



1. Астрофотография

10 баллов

Находящийся на экваторе астрофотограф владеет хорошим цифровым фотоаппаратом на штативе. Фокусное расстояние объектива — 150 mm, апертура — 84 mm. Эффективный диаметр сенсора — 22.5 mm. Фотоаппарат нацелен в зенит.

(a) Вычислите поле зрения фотоаппарата (угловой размер изображения) в градусах.

(b) Пространственный период пикселей сенсора — 3.23 μm . Каково максимально возможное время экспозиции (в секундах) до появления треков звёзд?

(c) Для улучшения изображения производится серия снимков (с найденной ранее выдержкой), которые затем «складываются». Полное время съёмки — 30 секунд (временем записи на карту памяти пренебрегаем). Какая часть суммарного поля зрения запечатлена на всех снимках серии? Ответ — число от 0 до 1.

An astrophotographer, based on the Equator, uses a good digital camera on a tripod, but with no tracking. The camera has a telescopic lens with focal length of 150 mm and aperture (objective diameter) of 84 mm. The sensor has an effective light collecting diameter of 22.5 mm. The photographic target is a star field at the observer's Zenith.

2 Calculate the field of view (the angular width of the image) which can be captured on the sensor using this equipment. Give the answer in degrees.

5 The pixels in the camera's sensor are separated by a distance of 3.23 μm . What is the maximum possible exposure time for a single frame, so that no star trails appear on the exposed image? Give the answer in seconds.

3 For a better-quality image of the star field, the photographer decides to take multiple shots at the exposure time calculated in b) and then to stack them together. The total time for all these shots is 30 seconds (ignore any time taken to write data to the memory card). What fraction of the total field of view is always visible throughout the shots? Give the answer as a number between 0 and 1.

2. Плоская Земля

10 баллов

Новая модель мироустройства затмила умы некоторых людей. Эти глупцы верят в модель «плоской Земли»: будто бы Земля является круглым «блином» радиуса $R_{\oplus}$, так что центральная ось Земли (прямая, перпендикулярная «блину» и проходящая через его центр) направлена в зенит наблюдателя.

В рамках этой модели будем считать, что

- солнечная постоянная $S_{\oplus} = 1366 \text{ W/m}^2$.
- центральная ось Земли прецессирует по кругу с периодом 25800 лет.
- радиус прецессионного круга — 23.5° .

Заодно положим, что Земля — абсолютно чёрное тело с однородным распределением температуры, а Солнце столь далеко, что его лучи параллельны, и в начальный момент времени находится в зените.

Определите, через сколько лет равновесная температура Земли уменьшится на 1°C .

A new model of the world is gaining in popularity among some people. These people believe in the “Flat Earth” view of the world, where the Earth is not a spheroid, but rather a circle with radius $R_{\oplus}$. The central axis of the Earth (normal to the circle passing through its centre C) passes through the observer's zenith.

This model must at least remain consistent with the observed phenomena, as listed below:

- The value of the solar constant is $S_{\oplus} = 1366 \text{ W/m}^2$.
- The Earth's central axis precesses in a circle with a period 25800 years.
- The radius of the precession circle is 23.5° .

Assume that (1) the Earth is a perfect blackbody radiator with uniform temperature and the Sun is sufficiently far away such that all solar rays are parallel and (2) the Sun's current (initial) location is at the zenith.

Determine how many years it will take for the Earth's equilibrium temperature to decrease by 1°C .

3. Зеркало

10 баллов

Скучающий космолог придумал эксперимент для определения параметра Хаббла H_0 в рамках модели стационарно расширяющейся Вселенной. Большое идеальное плоское зеркало с гироскопической стабилизацией предложено разместить вдали от других тел, на расстоянии D от Солнечной системы. Отправленный с Земли свет лазера вернётся через время T , зная которое можно будет вычислить и фиксированное значение H_0 .

(а) Выразите H_0 через D , c и T , полагая, что расстояние S между Солнечной системой и зеркалом изменяется исключительно за счёт расширения Вселенной по закону $S = s \cdot e^{H_0 t}$, где s — начальное расстояние. Считайте, что за время t свет проходит расстояние ct . Если нужно, $e^x \approx 1 + x$ при $x \ll 1$.

(б) Представьте, что зеркало расположено вблизи Веги — звезды-символа Олимпиады. Вега стала первой звездой (после Солнца), которая была сфотографирована, а также одной из первых звёзд, до которой методом параллакса было определено расстояние — это сделал Василий Яковлевич Струве в 1840 году. Параллакс Веги $p = 0.125''$. Сколько лет продлилось бы измерение H_0 в условиях описанного эксперимента?

7 Find an expression for H_0 as a function of D , c (speed of light) and T . Consider that the separation S between the Solar System and the mirror increases only due to the expansion of the universe according to the law $S = s \cdot e^{H_0 t}$, where s is the initial separation. You may use $e^x \approx 1 + x$ for $x \ll 1$, if necessary and assume that light travels a distance ct in time t in this expanding universe.

3 Imagine that such a mirror is located in the vicinity of the star Vega (which also features on the logo of the 1st GeCAA). Vega was the first star outside the Solar System to be photographed and one of the first stars whose parallax ($p = 0.125''$) was accurately measured in 1840 by G. W. von Struve. Estimate the total duration of this H_0 measurement experiment. Give the answer in years.

4. Кривые блеска

20 баллов

Кривая блеска А соответствует затменно-переменной двойной системе, наблюдаемой «с ребра», с компонентами X и Y (радиусы r_X и r_Y , светимости L_X и L_Y , соответственно). Звезда X ярче, но звезда Y — горячее.

The light curve A shown below, shows a fictional edge-on eclipsing binary system containing stars X (radius r_X , luminosity L_X) and Y (radius r_Y , luminosity L_Y). Assume that star X is brighter, but star Y is hotter.

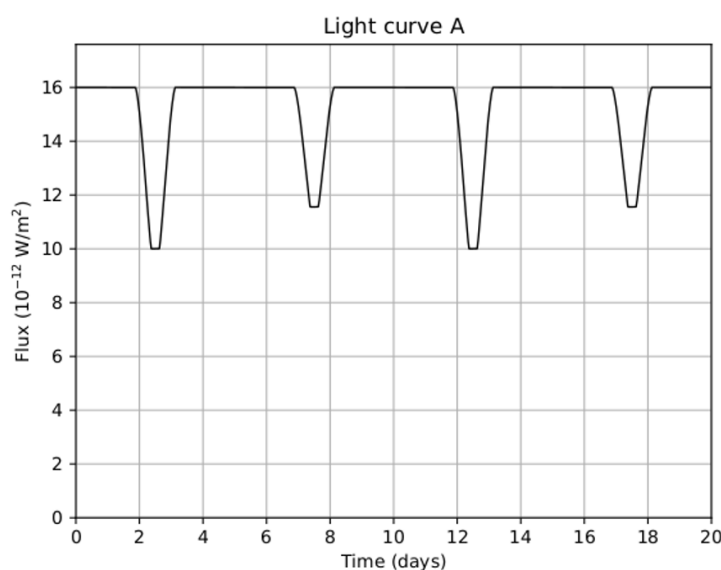


Рис. 1: Кривая блеска А: зависимость освещённости от времени (в сутках)

(a) Какая из двух звёзд лежит на главной последовательности? Выберите более вероятный вариант: X или Y.

1 Which of the two stars is more likely to be on the main sequence? (Choose “X” or “Y”)

(b) Используя кривую блеска A, определите:

Based on light curve A, estimate:

i. отношение радиусов компонентов r_X/r_Y ;

2 r_X/r_Y , the ratio of the radii of the two stars;

ii. отношение светимостей компонентов L_X/L_Y .

2 L_X/L_Y , the ratio of the luminosities of the two stars.

(c) Для получения из кривой блеска A кривых B–F достаточно поменять всего один параметр системы. Для каждой из кривых выберите наиболее подходящий вариант:

15 For light curves B to F, in each case only one parameter of the binary system has been changed from the case in light curve A. For each case, choose the description from the following list that best corresponds to the change (write the appropriate number in the answer sheet).

1. Увеличился размер звезды X.
2. Увеличилась светимость звезды X.
3. Уменьшился размер звезды X.
4. Уменьшилась светимость звезды X.
5. Увеличился размер звезды Y.
6. Увеличилась светимость звезды Y.
7. Уменьшился размер звезды Y.
8. Уменьшилась светимость звезды Y.
9. Звезда X — переменная.
10. Звезда Y — переменная.
11. Изменился наклон орбитальной плоскости системы.
12. Уменьшилось расстояние до системы.
13. Увеличилось расстояние до системы.
14. Увеличился орбитальный период системы.
15. Уменьшился орбитальный период системы.

1. Star X increased in size.
2. Star X increased in luminosity.
3. Star X decreased in size.
4. Star X decreased in luminosity.
5. Star Y increased in size.
6. Star Y increased in luminosity.
7. Star Y decreased in size.
8. Star Y decreased in luminosity.
9. Star X is a variable star.
10. Star Y is a variable star.
11. The inclination of the system relative to the Earth has changed.
12. The distance of the system from the Earth has decreased.
13. The distance of the system from the Earth has increased.
14. The orbital period of the system increased.
15. The orbital period of the system decreased.

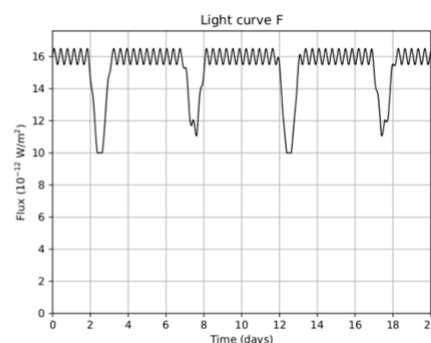
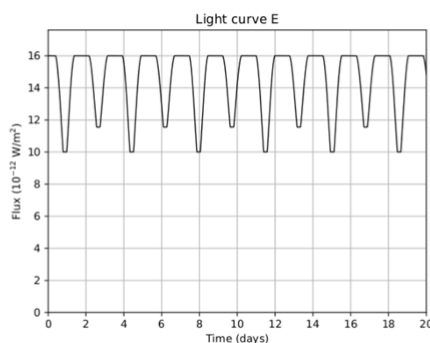
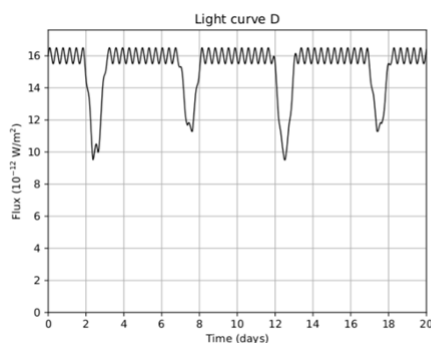
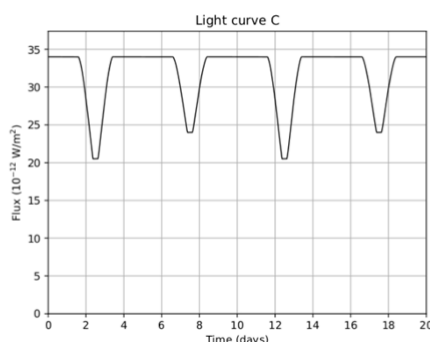
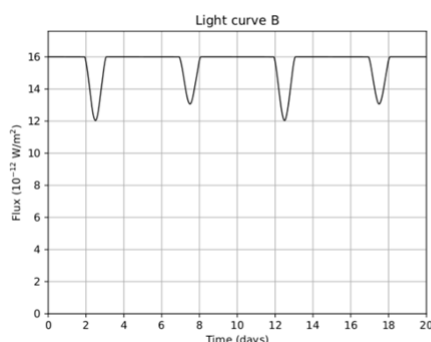


Рис. 2: Кривые блеска B–F

5. Область НII

20 баллов

Яркие голубые переменные (LBV) — массивные, нестабильные сверхгиганты, которые могут ощутимо терять вещество из-за атмосферных нестабильностей. После выброса вокруг звезды образуется плотная туманность. LBV очень горячи и излучают высокоэнергетические фотоны, способные ионизировать атомы водорода ($E_{\text{ph}} > h\nu_0 = 13.6 \text{ eV}$). В результате образуется сферическая область НII — ионизированного водорода.

Рассмотрим статическую, однородную туманность из чистого водорода с концентрацией $n_H = 10^8/\text{m}^3$ при температуре $T_{\text{HII}} = 10^4 \text{ K}$, которую ионизирует одиночная LBV, излучающая $Q = 10^{49}/\text{s}$ высокоэнергетических фотонов. Один такой фотон способен ионизировать только один атом.

В любой точке области НII протекает как процесс фотоионизации, так и процесс рекомбинации, в равновесии компенсирующие друг друга. Это определяет радиус R_S области полностью ионизированного вещества, ограниченной сферой Стрёмгрена.

Количество происходящих рекомбинаций в единице объёма прямо пропорционально концентрациям протонов n_p и электронов n_e с коэффициентом $\alpha(T_{\text{HII}}) = 10^{-19} \text{ m}^3/\text{s}$. Возникающие в результате рекомбинации фотоны игнорируйте.

(a) Получите выражение и вычислите при заданных параметрах радиус сферы Стрёмгрена R_S в парсеках.

(b) Сечение процесса фотоионизации для атомов водорода в основном состоянии и фотонов с частотой ν_0 составляет $\sigma_0 \approx 10^{-21} \text{ m}^2$. Вычислите длину свободного пробега l_{ν_0} фотона в туманности. Сравнив l_{ν_0} с R_S , ответьте, имеет ли рассматриваемая область НII резкую границу (YES/NO).

(c) Оцените, сколько лет требуется для формирования сферы Стрёмгрена.

(d) Приходящее из области НII излучение называют тормозным (свободно-свободные переходы): его производят свободные электроны, без захвата рассеивающиеся на ионах. При таком рассеянии электрон сохраняет большую часть своей энергии. Предположим, что в результате взаимодействия электрона с протоном был излучен радио-фотон с частотой $\nu = 10 \text{ GHz}$. Вычислите среднюю тепловую энергию электронов в области НII при заданной T_{HII} . Является ли описанное примером тормозного излучения (YES/NO)?

Luminous Blue Variables (LBV) are massive, unstable, supergiant stars that can undergo episodes of very strong mass loss, due to an instability in their atmospheres. After such an event, a dense nebula is formed around the star. LBV are also very hot stars and produce a large amount of high-energy photons that are able to ionise hydrogen atoms ($E_{\text{ph}} > h\nu_0 = 13.6 \text{ eV}$) creating a roughly spherical region of ionized hydrogen (HII region).

In this problem, we consider a static, homogeneous, pure hydrogen nebula with a concentration of $n_H = 10^8/\text{m}^3$ and temperature $T_{\text{HII}} = 10^4 \text{ K}$, ionized by photons from a single LBV star with a stable rate of ionizing photons $Q = 10^{49} \text{ ph/s}$. Assume that each photon can ionise only one hydrogen atom.

At a particular location within an HII region, the rate of photoionization is balanced by the rate of recombination per unit volume. This sets the radius of the fully ionized region and this region is called the Stromgren sphere with the radius R_S .

The total number of recombinations per volume is proportional to the concentration of protons n_p , the concentration of electrons n_e and the recombination coefficient for hydrogen $\alpha(T_{\text{HII}}) = 10^{-19} \text{ m}^3/\text{s}$. For simplification, ignore the fact that the process of recombination can also release ionising photons.

5 Derive an algebraic expression for the radius of the Stromgren sphere and calculate its value for the given parameters. Give the answer in parsecs.

3 The photoionization cross-section of H-atoms in the ground state encountering photons with frequency ν_0 is equal to $\sigma \approx 10^{-21} \text{ m}^2$. Calculate the mean free path l_{ν_0} of an ionising photon. Compare l_{ν_0} to R_S to determine if this ionized nebulae is sharp-edged or not? (answer “YES” or “NO”)

4 On what timescale do you expect the Stromgren sphere to form? Give the answer in years.

4 Radiation from an ionized hydrogen cloud (HII region) is often called free-free emission because it is produced by free electrons scattering off the ions without being captured: the electrons are free before the interaction and remain free afterwards. In this process, the electron retains most of its pre-scattering energy. An electron, while passing by a much more massive singly ionized hydrogen atom, produces a radio photon of $\nu = 10 \text{ GHz}$. Calculate the mean electron thermal energy in the HII region, for the given temperature of the Stromgren sphere. Is this an example of free-free emission? (answer “YES” or “NO”)

(е) Поскольку область HII находится в локальном термодинамическом равновесии, можно рассчитать коэффициент поглощения, прямо пропорциональный оптической толщине $\tau_\nu \propto \nu^{-2.1}$. Оказывается, что для высокочастотного радиоизлучения горячая плазма практически прозрачна ($\tau_\nu \ll 1$). Плотность потока фотонов имеет степенной вид: $S_\nu \propto \nu^\beta$. Определите β для радиочастот.

4 Since the HII region is in local thermodynamic equilibrium, one can calculate the absorption coefficient that is proportional to the optical depth $\tau_\nu \propto \nu^{-2.1}$ and it turns out that at sufficiently high radio frequencies, the hot plasma is nearly transparent and hence $\tau_\nu \ll 1$. The flux density of photons has power-law spectra of the form $S_\nu \propto \nu^\beta$. Find β for the radio frequencies. Write the numeric value of beta.

6. Затмение рентгеновского источника

20 баллов

Спутник, наблюдающий рентгеновские источники, обращается вокруг Земли по орбите радиусом r с периодом P . Радиус Земли — R . Спутник сохраняет ориентацию в пространстве на протяжении произвольного заданного промежутка времени.

Когда Земля оказывается между спутником и источником, измеряемый поток излучения падает до нуля. Однако, поскольку у Земли есть атмосфера, это происходит не мгновенно. Степень ослабления источника зависит от толщины атмосферы на луче зрения.

(а) Пусть склонение наблюдаемого источника 0° . «Затмение» источника наступает, когда уровень сигнала падает до 50 % от исходного. Это происходит, когда луч зрения проходит на высоте h над поверхностью Земли. Найдите выражение для θ_0 — угла между направлением на источник и на центр Земли, измеренного со спутника в этот момент времени.

1 Let us assume that the satellite is pointing towards a fixed source at 0° declination. We consider that the source is occulted when 50% of the light coming from the source gets attenuated due to the atmosphere. Let us say that this happens when the minimum height of the line of sight from the surface of the Earth is h . If θ_0 is the angle between the direction of the source and the direction of the Earth, as measured from the spacecraft, find an expression for θ_0 .

(б) Будем называть «продолжительностью наступления затмения» промежуток времени Δt между падением уровня сигнала с 90 % до 10 % от исходного. Высоты лучей зрения над поверхностью Земли составляют $(h + 0.5\Delta h)$ для 90 % и $(h - 0.5\Delta h)$ для 10 %, где $\Delta h \ll R$. Выразите Δt через r , P , Δh и θ_0 .

4 The time duration Δt between the source getting attenuated from 90% of the pre-occultation flux to 10% is defined as the 'occultation time' for the source. Assume the flux attenuates to 90% when the minimum height of the line of sight ($h + 0.5\Delta h$) and similarly the flux attenuates to 10% at $(h - 0.5\Delta h)$, where $\Delta h \ll R$. Find the expression for Δt in terms of r , P , Δh and θ_0 .

(с) Найдите выражение для Δt в случае наблюдения источника с произвольным, не слишком большим склонением β .

15 If the satellite was pointing towards a source at an arbitrary declination β instead (where β is not too large), what will be the expression for Δt ?

Примечание. Если бы плоскость орбиты спутника не совпадала с экваториальной, можно было бы «переопределить» плоскость экватора, так что под β подразумевалось бы «относительное» склонение.

Note: If the satellite was not in the equatorial plane, then the problem could have been simply rephrased by assuming the satellite's orbital plane to be the equatorial plane. In that case, β becomes 'relative declination'.

7. Радиант метеорного потока

30 баллов

Звездочёт из Цзяи с острова Тайвань (23.5° с.ш., 120.4° в.д., GMT+8) в 21:00 тайваньского времени 25.09.2020 будет иметь удовольствие наблюдать два метеора. Путь первого метеора начался на высоте 15° над точкой севера и завершился на горизонте в точке востока. Второй метеор пронёсся от точки с высотой 23.5° и азимутом 210° к точке с высотой 75° и азимутом 255°.

(a) Определите местное звёздное время (LST), соответствующее моменту наблюдения.

6 What is the Local Sidereal Time (LST) at the time of observation?

(b) Найдите горизонтальные координаты (высоту и азимут) радианта этих двух метеоров.

16 Find the alt-az coordinates of the apparent radiant of the two meteors.

(c) Найдите экваториальные координаты радианта.

6 Find the equatorial coordinates of the apparent radiant.

(d) Какое из перечисленных созвездий ближайшее к радианту?

2 Which of the following constellations is closest to the radiant?

- Южный Крест
- Золотая Рыба
- Павлин
- Тукан
- Южный Треугольник

- Crux
- Dorado
- Pavo
- Tucana
- Triangulum Australes

Внимание:

- Азимуты отсчитываются от точки севера (0°) к востоку.
- Звёздное время гринвичского меридиана (GST) в 00:00 UT 01.01.2020 — 6^h 40^m 30^s.

Notes:

- Azimuths are measured from the North (0°) towards the East.
- The Greenwich Sidereal Time (GST) at 00:00 UT on 1st January 2020 is 6^h 40^m 30^s.

8. Большое Красное Пятно на Юпитере

30 баллов

В этой задаче исследуется карта поля скоростей Большого Красного Пятна (БКП) на Юпитере и его окрестностей — см. последний лист. Стрелки ориентированы и масштабированы в соответствии с направлениями и величинами скоростей ветра в разных точках.

Из-за осевого вращения Юпитер слегка сплюснут. Уравнение эллипсоида вращения, приближающего форму Юпитера, имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{R_e^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1,$$

где $R_e = 7.15 \times 10^7$ m — экваториальный радиус, $R_p = 6.69 \times 10^7$ m — полярный радиус. Главные радиусы кривизны в любой точке можно вычислить по следующим формулам ($\varepsilon = R_e/R_p$):

In the following problem, the fluid mechanics of Jupiter's Great Red Spot (GRS) is studied based on the velocity field data. The diagram on the last page shows a map of relative velocity for GRS and the surrounding region. The arrows are oriented and scaled as per the directions and magnitudes of winds at different points.

Due to the combined effects of gravity and rotation, Jupiter is slightly flattened at its poles. The equation of a spheroid approximating for the shape of Jupiter can be stated as:

where $R_e = 7.15 \times 10^7$ m is the equatorial radius of Jupiter, and $R_p = 6.69 \times 10^7$ m the polar radius. The radii of curvature of this spheroid in any direction can be calculated by the following equations ($\varepsilon = R_e/R_p$):

$$r(\phi) = R_e (1 + \varepsilon^{-2} \tan^2 \phi)^{-1/2},$$

$$R(\phi) = R_e \varepsilon^{-2} \left(\frac{r(\phi)}{R_e \cos \phi} \right)^3.$$

Здесь $r(\phi)$ — зональный радиус кривизны (радиус кривизны параллели), $R(\phi)$ — меридиональный радиус кривизны (радиус кривизны меридиана), выражены как функции широты ϕ . Сидерический период обращения Юпитера $P = 3.57 \times 10^4$ s.

(a) Вычислите зональный $\bar{r}$ и меридиональный $\bar{R}$ радиус кривизны в центре БКП (в километрах).

(b) Оцените эксцентриситет БКП.

(c) Завихрённостью называют меру локальной закрученности, то бишь ротор поля скоростей жидкости. Среднюю завихрённость можно оценить по формуле

$$\xi = \frac{V_w L_{\text{GRS}}}{A_{\text{GRS}}},$$

где V_w — максимальная скорость ветра, L_{GRS} и A_{GRS} — периметр и площадь БКП. Оцените среднюю завихрённость БКП. Ответ приведите в единицах СИ.

Подсказка. Периметр эллипса неплохо оценивается как среднее арифметическое длин описанной и вписанной окружностей.

(d) Найдите абсолютную завихрённость $\xi_a = \xi + f$, добавив кориолисов член

$$f = 2\Omega \sin \phi,$$

где Ω — угловая скорость осевого вращения Юпитера, ϕ — широта. Ответ приведите в единицах СИ.

(e) Если знак абсолютной завихрённости совпадает со знаком широты, мы называем вихрь циклоном; в противном случае — антициклоном. БКП — это циклон (cyclone) или антициклон (anticyclone)?

(f) Вообразите, что БКП «съехал» на широту ϕ_1 , изменив свой тип (из циклона стало антициклоном или наоборот). Предполагая, что произошедшее смещение — минимальное из возможных, определите новую широту ϕ_1 в градусах, ответ округлите до ближайшего целого. Считайте, что на новом месте БКП сохранило размер по широте, скорости ветров и эксцентриситет.

where $r(\phi)$ and $R(\phi)$ are the zonal (aka in the zone of a particular latitude) and meridional (aka longitudinal) radii of curvature, respectively, as a function of planetographic latitude ϕ . The sidereal rotation period of Jupiter is $P = 3.57 \times 10^4$ s.

4 Calculate the zonal and meridional radii values ($\bar{r}$ and $\bar{R}$ respectively) at the location of the centre of the GRS. Write numeric answer in km.

5 Estimate the eccentricity of the GRS.

6 'Vorticity' at any point is a measure of local spinning of the fluid as measured by an observer situated in the reference frame of the fluid. Mathematically, it is calculated as 'curl' (vector derivative product) of the velocity field. In this case, the average relative vorticity may be estimated by the equation:

where V_w is the maximum value of winds as per the velocity field, L_{GRS} is the length of the circumference of the GRS and A_{GRS} is the area of the GRS. Estimate average relative vorticity of the GRS. Give the answer in SI units.

Hint: The circumference of an ellipse is well approximated by an average of circumferences of the corresponding auxiliary and minor circles.

2 Find the absolute vorticity $\xi_a = \xi + f$ by adding the Coriolis parameter

where Ω is the angular velocity of the Jupiter (due to axial rotation) and ϕ is the appropriate latitude. Give the answer in SI units.

1 If the absolute vorticity has the same sign as the latitude, we call the storm a 'cyclonic storm'. If they have opposite signs, the system is 'anticyclonic'. Is the GRS cyclonic or anticyclonic?

12 Imagine that the GRS moves to another latitude ϕ_1 , where the absolute vorticity changes the sign (changes from anticyclonic to cyclonic or vice versa). Assuming minimum possible displacement of the GRS, at what value of ϕ_1 do we expect this change? Give the answer in degrees, rounded to nearest integer. In your analysis, assume that the GRS at the new location would occupy the same angular span in latitude, as well as have the same wind velocities and eccentricity as the original.

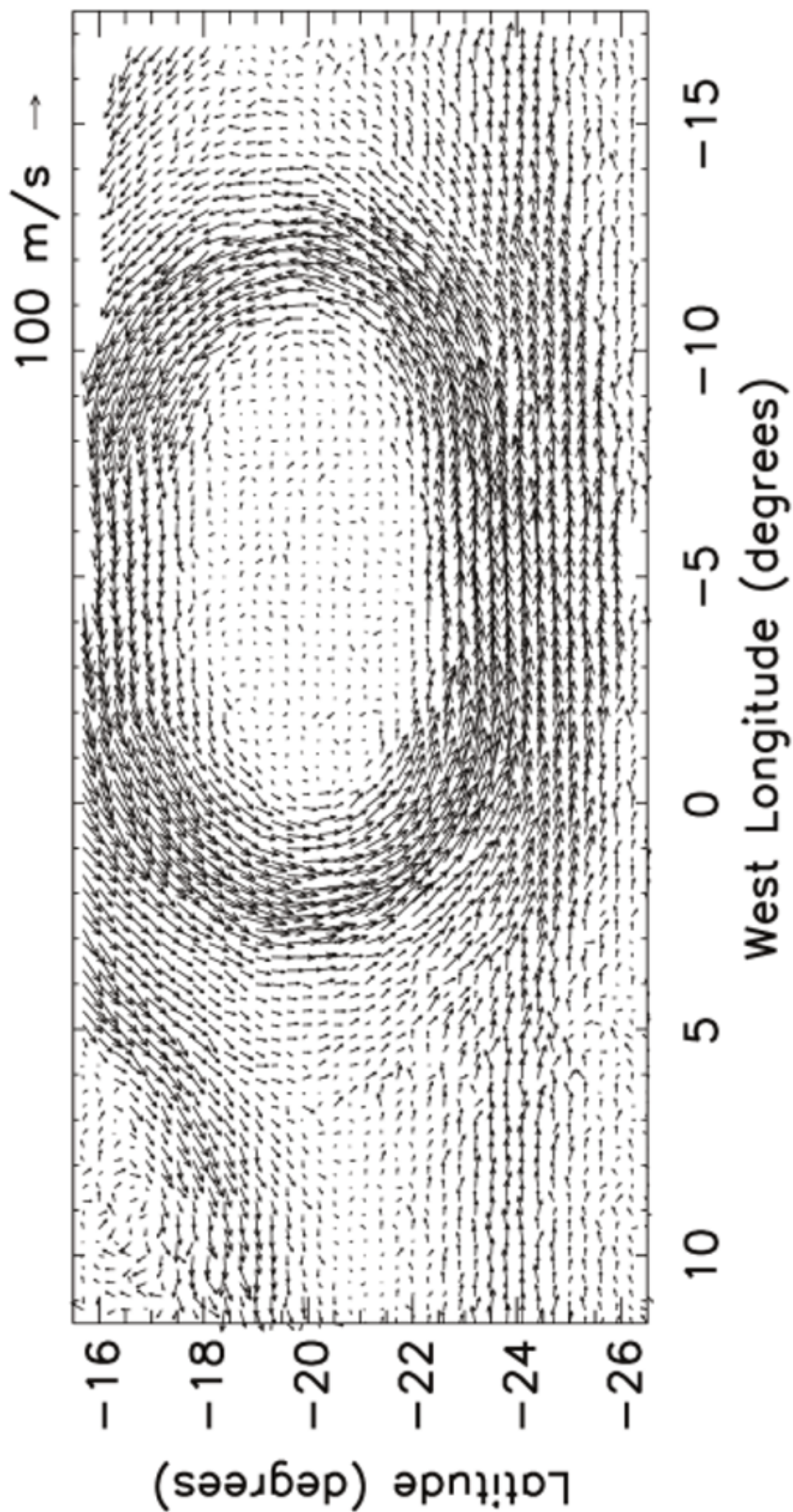


Рис. 3: Карта поля скоростей БКП и его окрестностей
Горизонтальная ось — западная долгота (в градусах), вертикальная ось — широта (в градусах)