

**XXXIII Санкт-Петербургская
Астрономическая олимпиада**
теоретический тур, решения

2026
8
февраля

9 класс

1. Дата Пасхи меняется из года в год. В католической традиции она вычисляется по следующему правилу: это первое воскресенье после Пасхального полнолуния. Пасхальное полнолуние — первое, которое происходит не ранее 21 марта (хотя здесь подразумевается день весеннего равноденствия, для отсчета используют именно 21 марта, вне зависимости от реальной даты равноденствия). Если пасхальное полнолуние случается в воскресенье, то Пасху отмечают в следующее воскресенье.

Какое наибольшее и наименьшее количество дней может пройти от одной Пасхи до Пасхи в следующем году?

Решение:

Пасха всегда приходится на воскресенье, а это значит, что между двумя Пасхами должно пройти целое число недель.

Синодический месяц составляет около 29.5 суток. Между двумя пасхальными полнолуниями может произойти либо 12 синодических месяцев (354 дня), либо 13 (383.5 дней). Во втором случае количество дней между датами полнолуний может округляться либо до 383, либо до 384.

354 дня — это 50 недель и 4 дня, так что в этом случае от одной Пасхи до следующей проходит либо 50 недель, либо 51. 383 и 384 дня — это 54 недели и еще 5 или 6 дней. В любом случае между Пасхами пройдет 54 или 55 недель. Отметим, что даже если взять более точную длительность среднего синодического месяца — около 29.53 суток — то для 12 и 13 месяцев получатся периоды 354.36 суток и 383.89 суток соответственно. При любом округлении этих периодов возможное количество недель останется прежним.

50 недель — это 350 дней, 55 недель — 385 дней. Иными словами, на следующий год дата Пасхи может оказаться, самое раннее, на 15 дней раньше (или 16, если год следующей Пасхи високосный), либо, самое позднее, на 20 дней позже (или 19 — для високосного следующего года).

Действительно, в 2024 году католическая Пасха была 31 марта, а в 2025 — 20 апреля, между ними прошло 385 дней. А в 2026 году Пасха будет 5 апреля — еще через 350 дней.

И.В.Чугунов

2. Известно, что разность долгот двух точек на поверхности Земли равна разности местных времен. Однако единицы солнечного и звездного времени немного отличаются, поэтому некоторой разности солнечных времен соответствует другая разность звездных.

Разности каких времен на самом деле равна разность долгот? На сколько процентов и в какую сторону будет отличаться неправильно определенная по разности времен разность долгот от правильной?

Решение:

Проще всего рассуждать от противного. Если разность «правильных» времен равна 24^h , то это должно означать, что мы находимся на одной и той же долготе.

Звездное время определяется в конечном счете как угол поворота Земли относительно бесконечно далеких неподвижных объектов, поэтому через одни звездные сутки ориентация Земли в пространстве совпадет с исходной. Солнечное время — это угол поворота относительно Солнца, которое за сутки само перемещается в пространстве относительно Земли (вернее, Земля перемещается относительно Солнца, но в интересующем нас случае разница несущественна). Поэтому ответ на первый вопрос задачи — разность долгот равна разности звездных времен.

Чтобы ответить на второй вопрос, надо вспомнить, что за год один оборот Земли вокруг своей оси «компенсируется» одним оборотом Земли вокруг Солнца, из-за чего в году 365 солнечных суток и 366 звездных (с точностью до целого). Тем самым все единицы солнечного времени в $\approx 366/365$ раза длиннее единиц звездного времени и при использовании солнечного времени вместо звездного мы получим результат, *большой* правильного примерно на $1/365$ часть, то есть примерно на 0.3%.

Интересно заметить, что отклонение истинного солнечного времени от среднего (существование т.н. «уравнения времени») в данном случае никакой роли не играет — местное время в двух точках поверхности Земли определяется в один и тот же момент физического времени, поэтому скорость и направление годичного движения Солнца по небесной сфере в этот момент оказываются несущественными.

П.А.Тараканов

3. Гесиод утверждал, что падение медной наковальни с неба на землю длилось бы девять дней и ночей. Оцените высоту, на которой, по мнению Гесиода, находится небо.

Решение:

Возможно, напрашивающаяся на первый взгляд идея — считать, что наковальня падает равноускоренно с ускорением $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Тогда за 9 суток при нулевой начальной скорости она пролетит расстояние

$$s = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot (9 \cdot 86400)^2}{2} \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ м} \approx 20 \text{ а.е.}$$

Очевидно, что это нереалистичный ответ: на таких расстояниях от Земли ускорение свободного падения явно будет другим, да и гравитационное воздействие Солнца на наковальню тоже определенно придется учитывать.

Поэтому считаем Землю шарообразной. Тогда падение наковальни можно представить как движение по очень сильно вытянутой эллиптической орбите, практически не отличающейся от отрезка, большая ось r которой совпадает с расстоянием от точки старта наковальни до центра Земли. Запишем для такой орбиты III закон Кеплера, причем для удобства сравним эту орбиту с орбитой Луны, период обращения которой вокруг Земли примерно равен $T = 27$ суткам. Тогда

$$\frac{T^2}{(r/2)^3} = \frac{T^2}{a^3},$$

где a — расстояние от Земли до Луны (фактически радиус орбиты Луны, эллиптичностью которой мы пренебрежем), а $T = 18$ суток (наковальня за 9 суток пролетит только половину своей орбиты).

Подставим данные о периодах в выражение, заодно «перевернув» его. Получим

$$\frac{r^3}{2^3 \cdot 18^2} = \frac{a^3}{27^2}.$$

Отсюда

$$r = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 18^2}{27^2}} a = \sqrt[3]{\frac{32}{9}} a \approx \frac{3}{2} a.$$

Ну и поскольку радиус орбиты Луны около $4 \cdot 10^5$ км, то высота неба — $6 \cdot 10^5$ км. Заметим, что это меньше размера сферы действия Земли, так что влияние Солнца на наковальню в данном случае учитывать действительно не требовалось.

П.А.Тараканов

4. Инопланетные астрономы, живущие на планете, находящейся на расстоянии не более чем 100 пк от Солнца, пытаются наблюдать прохождение Юпитера по диску Солнца. Оцените вероятность, с которой им удастся это сделать при первом же наблюдении.

Можно считать, что погодные условия у них всегда благоприятные, а проникающая и разрешающая способность наблюдательной аппаратуры заведомо достаточна для проведения подобных наблюдений. Радиус орбиты Юпитера — 5 а.е., а радиус самого Юпитера в 10 раз меньше радиуса Солнца.

Решение:

Начнем с истолковывания вспомогательной детали условия. Инопланетные астрономы находятся на расстоянии не более 100 пк от Солнца, и это означает, что направление, в котором они могут находиться по отношению к Солнечной системе, может быть произвольным — это расстояние заведомо меньше характерной полутолщины диска Галактики.

Теперь подумаем, что конкретно может помешать инопланетным астрономам увидеть прохождение (кроме погодных и технических ограничений, которые по условию задачи исключены). Такое обстоятельство одно — Юпитер во время наблюдения не проходит по диску Солнца. Соответственно, нам надо оценить долю небесной сферы, при наблюдении из которой Юпитер окажется перед Солнцем и будет проецироваться на его диск. Сделать это можно несколькими разными способами, изложим простейший.

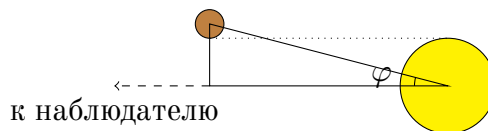
Для начала заметим, что наблюдения проходят с большого расстояния (ближе чем на α Сеп инопланетяне точно не живут), поэтому угловой размер Юпитера для наблюдателей в 10 раз меньше углового размера Солнца и тем, что Юпитер не точечный, для оценки можно пренебречь. По той же причине доля небесной сферы, из которой Юпитер виден на диске Солнца, совпадает с долей небесной сферы, из которой в данный момент Юпитер не виден, поскольку закрыт от наблюдателей Солнцем.

Последнюю величину можно сравнительно легко оценить. Мы знаем, что при наблюдении с Земли угловой диаметр Солнца около $0^\circ.5$. Соответственно, при наблюдении Солнца с Юпитера угловой диаметр Солнца будет в 5 раз меньше и окажется равным $0^\circ.1$. Поэтому Юпитер находится за Солнцем для наблюдателей, находящихся на небесной сфере в круге с таким угловым диаметром. Его площадь можно оценить как 10^{-2} квадратного градуса (более аккуратный подсчет даст результат $8 \cdot 10^{-3}$) и, поскольку все небо содержит около $4 \cdot 10^4$ квадратных градусов, интересующая нас доля небесной сферы составит примерно $2 \cdot 10^{-7}$. Оказавшиеся в диаметрально противоположном участке небесной сферы того же размера инопланетные астрономы увидят Юпитер на диске Солнца, таким образом, это одновременно и ответ на вопрос задачи — вероятность при первом же наблюдении увидеть прохождение Юпитера по диску Солнца равна $2 \cdot 10^{-7}$.

Принципиально можно также пойти по более длинному, но, возможно, более идейно легкому пути, «разделив» происходящее на две подзадачи. Заодно при изложении этого варианта для разнообразия воспользуемся радианной мерой угла (что можно было сделать и в первом варианте решения). Во-первых, если инопланетные астрономы со своей планетной системой находятся далеко от плоскости орбиты Юпитера вокруг Солнца, то наблюдение прохождения принципиально невозможно: Юпитер будет проходить либо над диском Солнца, либо под ним, но на него никогда не попадет. Во-вторых, даже если прохождения возможны, наблюдение может случиться тогда, когда Юпитер по диску Солнца не проходит. Эти два события никак не зависят друг от друга, поэтому вероятность того, что в обоих случаях обстоятельства

окажутся благоприятными, равна произведению вероятностей того, что в каждом из двух случаев все сложится удачно.

Начнем с оценки вероятности того, что Юпитер вообще когда-либо проходит по диску Солнца. Нарисуем предельный случай — когда для наблюдателя Юпитер касается диска Солнца, но не заходит на него:



По построению видно, что

$$\varphi \approx \sin \varphi = \frac{R_{\odot} + R_{\text{ж}}}{a_{\text{ж}}}.$$

Опять пренебрежем размерами Юпитера по сравнению с Солнцем (считая второе слагаемым в числителе дроби близким к нулю). Во-вторых, искомый угол — это угловой размер радиуса Солнца с расстояния, равного радиусу орбиты Юпитера. Нас же на самом деле интересует угол 2φ — это угловой размер полосы, в которой Юпитер должен находиться для того, чтобы его прохождение по диску Солнца можно было наблюдать. Поэтому

$$2\varphi = 30' / 5 = 6' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \cdot 6 \text{ радиана}.$$

Тогда телесный угол, в котором будет наблюдаться прохождение, будет равен ширине этой полосы, умноженной на 2π . Поскольку вся сфера — это 4π , вероятность попасть в нужный «пояс» составит

$$\frac{\pi}{180 \cdot 60} \cdot 6 \cdot \frac{2\pi}{4\pi} \approx 9 \cdot 10^{-4}.$$

Теперь оценим вероятность того, что в момент наблюдения прохождение Юпитера будет видно. Достаточно вычислить время, которое потребуется Юпитеру на пересечение с его орбитальной скоростью диаметра Солнца. Это можно сделать несколькими различными методами, приведем тот, который требует знания наименьшего количества дополнительных параметров.

Уже известный нам угловой диаметр Солнца $6'$ Юпитер должен проходить за $1/360/60 \cdot 6$ долю оборота, и именно в это время его можно будет увидеть на диске Солнца, если наблюдатель находится в произвольной точке, лежащей в плоскости орбиты Юпитера вокруг Солнца. Это и есть вероятность обнаружить его там при первом же наблюдении, и она равна $3 \cdot 10^{-4}$. Оценку можно немного уменьшить (например, до $2 \cdot 10^{-4}$), если учесть, что для наблюдателей, находящихся не точно в плоскости орбиты, время прохождения Юпитера по диску Солнца будет меньше. Осталось перемножить две вероятности. Получим величину около $2 \cdot 10^{-7}$, что является итоговым ответом, совпадающим с полученным ранее другим способом.

П.А.Тараканов

5. Начинаящий астроном Вася не до конца разобрался с понятием звездной величины. Когда Васю попросили определить видимую звездную величину объекта, вдвое ярче данного, Вася просто умножил звездную величину на 2. Тем не менее, ответ Вася получил верный. Чему же была равна видимая звездная величина исходного объекта?

Решение:

Пусть m — исходная звездная величина, а E — освещенность, создаваемая объектом. Составим уравнение:

$$2m - m = -2^m \cdot 5 \lg \frac{2E}{E} = -2^m \cdot 5 \lg 2,$$

откуда $m = -2.5 \lg 2 \approx -2^m \cdot 5 \cdot 0.3 = -0^m \cdot 75$.

А.В.Веселова