767	1.604	19.849		84.798	
среднее				20.927	0.708	54.696	0.599

Таблица 2: Значения данных наблюдений Юпитера от 22.08.2000 г. и значения $\delta_{\mp}$ и $\Delta\delta_{\mp}$, вычисленные согласно (111) и (112).

Важно отметить, что нефизическое решение δ_+ обладает значительной "нестабильностью" и наблюдается устойчивая тенденция роста значения корня с увеличением высоты Юпитера над горизонтом.

4.-7. В точках восхода и захода видимая высота светила $h = 0^\circ$. Следовательно, с использованием формулы (102) часовые углы восхода (t_{ris}) и захода (t_{dec}) представляются в виде:

$$t_{\text{ris}} = 2\pi - t, \quad t_{\text{dec}} = t, \quad \text{где } t = \arccos \left[-\frac{(\sin 35' + \sin \delta \sin \varphi)}{\cos \delta \cos \varphi} \right]. \quad (113)$$

Здесь и далее учтено, что поправка за рефракцию для $h = 0^\circ$ составляет $\delta h = 35'$. Аналогично можно определить азимуты точек восхода и захода светила:

$$A_{\text{ris}} = 2\pi - A, \quad A_{\text{dec}} = A, \quad \text{где } A = \arccos \left[-\frac{(\sin \delta + \sin 35' \sin \varphi)}{\cos 35' \cos \varphi} \right]. \quad (114)$$

Для определения моментов времени восхода и захода небесного объекта воспользуемся тем фактом, что его часовой угол равномерно изменяется со временем. Предположим, что в момент времени T_0 выполнено измерение высоты h_0 светила и определен его часовой угол (t_0), тогда моменты времени

Дата	$t_{\text{ris}}, ^\circ$	$t_{\text{dec}}, ^\circ$	$\Delta t_{\text{ris,dec}}, ^\circ$	$A_{\text{ris}}, ^\circ \dagger$	$A_{\text{dec}}, ^\circ \dagger$	$\Delta A_{\text{ris,dec}}, ^\circ$
22.08.2000	238.44	121.56	1.29	232.74	127.26	1.41

Таблица 3: Часовые углы и азимуты точек восхода и захода Юпитера на 22.08.2018.

№	$T_{\text{ris}}, \text{ч}$	$T_{\text{dec}}^\dagger, \text{ч}$	$\Delta T_{\text{ris,dec}}, \text{ч}$	$T_{\text{cul}}^\dagger, \text{ч}$	$\Delta T_{\text{cul}}, \text{ч}$	$\Delta T_{\text{vis}}, \text{ч}$	$\Delta(\Delta T_{\text{vis}}), \text{ч}$
Среднее	18.933	11.096	0.016	3.015	0.016	16.164	0.016

Примечания: † – данные времена относятся к 23.08.2000 г. по всемирному времени (UT).

Таблица 4: Значения моментов времени восхода, захода, кульминации и периода видимости Юпитера на 22.08.2000 г. по всемирному времени (UT), а также их ошибки определения.

восхода (T_{ris}) и захода (T_{dec}) светила есть

$$T_{\text{ris}} = T_0 - \frac{T_{\oplus}}{2\pi} \times \begin{cases} (2\pi + t_0 - t_{\text{ris}}), & \text{при } 0 \leq t_0 < \pi, \\ (t_0 - t_{\text{ris}}), & \text{при } \pi \leq t_0 < 2\pi, \end{cases} \quad (115)$$

$$T_{\text{dec}} = T_0 + \frac{T_{\oplus}}{2\pi} \times \begin{cases} (t_{\text{dec}} - t_0), & \text{при } 0 \leq t_0 < \pi, \\ (2\pi + t_{\text{dec}} - t_0), & \text{при } \pi \leq t_0 < 2\pi, \end{cases} \quad (116)$$

Следовательно, период видимости объекта над горизонтом можно определить как

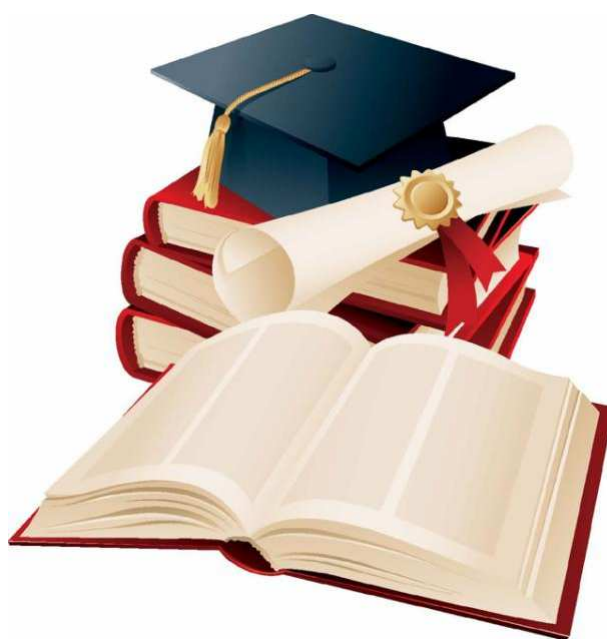
$$\Delta T_{\text{vis}} = T_{\text{dec}} - T_{\text{ris}} = \frac{T_{\oplus}}{\pi} \arccos \left[-\frac{(\sin 35' + \sin \delta \sin \varphi)}{\cos \delta \cos \varphi} \right], \quad (117)$$

а момент верхней кульминации можно представить в виде:

$$T_{\text{cul}} = \frac{1}{2} (T_{\text{dec}} + T_{\text{ris}}). \quad (118)$$

В таблице 3 приведены итоговые результаты для часовых углов и азимутов точек восхода и захода Юпитера на указанную дату наблюдений. В таблице 4 представлены результаты вычислений моментов восхода, захода, верхней кульминации и периода видимости Юпитера над горизонтом, на ту же дату. Здесь же представлены статистические ошибки определения данных величин (получены по схеме обработки косвенных измерений). ($\$_{\text{max}} = 15$ баллов).

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ



А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная – $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме – $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная – $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана – $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро – $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица – $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек – $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла – $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

А.2. Данные о Солнце

- Радиус – $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса – $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость – $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина – -26.74^m
- Абсолютная болометрическая звездная величина – $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) – $+0.67^m$
- Эффективная температура – 5778 К
- Средний горизонтальный параллакс – $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре)
на расстоянии Земли – 1361 Вт/м^2
- Солнечная постоянная (в видимом свете)
на расстоянии Земли – 600 Вт/м^2

А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты – 0.017
- Тропический год – 365.24219 сут
- Средняя орбитальная скорость – 29.8 км/с
- Период вращения – $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 – $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса – $5.974 \cdot 10^{24}$ кг
- Средняя плотность – $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы – N_2 (78%), O_2 (21%), Ar ($\sim 1\%$)

А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике – $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса – $7.348 \cdot 10^{22}$ кг или $1/81.3$ массы Земли
- Средняя плотность – $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние – -12.7^m

А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(x \pm \alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь $x \ll 1$, все углы выражаются в радианах.

А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	-26.8^m
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	-0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут [†]	177.36	0.65	-4.4^m
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	-2.0^m
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	-2.7^m
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4^m
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час [†]	97.86	0.51	5.7^m
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8^m

* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см ⁻³	км	сут		
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 [†]	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике и график для уравнения времени

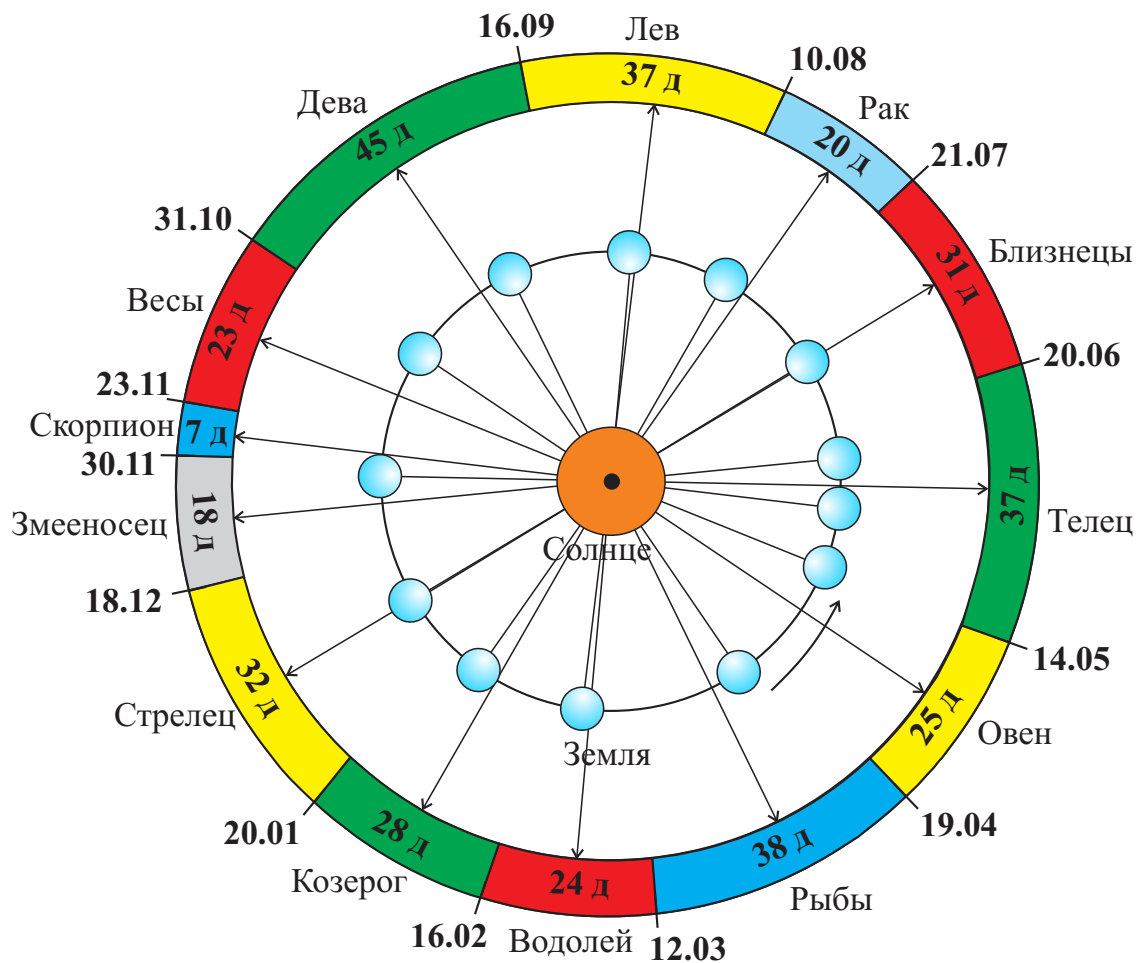


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

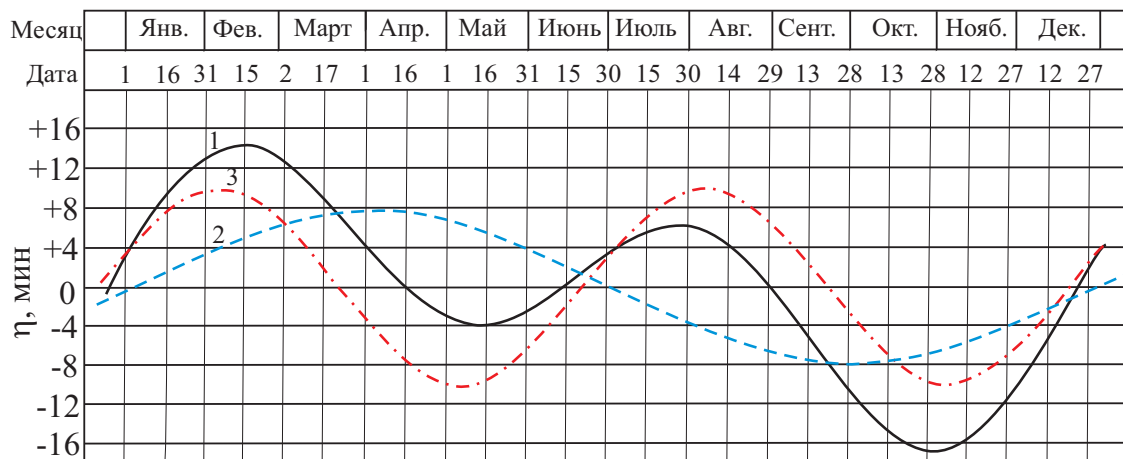


Рис. А.2. График уравнения времени: 1 – уравнение времени, 2 – уравнение центра, 3 – уравнение от наклона эклиптики.

А.10. Некоторые характеристики звезд

Болометрические поправки ΔM_b

Спектр	ΔM_b	Спектр	ΔM_b		
			Гл. последо- вательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	– 2.70	F5	– 0.04	– 0.08	– 0.12
B5	– 1.58	F8	– 0.05	– 0.17	– 0.28
A0	– 0.72	G0	– 0.06	– 0.25	– 0.42
A5	– 0.31	G2	– 0.07	– 0.31	– 0.52
F0	– 0.09	G5	– 0.10	– 0.39	– 0.65
F2	– 0.04	G8	– 0.10	– 0.47	– 0.80
		K0	– 0.11	– 0.54	– 0.93
		K2	– 0.15	– 0.72	– 1.20
		K3	– 0.31	– 0.89	– 1.35
		K4	– 0.55	– 1.11	– 1.56
		K5	– 0.85	– 1.35	– 1.86
		M0	– 1.43	– 1.55	– 2.2
		M1	– 1.70	– 1.72	– 2.6
		M2	– 2.03	– 1.95	– 3.0
		M3	– 2.35	– 2.26	– 3.6
		M4	– 2.7	– 2.72	– 3.8
		M5	– 3.1	– 3.4	– 4.0

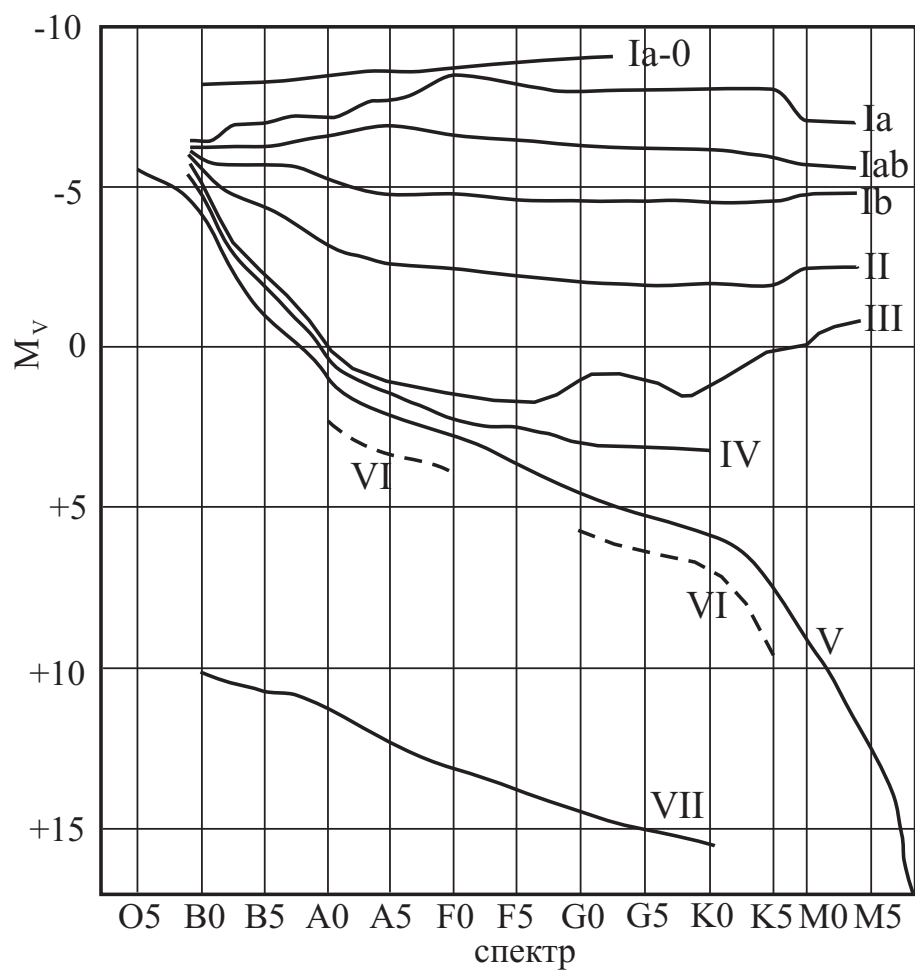


Рис. А.3. Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.