

**XXXIII Санкт-Петербургская
Астрономическая олимпиада**
теоретический тур, решения

2026
8
февраля

7–8 классы

1. Всем известно, что самый несчастливый день в году — пятница, 13-е. Сколько таких дней может быть в одном календарном году? Насколько маленьким и насколько большим (в сутках) может быть промежуток между двумя ближайшими такими несчастливыми днями в пределах одного календарного года?

Решение:

Очевидно, что минимальный промежуток не может быть меньше месяца, так как в любом календарном месяце лишь одно 13-е число. Тогда возможный минимальный промежуток будет равен одному месяцу, а точнее — 28 дням. Действительно, если в год невисокосный (в феврале 28 дней), и 13-е февраля стало пятницей, то через 28 дней наступит 13-е марта, и оно также будет пятницей, например, как в текущем 2026 году.

Сделаем краткую схему календаря на текущий год (можно и на любой другой):

- 13 января — вторник (0-вой день недели в условный год)
- 13 февраля — пятница (сдвиг +3 дня)
- 13 марта — пятница (+3; сдвиг +4 в високосный год)
- 13 апреля — понедельник (+6; 0)
- 13 мая — среда (+1; +2)
- 13 июня — суббота (+4; +5)
- 13 июля — понедельник (+6; 0)
- 13 августа — четверг (+2; +3)
- 13 сентября — воскресенье (+5; +6)
- 13 октября — вторник (0; +1)
- 13 ноября — пятница (+3; +4)
- 13 декабря — воскресенье (+5; +6)

Заметим следующее: в невисокосном году январь и октябрь, февраль, март и ноябрь, сентябрь и декабрь совпадают по дням недели в пределах короткого месяца. То есть если 13 января выпало на пятницу, то и 13 октября тоже будет пятницей. Получаем и частичный ответ на первый вопрос: существует год с тремя такими датами, и с двумя.

Отсюда следует, что вариант 13 января — 13 октября может быть потенциальным интересным нам промежутком, так как между ними пятница, 13-ое не встретится, иначе совпали бы и остальные дни. Между этими днями

$$31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 = 273 \text{ дня,}$$

Так было, например, в 2023 году. Пара февраль–ноябрь нас не устроит, т.к. между ними встречается март. Пара март–ноябрь, очевидно, даст промежуток на месяц меньше, чем январь–октябрь.

Рассмотрим високосные года аналогичным образом. В них январь совпадает по дням недели с апрелем и июлем, февраль — с августом, март — с ноябрем, сентябрь — с декабрем.

Из полученных пар мы уже рассмотрели март–ноябрь, а остальные тем более короче. По числу пятниц, 13-ое получаем те же два или три дня.

Может ли промежуток больше? Формально, если в год выпала лишь одна пятница, 13-ое (например, в мае или июне — в месяцы, уникальные по набору дней недели в году), то мы не ведем речь про промежуток в пределах одного календарного года.

Остается выяснить, может ли быть такое, что в году не будет ни одной пятницы, 13-ое. По представленной выше схеме и в високосный, и в невисокосный год, всегда найдется такая дата.

Сформулируем окончательный ответ на задачу. В году всегда бывает хотя бы один самый несчастливый день. Максимально их может встретиться три. Минимальный промежуток между двумя последовательными — 28 дней. Максимальный — 273 дня.

В.В.Григорьев

2. Аппарат Вояджер-2 1 февраля текущего года находился на таком расстоянии от Земли, что сигнал до него шел 23 часа 46 минут. 15 ноября сигнал будет идти до него ровно одни солнечные сутки. Оцените среднюю скорость движения Вояджера-2 относительно Земли в км/с.

Решение:

С 1 февраля по 15 ноября 2026 года пройдет

$$28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 15 = 288$$

земных суток. За это время он пролетит расстояние, равное 14 световых минут:

$$3 \times 10^5 \text{ км/с} \cdot 15 \text{ минут} \cdot 60 \text{ секунд/минута} = 2.5 \times 10^8 \text{ км.}$$

Вояджер-2 находится вне Солнечной системы, гравитационно на него практически ничего не влияет. Это означает, что траекторию Вояджера-2 можно считать прямолинейной, по которой он летит практически равномерно. Скорость рассчитывается просто:

$$\frac{2.5 \times 10^8}{288 \cdot 86400} \approx 10 \text{ км/с.}$$

В.В.Григорьев

3. Кольца Сатурна имеют небольшую толщину: всего 20 метров. Внутренний радиус колец составляет 70 тыс. км, а внешний — 200 тыс. км. Считая, что все кольца состоят из ледяных шариков радиусом 3 метра, оцените количество этих шариков и полную массу колец, если известно, что пустое пространство занимает 97% от всего объема колец.

Решение:

Найдем объем колец V , считая его как разность двух плоских цилиндров:

$$\begin{aligned} V &= \pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h = \pi h (R_2^2 - R_1^2) = \pi h (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) = \\ &= \pi \cdot 0.02 \cdot 130 \times 10^3 \cdot 270 \times 10^3 \approx 2.2 \times 10^9 \text{ км}^3. \end{aligned}$$

Здесь были использованы обозначения: R_1 — радиус внутреннего кольца, R_2 — радиус внешнего кольца, h — толщина колец, все величины были переведены в километры. Тогда объем, занимаемый льдом, составляет $7 \cdot 10^7 \text{ км}^3 = 7 \cdot 10^{7+3 \cdot 3} = 7 \cdot 10^{16} \text{ м}^3$.

Вспомнив, что плотность льда около $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$, можно найти массу вещества колец:

$$m = \rho V = 900 \cdot 7 \cdot 10^{16} \approx 6 \times 10^{19} \text{ кг.}$$

Теперь вычислим объем V_0 одного ледяного шара радиуса $r = 3 \text{ м}$:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 27 \approx 1.1 \cdot 10^2 \text{ м}^3.$$

Тогда всего таких шариков в кольцах $7 \cdot 10^{16} / (1.1 \cdot 10^2) \approx 6 \times 10^{14}$ штук.

В.В.Григорьев

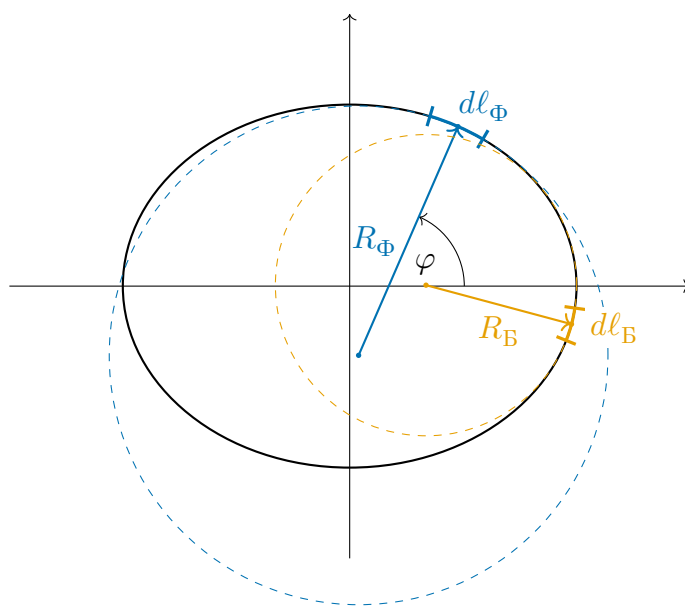
4. В XVIII веке для проверки теоретического предсказания Исааком Ньютоном сплюснутости Земли у полюсов были проведены т.н. «градусные измерения»: измерялась длина дуги меридиана с разницей широт 1° на территориях современных Бразилии и Финляндии. Какая из дуг оказалась длиннее? Обоснуйте свой ответ.

Решение:

Широты точек на поверхности Земли в те времена в «малоосвоенной» местности можно было измерить только астрономическими методами — по высоте светил над горизонтом.

Дугу в один градус вдоль меридиана Земли всегда можно приблизительно представить дугой окружности, касательной к меридиану в той точке, где измеряется дуга. Если бы Земля была идеальным шаром, радиус этой окружности был бы постоянен и равнялся радиусу Земли. Однако Земля сплюснута у полюсов, таким образом ее поверхность более плоская на высоких широтах, и более искривленная ближе к экватору, соответственно радиус касательной окружности, а значит и радиус дуги в один градус, будет расти с увеличением широты.

Финляндия — это северная страна, значительная часть которой расположена за Северным Полярным кругом, а через территорию Бразилии проходит земной экватор, самая отдаленная от экватора ее точка имеет широту около 33° ю. ш. Таким образом, величина дуги в 1° больше в Финляндии, что, собственно, и было подтверждено градусными измерениями французской академии наук в XVIII веке.



П.А.Тараканов, И.С.Тихоненко

5. Согласно византийским источникам, 10 марта 601 года произошло полное солнечное затмение. Также известно, что 16 июля 622 года пророк Мухаммед переселился из Мекки в Медину. Известно, что продолжительность сароса (периода приблизительного повторения солнечных и лунных затмений) составляет 6585.3 суток. В какой фазе в день переселения была Луна? Нарисуйте ее примерный вид, укажите, была она растущей или убывающей. Обоснуйте свой ответ.

Решение:

Для начала отметим тот факт, что продолжительность сароса чуть больше 18 лет, а это означает, что между двумя интересующими нас событиями прошло более 1 сароса. Поскольку в VII веке нашей эры еще не существовал Григорианский календарь, то даты даны по Юлианскому календарю (по которому жила Византия и который наверняка использовался в упомянутых в условии задачи источниках). В этом календаре в каждые 16 последовательных годах 12 невисокосных и 4 високосных года. То есть в 16 годах

$$12 \cdot 365 + 4 \cdot 366 = 5844 \text{ суток.}$$

Вычтем из 6585.3 суток 5844 и получим, что от 10 марта 617 года до конца периода сароса остается еще 741.3 суток. Поскольку 618 и 619 года невисокосные, то в них в сумме содержится 730 дней. Таким образом, период сароса закончится примерно через 11 суток после 10 марта 619 года и случится это 21 марта 619 года.

В одном саросе целое число синодических месяцев (полных циклов смены лунных фаз), что означает, что 21 марта 619 года Луна находилась в новолунии (солнечное затмение может произойти только при этой фазе).

Теперь вычислим количество дней между 21 марта 619 года и 16 июля 622 года. Заметим, что 620 год является високосным, поэтому количество суток между этими данными равняется

$$366 + 365 + 365 + 10 + 30 + 31 + 30 + 16 = 1213 \text{ суток.}$$

Средняя продолжительность синодического месяца составляет 29.5 сут¹. Исходя из этого, вычислим количество синодических месяцев в 1213 сутках:

$$\frac{1213}{29.5} \approx 41.1.$$

В итоге получаем, что в день, когда пророк Мухаммед переселился в Медину, Луна выглядела как узкий растущий серп — незадолго до этого события произошло новолуние. Отметим, что в исламе именно по этой причине активно используется соответствующая символика.

С.А.Русаков