

1. Далеко до той планеты?[†]

1.1. 20 марта некоторого года в некотором месте на поверхности Земли *внешняя планета* взошла в t_1 по местному времени. Её заход произошёл в t_2 по местному времени. Известно, что в эти сутки *планета* кульминировала на высоте h . Найдите экваториальные координаты *планеты* в предположении, что планеты Солнечной системы имеют круговые орбиты, лежащие в плоскости эклиптики.

▷ Пренебрежём видимым смещением планеты за половину суток. Верхняя кульминация планеты наблюдалась около 18 часов по местному времени, с хорошей точностью через 6 часов после полудня. Следовательно, планета находится [практически] в точке летнего солнцестояния:

$$\alpha = \boxed{6^{\text{h}}}; \quad \delta = +\varepsilon \approx \boxed{+23.5^\circ}. \quad 1.5 + 1.5 = 3 \text{ балла}$$

1.2. Укажите возможную широту места наблюдения.

▷ По известным высоте верхней кульминации и склонению рассчитываем широту φ :

$$h = 90^\circ - |\varphi - \delta| \implies \varphi = \boxed{\delta \pm (90^\circ - h)}.$$

В ответе необходимо указать физически осмысленный результат с учётом нахождения планеты над горизонтом в течение более половины суток. 2 балла

1.3. Вычислите геоцентрическое расстояние r *планеты* и выразите его в астрономических единицах, километрах и световых минутах.

▷ Угол Солнце – Земля – планета прямой: $r = \boxed{\sqrt{a_{\text{пл}}^2 - a_{\oplus}^2}}.$ 0.5 × 3 = 1.5 балла

1.4. Найдите элонгацию Земли при наблюдении с *планеты*.

▷ Угол Солнце – Земля – планета прямой: $\gamma = \boxed{\arcsin \frac{a_{\oplus}}{a_{\text{пл}}}}.$ 1 балл

1.5. Как скоро (с даты описываемых событий) Земля и *планета* сблизятся на наименьшее расстояние?

▷ При наблюдении с Солнца угол между Землёй и планетой составляет $90^\circ - \gamma$, поэтому Земля обгоняет планету на $360^\circ - (90^\circ - \gamma) = 270^\circ + \gamma$. Искомый промежуток времени

$$\tau = \frac{270^\circ + \gamma}{\omega_{\oplus} - \omega_{\text{пл}}} = \frac{270^\circ + \gamma}{360^\circ} \left(\frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\text{пл}}} \right)^{-1} = \boxed{\frac{270^\circ + \arcsin \frac{a_{\oplus}}{a_{\text{пл}}}}{360^\circ} \cdot \frac{T_{\text{пл}} T_{\oplus}}{T_{\text{пл}} - T_{\oplus}}}. \quad 2.5 \text{ балла}$$

[†] Адрес для вопросов и замечаний: o3a2@astroedu.ru.

2. Оптическая кулинария

2.1. Определим зону жизни как область вокруг звезды, для которой установившаяся средняя температура планеты находится в пределах от 0°C до 100°C . Пусть вокруг звезды главной последовательности радиусом R с температурой поверхности T на внутренней границе зоны жизни обращается небольшая абсолютно чёрная планета. Определите радиус r её орбиты.

▷ Запишем уравнение теплового баланса для планеты: $\frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi r^2} \cdot \pi R_{\text{пл}}^2 = 4\pi R_{\text{пл}}^2 \sigma T_{\text{пл}}^4$.

С подстановкой $T_{\text{пл}} = T_{\text{max}} = 373 \text{ K}$ радиус орбиты планеты

$$r = \boxed{\frac{1}{2} R \left(\frac{T}{T_{\text{max}}} \right)^2}. \quad 2.5 \text{ балла}$$

2.2. Найдите видимую болометрическую звёздную величину m звезды при наблюдении с планеты.

▷ Отношение освещённостей, создаваемых звездой на планете и Солнцем на Земле, есть

$$k = \frac{R^2}{R_\odot^2} \frac{T^4}{T_\odot^4} \frac{r_\oplus^2}{r^2}.$$

Используем формулу Погсона ($m_\odot$ — видимая болометрическая звёздная величина Солнца):

$$m = m_\odot - 2.5 \lg k = \boxed{m_\odot - 2.5 \lg \frac{R^2}{R_\odot^2} \frac{T^4}{T_\odot^4} \frac{r_\oplus^2}{r^2}}. \quad 2.5 \text{ балла}$$

2.3. Используя соотношение масса – светимость $L \propto M^4$ для звёзд главной последовательности, вычислите период обращения планеты вокруг звезды.

▷ Масса звезды $M = M_\odot \sqrt[4]{\frac{L}{L_\odot}} = M_\odot \sqrt[4]{\frac{R^2}{R_\odot^2} \frac{T^4}{T_\odot^4}} = M_\odot \sqrt{\frac{R}{R_\odot} \frac{T}{T_\odot}}$.

По известным массе звезды и радиусу орбиты вычислим период (3-й закон Кеплера):

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_\odot}} \sqrt{\frac{R_\odot}{R} \frac{T_\odot}{T}}}. \quad 2.5 \text{ балла}$$

2.4. На поверхности планеты установлен телескоп с эффективным диаметром объектива D и фокусным расстоянием F . Если навести этот телескоп на звезду, какова будет освещённость E её изображения в фокальной плоскости телескопа?

▷ Угловой радиус звезды при наблюдении с планеты $\rho \simeq R/r$, поэтому диаметр изображения звезды в фокальной плоскости $d = 2\rho F = 2FR/r$. На изображение приходится весь световой поток, собранный входной апертурой:

$$E = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\pi D^2}{4} \bigg/ \frac{\pi d^2}{4} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi r^2} \left(\frac{Dr}{2FR} \right)^2 = \boxed{\frac{1}{4} \frac{D^2}{F^2} \sigma T^4}. \quad 2.5 \text{ балла}$$

3. Тёмная ночь...

3.1. Рассмотрите область на поверхности Земли, при наблюдении с которой диск Солнца сейчас пересекает горизонт. Найдите долю, которую площадь этой области составляет от площади всей земной поверхности. При выполнении этого задания Землю считайте идеальным шаром, наличием у неё атмосферы пренебрегите.

▷ Данная область полосой окружает терминатор как большой круг, содержащий точки, для которых диск Солнца лежит точно на горизонте. Для наблюдателя в центре Земли эта полоса имеет угловую полуширину $\rho_{\odot}$ — видимый угловой радиус Солнца; её пространственная ширина $l = 2\pi R_{\oplus} \cdot 2\rho_{\odot}/360^{\circ}$. Оценим площадь полосы как площадь боковой поверхности цилиндра. Искомая доля есть

$$\frac{2\pi R_{\oplus} l}{4\pi R_{\oplus}^2} = \frac{l}{2R} = \boxed{\pi \frac{\rho_{\odot}}{180^{\circ}}}. \quad 3 \text{ балла}$$

3.2. Определите широту φ_m самой северной точки указанной области в текущий момент времени (27 марта 2020 года). Весеннее равноденствие в 2020 году наступило 20 марта в 03:49 UT.

▷ С момента весеннего равноденствия (утро 20 марта UT) прошло 7–8 суток. Вблизи равноденствий склонение Солнца за сутки изменяется на $1^{\circ} \cdot \sin \epsilon \approx 0.4^{\circ}$, поэтому можно ожидать сегодня $\delta_{\odot} \approx 0.4^{\circ} \times (7 \div 8) = 2.8^{\circ} \div 3.2^{\circ} \approx 3^{\circ}$. На такое угловое расстояние от Северного полюса Земли удалена самая северная точка терминатора. Искомая широта выше на полуширину полосы:

$$\varphi_m = 90^{\circ} - \delta_{\odot} + \rho_{\odot} = 90^{\circ} - (2.8^{\circ} \div 3.2^{\circ}) + 0.25^{\circ} \approx \boxed{87.0^{\circ} \div 87.5^{\circ}}. \quad 2 \text{ балла}$$

3.3. Через какой минимальный промежуток времени с момента весеннего равноденствия 2020 года точка из предыдущего вопроса окажется на южной границе указанной области? Орбиту Земли считайте круговой.

▷ Это произойдёт, когда широта самой северной точки терминатора окажется равной $\varphi_m + \rho_{\odot} = 90^{\circ} - \delta_{\odot} + 2\rho_{\odot} = 87.2^{\circ} \div 87.8^{\circ}$, что случится незадолго до момента осеннего равноденствия. В условиях круговой орбиты между последовательными «разноимёнными» равноденствиями проходит полгода. Вычислим искомый промежуток времени:

$$\frac{365.24 \text{ сут.}}{2} - \frac{90^{\circ} - (87.2^{\circ} \div 87.8^{\circ})}{0.4^{\circ}/\text{сут.}} \approx \boxed{(175.6 \div 177.1) \text{ сут.}} \quad 3 \text{ балла}$$

3.4. Продолжительность дня (как части суток, в течение которой какая-либо часть Солнца находится над горизонтом) сегодня в некоторой точке Земли составила τ . Оцените астрономический азимут A точки, в которой верхний край диска Солнца на восходе коснулся горизонта.

▷ День короткий — речь о высоких широтах Южного полушария. Суточная параллель Солнца недалеко отстоит от экватора и почти параллельна плоскости горизонта. Верхняя кульминация происходит на севере, а восход — на северо-востоке, поэтому $A - 180^{\circ} \approx \tau/2$;

$$A \approx \boxed{180^{\circ} + \tau \times 7.5^{\circ}/h.} \quad 2 \text{ балла}$$

4. Затмения в системе Юпитера

4.1. Рассмотрите систему Юпитер – некий спутник радиусом $R_{\text{сп}}$. Найдите максимально возможный радиус r орбиты спутника, при котором на Юпитере могут наблюдаться полные затмения Солнца этим спутником. Орбита спутника лежит в плоскости экватора Юпитера, направление движения спутника совпадает с направлением вращения Юпитера.

▷ В предельном случае угловые размеры спутника и Солнца при наблюдении с «поверхности» Юпитера должны совпасть:

$$\frac{R_{\text{сп}}}{r - R_{\text{ж}}} = \frac{R_{\odot}}{a_{\text{ж}}} \implies r = \frac{R_{\text{сп}} a_{\text{ж}}}{R_{\odot}} + R_{\text{ж}}. \quad 3 \text{ балла}$$

4.2. Вычислите скорость движения спутника по такой орбите.

▷ Круговая скорость: $v = \sqrt{\frac{GM_{\text{ж}}}{r}}. \quad 1 \text{ балл}$

4.3. Оцените продолжительность такого затмения (от начала до окончания частной фазы) для экваториального наблюдателя в день весеннего равноденствия при условии, что максимум затмения пришёлся на местный полдень.

▷ На расстоянии, равном длине конуса тени, размер полутени равен удвоенному размеру спутника. Линейная скорость точек экватора Юпитера $v_{\text{экв}} = 2\pi R_{\text{ж}}/T_{\text{ж}}$, $T_{\text{ж}}$ — период вращения Юпитера вокруг своей оси. Тогда искомая продолжительность

$$\tau \approx \frac{4R_{\text{сп}}}{|v - v_{\text{экв}}|}. \quad 4 \text{ балла}$$

4.4. На каком угловом расстоянии β от Юпитера спутник наблюдается с Сатурна, если Юпитер при наблюдении с Сатурна находится в максимальной восточной элонгации?

▷ Угол Солнце – Юпитер – Сатурн прямой. $\beta = \frac{r}{\sqrt{r_{\text{ж}}^2 - r_{\text{ж}}^2}}. \quad 2 \text{ балла}$

5. Дистанционное просвещение⁽⁸⁻⁹⁾

5.1. Рассмотрите двойную звёздную систему, годичный параллакс компонентов которой составляет p . Суммарная видимая звёздная величина компонентов системы m , при этом одна из звёзд ярче другой в k раз. Определите видимые звёздные величины компонентов системы.

▷ Суммарная освещённость больше освещённости от более тусклой звезды в $(k + 1)$ раз. По формуле Погсона

$$\begin{aligned} m_{\text{тускл}} &= m + 2.5 \lg(k + 1); \\ m_{\text{ярк}} &= m_{\text{тускл}} - 2.5 \lg k = m + 2.5 \lg \frac{k + 1}{k}. \end{aligned} \quad 1.5 \times 2 = 3 \text{ балла}$$

5.2. Вычислите абсолютные звёздные величины компонентов системы.

▷ По определению:

$$\begin{aligned} M_{\text{тускл}} &= m_{\text{тускл}} + 5 - 5 \lg d \text{ (пк)} = m_{\text{тускл}} + 5 + 5 \lg p \text{ (")}; \\ M_{\text{ярк}} &= m_{\text{ярк}} + 5 + 5 \lg p \text{ (")}. \end{aligned} \quad 1 \times 2 = 2 \text{ балла}$$

5.3. Наблюдатель находится между компонентами системы на соединяющей их прямой и утверждает, что эти светила имеют равную видимую звёздную величину. Найдите эту звёздную величину. Расстояние между звёздами составляет a ПК.

▷ Из закона обратных квадратов следует, что точка расположения наблюдателя делит отрезок, соединяющий звёзды, в отношении, обратно пропорциональном корням из их визуальных светимостей: $a = l_{\text{ярк}} + l_{\text{тускл}}$; $l_{\text{ярк}}/l_{\text{тускл}} = \sqrt{k}$. Тогда $l_{\text{ярк}} = a\sqrt{k}/(\sqrt{k} + 1)$, $l_{\text{тускл}} = a/(\sqrt{k} + 1)$, и по рассчитанным ранее абсолютным звёздным величинам находим

$$\begin{aligned} m' &= M_{\text{ярк}} - 5 + 5 \lg l_{\text{ярк}} \text{ (пк)} = m + 2.5 \lg \frac{k + 1}{k} + 5 \lg p \text{ (")} + 5 \lg a \text{ (пк)} + 5 \lg \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1} = \\ &= \boxed{m + 2.5 \lg(k + 1) + 5 \lg p \text{ (")} + 5 \lg a \text{ (пк)} - 5 \lg(\sqrt{k} + 1)}. \end{aligned} \quad 2 \text{ балла}$$

5.4. На какое максимальное расстояние может сместиться наблюдатель, чтобы его утверждение не утратило свою справедливость?

▷ Геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух заданных точек есть постоянная $\neq 1$, — это окружность. Наиболее удалённая от исходной точки точка окружности находится на прямой по другую сторону от более тусклой звезды. Исходное расстояние до неё $l_1 = l_{\text{тускл}}$, конечное $l_2 = a/(\sqrt{k} - 1)$; перемещение

$$l_1 + l_2 = \boxed{a \left(\frac{1}{\sqrt{k} + 1} + \frac{1}{\sqrt{k} - 1} \right)}. \quad 3 \text{ балла}$$

5. Пыльное небо^(10–11)

5.1. Зарегистрированная звёздная величина некоторой звезды на высоте h_1 составила m_1 . После того, как высота звезды уменьшилась до h_2 , её звёздная величина увеличилась до m_2 . Определите внеатмосферную звёздную величину этой звезды в модели оптически однородной атмосферы.

▷ Зенитные расстояния достаточно малы, чтобы считать атмосферу плоской. Используем «закон секансов» (A — поглощение в зените):

$$m_i = m_0 + \frac{A}{\sin h_i} \implies m_0 = \frac{m_1 \sin h_1 - m_2 \sin h_2}{\sin h_1 - \sin h_2}. \quad 2 \text{ балла}$$

5.2. На высоте h_3 звёздная величина того же светила составила m_3 . В модели тонкой сферической оптически однородной атмосферы оцените толщину H последней.

▷ Величина поглощения в зените $A = (m_i - m_0) \sin h_i$ — на высоту атмосферы. На высоте h_3 луч зрения пронизывает толщу атмосферы длиной l , для которой по теореме косинусов справедливо:

$$(R_\oplus + H)^2 = R_\oplus^2 + l^2 - 2R_\oplus l \cos(90^\circ + h_3).$$

С другой стороны, из величины поглощения на этой высоте $l = H \cdot (m_3 - m_0) / A$. Подстановка приводит к уравнению относительно H :

$$2R_\oplus + H = H \left(\frac{m_3 - m_0}{A} \right)^2 + 2R_\oplus \frac{m_3 - m_0}{A} \sin h_3 \implies H = 2R_\oplus \frac{1 - \frac{m_3 - m_0}{A} \sin h_3}{\left(\frac{m_3 - m_0}{A} \right)^2 - 1}. \quad 3 \text{ балла}$$

5.3. Какова оптическая толщина атмосферы в заданной модели при наблюдениях вблизи горизонта?

▷ Оптическая толщина τ соответствует ослаблению в e^τ раз. Вблизи горизонта имеем путь луча в атмосфере $l_{\text{гор}} = \sqrt{(R_\oplus + H)^2 - R_\oplus^2}$, что соответствует величине поглощения $\Delta m_{\text{гор}} = A l_{\text{гор}} / H$. Следовательно,

$$\tau_{\text{гор}} = \ln(10^{0.4 \Delta m_{\text{гор}}}) = \boxed{0.4 \ln 10 \cdot A \frac{\sqrt{(R_\oplus + H)^2 - R_\oplus^2}}{H}}. \quad 2 \text{ балла}$$

5.4. Оцените коэффициент σ поглощения атмосферы в расчёте на одну молекулу.

▷ Оптическая толщина $\tau = n \sigma l$, откуда $\sigma = \tau_{\text{гор}} / (n l_{\text{гор}})$. Концентрацию оценим как

$$n = \frac{N}{4\pi R_\oplus^2 H} = \frac{p_0 \cdot 4\pi R_\oplus^2}{4\pi R_\oplus^2 H} \cdot \frac{1}{m_0 g} = \frac{p_0 N_A}{\mu g H} \implies \sigma = 0.4 \ln 10 \cdot \frac{\mu g A}{p_0 N_A}. \quad 3 \text{ балла}$$

6. О жизни протуберанца^(8–9)

6.1. Сидерический экваториальный период вращения Солнца на экваторе $T_{\text{экв}} = 24.5$ сут. Вычислите синодический экваториальный период вращения Солнца.

➤ Из уравнения синодического движения $T'_{\text{экв}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{\text{экв}}} - \frac{1}{T_{\oplus}}}$, где $T_{\oplus}$ — земной год. 3 балла

6.2. Вследствие вращения Солнца из-за лимба «выглянул» протуберанец. Через t часов его стало видно целиком. Считая, что протуберанец находится на солнечном экваторе и неизменен со временем, определите его высоту h .

➤ Протуберанец видно целиком, когда видно его «основание» (на поверхности Солнца). Проводя аналогию с понижением горизонта, заключим, что Солнце доворачивается на угол $\gamma = \omega'_{\text{экв}} t = \arccos \frac{R_{\odot}}{R_{\odot} + h}$, то есть искомая высота

$$h = R_{\odot} \left(\frac{1}{\cos \omega'_{\text{экв}} t} - 1 \right) = R_{\odot} \left(\frac{1}{\cos (360^{\circ} \cdot t / T'_{\text{экв}})} - 1 \right). \quad \text{3 балла}$$

6.3. Пусть протуберанец находится на широте φ . Какова высота протуберанца в этом случае, если зависимость угловой скорости вращения Солнца от широты аппроксимируется выражением

$$\omega \text{ (}^{\circ}\text{/сут.)} = 14.71^{\circ} - 2.40^{\circ} \cdot \sin^2 \varphi - 1.79^{\circ} \cdot \sin^4 \varphi$$

➤ Солнце должно довернуться на больший угол, чем было нужно в случае экваториального протуберанца: видимость протуберанца определяется дугой большого круга — угловым расстоянием от «основания» протуберанца до границы видимой поверхности Солнца, в то время как движется протуберанец вдоль параллели — малого круга. Поскольку широта всё ещё не очень высокая, оценим угол «доворота» как $\gamma = \omega' t = \arccos \frac{R_{\odot}}{R_{\odot} + h} / \cos \varphi$, откуда

$$h = R_{\odot} \left(\frac{1}{\cos [\omega' t \cos \varphi]} - 1 \right) = R_{\odot} \left(\frac{1}{\cos \left[\left(\omega - \frac{360^{\circ}}{T_{\oplus}} \right) t \cos \varphi \right]} - 1 \right). \quad \text{4 балла}$$

6. Две весёлые ракеты^(10–11)

6.1. Две ракеты имеют одинаковый удельный импульс двигателя u . У первой ракеты масса топлива составляет α_1 от начальной массы, у второй — α_2 . Как соотносятся конечные скорости ракет v_2/v_1 при разгоне из состояния покоя в отсутствие внешних воздействий?

▷ По формуле Циолковского $v_i = u_i \ln \frac{m_{\text{нач},i}}{m_{\text{кон},i}} = u_i \ln \frac{m_{\text{нач},i}}{m_{\text{нач},i}(1-\alpha_i)} = -u_i \ln(1-\alpha_i)$.

При равных удельных импульсах двигателя ($u_1 = u_2 = u$) искомое соотношение равно

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\ln(1-\alpha_2)}{\ln(1-\alpha_1)}. \quad 3 \text{ балла}$$

6.2. Предположим, i -я ракета сначала разгоняется до некоторой скорости, а затем тормозит до полной остановки. Вычислите максимальную скорость v_m , которую ракета могла бы развить при таком движении. Потерей топлива на разворот ракеты пренебрегите.

▷ Ракета движется вдоль прямой, иначе топливо тратилось бы не только на разгон-торможение, но и на поворот вектора скорости. Из формулы Циолковского следует, что

$$m_i = m_{\text{нач},i} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta v}{u}\right),$$

где Δv — величина изменения скорости ракеты. Максимальная скорость v_m достигается при полном исчерпании топлива к моменту остановки:

$$(1-\alpha_i)m_{\text{нач},i} = m_{\text{нач},i} \cdot \exp\left(-\frac{v_m}{u}\right) \cdot \exp\left(-\frac{v_m}{u}\right) \implies v_m = \boxed{-\frac{1}{2}u \ln(1-\alpha_i)}. \quad 3 \text{ балла}$$

6.3. Какую долю β_m от исходной массы j -й ракеты составляла бы её масса к моменту достижения скорости v_m ?

▷ Вновь из формулы Циолковского следует, что

$$\beta_m = \exp\left(-\frac{v_m}{u}\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(1-\alpha_i)\right) = \boxed{\sqrt{1-\alpha_i}}. \quad 1.5 \text{ балла}$$

6.4. В течение какого промежутка времени k -я ракета смогла бы «зависнуть» на небольшой высоте над поверхностью Земли в отсутствие атмосферы?

▷ Условие равновесия ракеты — равенство реактивной и гравитационной сил: $\mu u = mg$, где $\mu = -\Delta m / \Delta t$ — расход топлива, откуда $\frac{\Delta m}{m} = -\frac{g}{u} \Delta t$. С другой стороны, вне гравитационного поля по второму закону Ньютона $ma = \mu u$, что с учётом $a \equiv \Delta v / \Delta t$ приводит к уравнению $\frac{\Delta m}{m} = -\frac{\Delta v}{u}$. Поскольку левые части уравнений совпадают, приравняем правые, а затем от приращений перейдём к конечным величинам:

$$t = \frac{v_{\text{кон},k}}{g} = \frac{u}{g} \ln \frac{m_{\text{нач},k}}{m_{\text{кон},k}} = \boxed{-\frac{u}{g} \ln(1-\alpha_k)}. \quad 2.5 \text{ балла}$$

7. Триангулятор⁽¹⁰⁻¹¹⁾

7.1. В таблице приводятся экваториальные координаты трёх ярких звёзд ночного неба Земли на эпоху 2000.0: $\{(\alpha_i, \delta_i)_{i=1, \dots, 3}\}$. Вычислите попарные угловые расстояния между этими тремя звёздами.

▷ Воспользуемся сферической теоремой косинусов для треугольника *светило i – светило j – Северный полюс мира*:

$$\cos \rho_{ij} = \cos(90^\circ - \delta_i) \cos(90^\circ - \delta_j) + \sin(90^\circ - \delta_i) \sin(90^\circ - \delta_j) \cos(\alpha_i - \alpha_j);$$

$$\rho_{ij} = \boxed{\arccos [\sin \delta_i \sin \delta_j + \cos \delta_i \cos \delta_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)]}. \quad 0.5 \times 3 = 1.5 \text{ балла}$$

7.2. Найдите площадь S сферического треугольника, образованного этими тремя светилами. Ответ выразите в стерadiansах и квадратных градусах.

▷ Площадь S (в стерadiansах) равна сферическому избытку ϵ (в радианах). Для расчёта последнего необходимо вычислить углы рассматриваемого треугольника, используя сферическую теорему косинусов. Напротив дуги ρ_{ij} лежит угол

$$\gamma_{ij} = \arccos \frac{\cos \rho_{ij} - \cos \rho_{ik} \cos \rho_{jk}}{\sin \rho_{ik} \sin \rho_{jk}}.$$

Искомая площадь (в стерadiansах) $S = \epsilon = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - \pi$. При переводе в квадратные градусы используется тот факт, что $1 \text{ ср} = (180^\circ / \pi)^2 \approx 3282.8 \square^\circ$. 3 + 1 = 4 балла

7.3. Найдите угол, который образуют между собой большие круги, содержащие дуги *светило i – светило j* и *светило j – светило k*.

▷ Это и есть найденный ранее угол γ_{ik} . 1.5 балла

7.4. Определите минимальный радиус P круглого поля зрения, при котором в этом поле одновременно могут наблюдаться все три светила.

▷ По существу ищем угловой радиус описанной окружности для заданного сферического треугольника. Заметим, что эта описанная окружность является одновременно описанной окружностью для *плоского* треугольника, образованного теми же вершинами.

Отрезки – стороны плоского треугольника являются хордами, стягивающими дуги – стороны соответствующего сферического треугольника. Полагая радиус небесной сферы равным 1, вычислим длины отрезков: $l_i = 2 \sin(\rho_i / 2)$.

Радиус описанной окружности плоского треугольника есть $R = l_1 l_2 l_3 / (4S)$, где S – площадь плоского треугольника, которую можно рассчитать по формуле Герона:

$$R = \frac{1}{4} \frac{l_1 l_2 l_3}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \quad p \equiv \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} - \text{полупериметр}.$$

Диаметр описанной окружности плоского треугольника – хорда, стягивающая диаметр описанной окружности соответствующего сферического треугольника, откуда искомый радиус

$$P = \arcsin R. \quad 3 \text{ балла}$$