

**XXXIII Санкт-Петербургская
Астрономическая олимпиада**
теоретический тур, решения

2026
8
февраля

11 класс

1. Определите, во сколько раз изменится видимая угловая площадь Солнца в зените по сравнению со случаем, если бы на Земле не было атмосферы. Увеличится или уменьшится при этом средняя поверхностная яркость диска Солнца? Известно, что для небольших зенитных расстояний z величину рефракции ρ можно определить по формуле $\rho \approx 60'' \operatorname{tg} z$.

Решение:

Безатмосферный угловой радиус Солнца $\rho_{\odot} \approx 15'$. Значит, если центр Солнца находится в зените, то его видимый край наблюдается на зенитном расстоянии $z = \rho_{\odot} - 60'' \operatorname{tg} \rho_{\odot}$, так как атмосферная рефракция «приподнимает» видимые объекты от горизонта к зениту, то есть зенитное расстояние должно уменьшиться. Если записать это же в радианах и считать угловой размер Солнца малым, то:

$$z = \rho_{\odot} - \frac{60 \cdot \rho_{\odot}}{206265} = \rho_{\odot} \left(1 - \frac{60}{206265} \right).$$

Солнце считаем кругом, поэтому изменение Γ угловой площади таково:

$$\Gamma = \frac{\pi z^2}{\pi \rho_{\odot}^2} = \left(1 - \frac{60}{206265} \right)^2 \approx 1 - \frac{120}{206265} \approx 1 - \frac{1.2 \times 10^2}{2 \times 10^5} = 1 - 0.6 \times 10^{-3} = 0.9994.$$

Итак, уменьшение угловой площади составило 0.6% из-за наличия атмосферы. Значит, на такую же величину возрастает поток излучения с одной квадратной минуты изображения Солнца. В звездных величинах это изменение очень мало, причем его достаточно легко оценить, зная, что основание логарифмов, используемое в шкале звездных величин ($\sqrt[5]{100} = 2.512 \dots$), мало отличается от основания натуральных логарифмов ($e \approx 2.718 \dots$). Поэтому

$$2.5 \cdot \lg 0.9994 \approx \ln 0.9994 = \ln(1 - 0.0006) \approx -6 \cdot 10^{-4} \text{ звездной величины.}$$

Еще точнее было бы учесть коэффициент перехода между логарифмами для звездных величин и натуральными логарифмами, но он составляет $\approx 1.086 \dots$ и в данном случае ни на что не повлияет.

Этот эффект должен был бы приводить к увеличению поверхностной яркости, однако он с лихвой перебивается поглощением в зените. Действительно, оно составляет около 0.2^m , а это значит, что каждая квадратная минута изображения Солнца тускнеет на такую же величину.

В.В.Григорьев

2. Как известно, Полярная звезда имеет видимую звездную величину $+2^m$ и годичный параллакс $0''.0075$. С помощью оптического интерферометра проводят наблюдение диска звезды на длине волны, соответствующей максимуму распределения энергии в ее спектре. Оцените минимально необходимую для разрешения диска звезды базу интерферометра.

Решение:

Нужно определить реальные размеры звезды, чтобы затем по угловому размеру диска сделать вывод о необходимой разрешающей способности интерферометра и далее оценить расстояние между антеннами. Сначала оценим светимость звезды по ее абсолютной звездной величине:

$$M = m + 5 - 5 \lg r = m + 5 - 5 \lg \frac{1}{\pi} = 2 + 5 - 5 \lg 133,$$

$$\lg 133 = \lg 100 + \lg 1.33 \approx 2 + \frac{\ln(1 + 0.33)}{\ln 10} \approx 2 + \frac{0.33}{2.3} = 2.1 \Rightarrow M = -3^m.6.$$

Светимость определим, сопоставив звезду с Солнцем:

$$M = M_{\odot} - 2.5 \lg \frac{L}{L_{\odot}} \Rightarrow L = 10^{0.4(M_{\odot} - M)} L_{\odot} = 10^{3.4} L_{\odot} = 2.3 \cdot 10^3 L_{\odot}.$$

Для определения радиуса воспользуемся законом Стефана–Больцмана, также сопоставив Полярную звезду с Солнцем:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4} = \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}} \right)^4.$$

Нужна температура Полярной звезды. Если вспомнить, что звезда выглядит желтоватой (или то, что она является цефеидой, то есть желтым гигантом или сверхгигантом), можно оценить ее температуру как $6 \cdot 10^3$ К, что фактически совпадает с температурой Солнца. Подставляем:

$$2.3 \cdot 10^3 = \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^2 \Rightarrow \frac{R}{R_{\odot}} = \sqrt{2.3 \cdot 10^3} \approx 50.$$

Полярная звезда — сверхгигант, оценка радиуса вполне реалистична. Оценим видимый угловой диаметр Полярной:

$$d = \frac{2R}{r} = \frac{10^2 \cdot 7 \cdot 10^5 \text{ км}}{133 \cdot 3 \cdot 10^{13} \text{ км}} = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ радиан}.$$

Определим, на какой длине волны проводятся наблюдения. Согласно закону смещения Вина, максимум распределения энергии в спектре обратно пропорционален температуре:

$$\lambda_{\max} = \frac{0.003 \text{ м} \cdot \text{К}}{T} = \frac{0.003}{6000} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Допустим, для целей исследования нужно было различить хоть какие-то детали поверхности диска, поэтому предположим, что угловой диаметр Полярной превышал разрешающую способность хотя бы в 5 раз, тогда разрешающая способность должна быть равной $\alpha = 3 \cdot 10^{-9}$ радиан. Значение разрешающей способности связано с базой интерферометра и длиной волны соотношением

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^{-9}} \approx 2 \cdot 10^2 \text{ м}.$$

В самом деле, такого порядка расстояния между телескопами оптического интерферометра CHARA. Более того, изображение диска Полярной действительно удалось получить (<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/ad5e7a/pdf>).

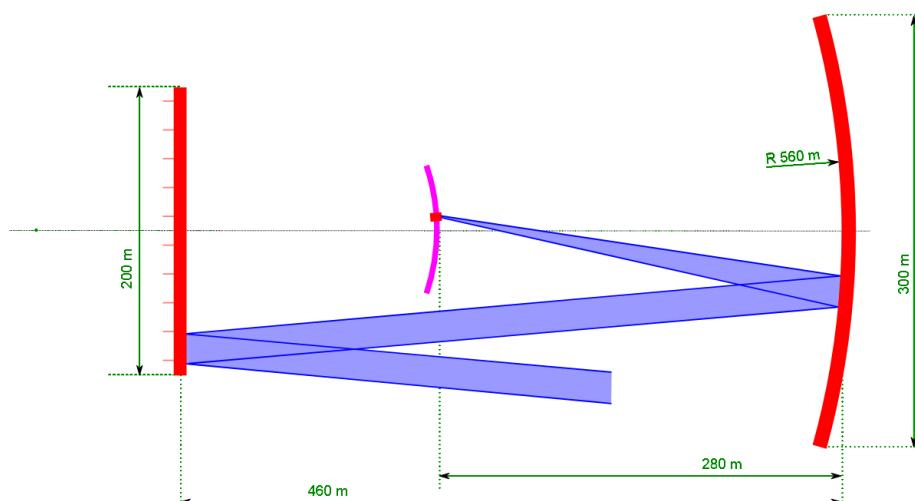
А.В.Веселова

3. Радиотелескоп Нансё (Франция) является меридианным инструментом. Первичное плоское зеркало (оно расположено перпендикулярно поверхности земли, но может наклоняться в зависимости от высоты наблюдаемого объекта), имеющее ширину 200 м, находится на севере, а вторичное сферическое (радиус кривизны 560 м, диаметр — 300 м, высота 35 м) — на юге на расстоянии 460 м от первичного. Приемная аппаратура может перемещаться по фокальной поверхности. Определите длительность наблюдения невиньетированного Солнца в день осеннего равноденствия.

Решение:

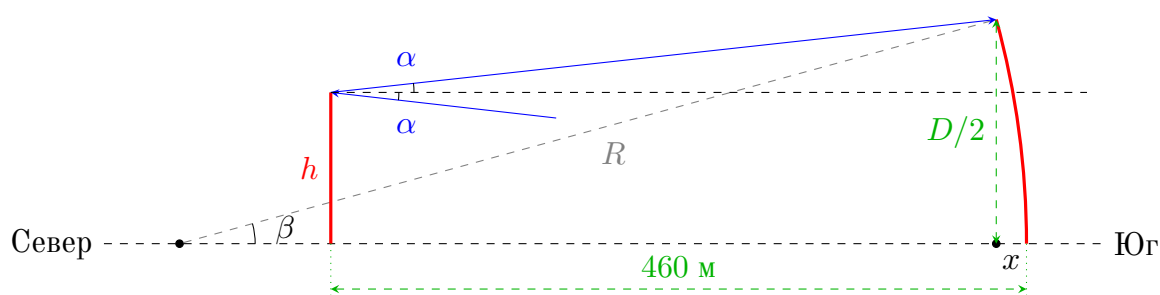
Известно, что фокусное расстояние сферического зеркала составляет половину радиуса кривизны, то есть приемная аппаратура находится в 280 метрах от сферического зеркала. Фокальная поверхность сферического зеркала является сферой такого же радиуса.

Изобразим схему радиотелескопа «сверху». Горизонтальная черная пунктирная линия — меридиан (она же — главная оптическая ось), слева находится север, справа — юг, красным обозначены зеркала, синим — ход радиолучей.



Солнце в день весеннего равноденствия находится на небесном экваторе, поэтому его угловая скорость составляет $\omega_{\odot} = 15^{\circ}/h$. В момент верхней кульминации его радиолучи падают на плоское зеркало, отражаются вдоль меридиана на сферическое зеркало и попадают на приемную аппаратуру. Понятно, что сферическое зеркало не затеняет их, так как Солнце находится достаточно высоко (даже для Петербурга). Далее Солнце движется к западу, а лучи начинают отражаться от плоского зеркала так как показано на схеме выше. Приемная аппаратура при этом вынуждена двигаться на восток.

Откуда берется виньетирование? Из тех соображений, что не весь поток солнечного радиоизлучения попадает в приемную аппаратуру. То есть существует предельный угол α , на который может отойти от меридиана Солнце, чтобы отраженные от плоского зеркала лучи полностью попадали на сферическое зеркало. Понятно, что западная часть плоского зеркала будет отражать радиоизлучение на сферическое зеркало, а вот восточная как раз в некоторый момент отразит свет мимо. Как найти этот предельный угол α ? Нарисуем ту же схему, но с углами:



Угол $\beta = \frac{D}{2R} \approx 15^\circ$, тогда $x = R(1 - \cos \beta) = 560(1 - \cos 15^\circ) \approx 19$ метров. Из рисунка понятно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D/2 - h}{460 - x} = \frac{50}{441} \Rightarrow \alpha \approx 6^\circ.5.$$

Значит, весь путь Солнца на небе в ходе наблюдения составляет в два раза больше: 13° . Учет углового диаметра Солнца $0^\circ.5$ уменьшает эту оценку до 12° , что дает длительность наблюдения, равную 48 минутам.

В.В.Григорьев

4. Космический телескоп James Webb Space Telescope имеет две стороны — «горячую» с температурой 360 К и «холодную» с температурой 40 К, разделенные плоским защитным экраном с размерами 21.1×14.6 м. Оцените дополнительное ускорение, которое приобретает телескоп из-за наличия этого экрана.

Решение:

Отметим сразу же, что экран нужен для того, чтобы закрыть «холодную» часть от излучения Солнца (а заодно Земли и Луны). Соответственно, одним из возможных источников дополнительного ускорения может быть давление излучения этих объектов на экран, ускорение при этом будет направлено в сторону от Солнца (и от Земли с Луной — все три объекта находятся с одной стороны от телескопа).

Второй возможный вариант — реактивный эффект, связанный с тем, что поверхность экрана сама испускает тепловое излучение, причем «горячая» сторона светится существенно интенсивнее, чем «холодная», что приводит к появлению ускорения, также направленного от Солнца.

Сначала исключим «лишние» детали: нас интересует оценка, поэтому если среди возможных эффектов есть один, существенно больший остальных, то рассмотрением дополнительных поправок можно не заниматься.

Телескоп находится в точке Лагранжа L_2 системы «Солнце–Земля», это примерно 1.5 миллиона км от Земли. Как следствие, можно считать, что расстояние от него до Земли и до Луны примерно одинаково. Поскольку Земля и Луна имеют примерно одну и ту же температуру, то соотношение сил давления их излучения будет определяться соотношением их видимых с телескопа площадей. Земля примерно в 4 раза больше Луны по радиусу, площадь будет больше в 16 раз, следовательно, на фоне Земли световым давлением от Луны можно пренебречь.

Солнце находится от JWST примерно в 100 раз дальше, чем Земля, но при этом имеет радиус также примерно в 100 раз больше. Поэтому угловые размеры Солнца и Земли при наблюдении с JWST будут примерно одинаковыми, и разница в величине светового давления будет определяться эффективной температурой источника излучения, возведенной в четвертую степень. Температура Солнца больше температуры Земли в 20 раз, $20^4 = 1.6 \cdot 10^5$, и это означает, что при подсчете светового давления от излучении чего-либо, кроме Солнца, мы можем совершенно спокойно забыть.

По аналогичной причине при подсчете реактивного эффекта можно пренебречь излучением «холодной» стороны: тот же закон Стефана-Больцмана означает, что излучательные способности «горячей» и «холодной» сторон отличаются в $(360/40)^4 \approx 7 \cdot 10^3$ раз, так что это незначимая для оценки поправка.

Теперь займемся более детальными подсчетами. Поскольку импульс фотона $p = \varepsilon/c$, где ε — энергия фотона, c — скорость света, то световое давление P , создаваемое при освещенности E на поверхности, перпендикулярной направлению распространения излучения, равно

$$P = \frac{E}{c} (1 + \alpha),$$

где α — альбедо (отражательная способность) поверхности. Из соображений получения оценочного ответа будем считать, что $\alpha = 0$ — это изменит итоговый результат не более чем в 2 раза.

Таким образом, сила светового давления от Солнца, находящегося на расстоянии a от экрана площадью S , будет равна

$$F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a^2} \cdot \frac{S}{c},$$

где $L_{\odot}$ — светимость Солнца. Сразу же вычислим полученное значение, подставляя данные в СИ и ограничившись точностью с одной значащей цифрой:

$$F_{\odot} = \frac{4 \cdot 10^{26}}{4 \cdot 3 \cdot (1.5 \cdot 10^{11})^2} \cdot \frac{20 \times 15}{3 \cdot 10^8} \sim 10^{-3} \text{ Н.}$$

Теперь займемся оценкой реактивного эффекта. Излучаемые экраном фотоны уходят от него не только перпендикулярно, но для простой оценки будем считать, что все испущенное тепловое излучение направлено в одну сторону — к Солнцу (а возникающая сила тяги, соответственно, в противоположном направлении).

Единица площади поверхности экрана испускает за единицу времени энергию σT^4 (тут σ — постоянная Стефана-Больцмана, а T — температура экрана), поэтому реактивная сила будет равна

$$F_p = \frac{\sigma T^4 \cdot S}{c},$$

и вычисляя значение (опять используя все данные в СИ), получаем

$$F_p = \frac{6 \cdot 10^{-8} \cdot 360^4 \cdot 20 \times 15}{3 \cdot 10^8} \approx 10^{-3} \text{ Н,}$$

получившийся эффект оказывается того же порядка, что и предыдущий.

Фактически первое значение несколько больше второго: в первом случае мы пренебрегли тем, что экран может отражать часть излучения (и тем самым немного занизили оценку), во втором — тем, что излучение уходит от экрана в полусферу, а не строго перпендикулярно (и тем самым завысили оценку). Но порядок итогового результата все равно останется тем же самым: на экран будет действовать нескомпенсированная сила порядка 10^{-3} Н.

Осталось понять, как по ней найти ускорение. Для этого необходимо знать массу телескопа, помнить которую затруднительно, но ситуацию спасает то, что она тоже нужна лишь с порядковой точностью. Тогда можно рассуждать следующим образом.

JWST — большой телескоп и, соответственно, до перевода в точку L_2 — «большой спутник», к каковым традиционно относятся аппараты с массой более 1 тонны. Наверное, он все же существенно более тяжелый, поскольку его выведение в космос было сравнительно сложной задачей. С другой стороны, самая большая полезная нагрузка, которую человечество в принципе умело выводить в космос не по частям, имела массу около 100 тонн. Возьмем «среднее геометрическое» (оно же среднее арифметическое для порядков) и примем, что масса JWST составляет около 10 тонн (заметим, что мы при этом не так уж сильно ошибемся, в реальности это 6 тонн).

Тогда итоговое ускорение

$$w = \frac{F}{m} \sim \frac{10^{-3}}{10^4} = 10^{-7} \text{ м/с}^2.$$

П.А.Тараканов

5. Рассмотрим процесс стационарного падения водородной плазмы на полюса нейтронной звезды. Падающее вещество состоит из электронов, которые могут двигаться только вдоль силовых линий магнитного поля, и обычного протонного газа. Будем считать, что плазма движется в состоянии свободного падения вдоль силовых линий в узком цилиндре постоянного сечения, перпендикулярном поверхности нейтронной звезды у полюса, а температура электронов и протонов, находящихся на одинаковой высоте от поверхности звезды, одинакова. Найдите отношение температуры плазмы на высоте, равном одному радиусу нейтронной звезды, к температуре на поверхности. Можно считать, что плазма в ходе движения не излучает и не взаимодействует с окружающей средой, то есть падение происходит в адиабатическом режиме.

Решение:

Так как сказано, что плазма движется в адиабатическом режиме, значит, можно применить следующее соотношение: $T\rho^{(1-\gamma)} = \text{const}$, где γ — показатель адиабаты. Газ представляет собой смесь одномерного электронного и трехмерного протонного в равных пропорциях. Известно, что для идеального газа показатель адиабаты равен $1 + \frac{2}{i}$, где i — среднее число степеней свободы, приходящееся на одну частицу. Концентрации протонов и электронов равны, так что $i = 2$, и для смеси одномерного электронного и трехмерного протонного газов $\gamma = 1 + \frac{2}{2} = 2$. Тогда

$$T\rho^{-1} = \text{const} \iff \frac{T}{T_0} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Рассмотрим выделенное поперечное сечение аккреционного канала. Коль скоро аккреция стационарна, то верно: $\rho = \frac{\dot{M}}{vS}$, где $\dot{M}$ — темп аккреции, v — скорость плазмы в данном сечении, а S — его площадь. Из условия площадь постоянна, темп аккреции — это константа задачи, поэтому: $\rho \propto \frac{1}{v}$. Тогда,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{v_0}{v} = \sqrt{\frac{r}{r_0}},$$

где r — расстояние до центра звезды, а последний переход следует из условия свободного падения плазмы. Поскольку расстояние до центра звезды на высоте, равной ее радиусу, в два раза больше аналогичного на ее поверхности, итоговый ответ: $\sqrt{2}$.

Более подробное доказательство того, что показатель адиабаты смеси газов равен $\gamma = 2$.

Выражение для показателя адиабаты идеального газа может быть получено из первого начала термодинамики, записанного в дифференциальной форме:

$$0 = \delta A + dU = pdV + \frac{i+2}{2}d(pV) = \frac{i+2}{2}pdV + \frac{i}{2}Vdp = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{i+2}{2}}_{\gamma}pdV = -Vdp. \quad (1)$$

Следовательно, нам нужно предъявить выражение такого же вида для случая смеси двух газов. Заметим, что, так как плазма водородная, то концентрация электронов должна быть равна концентрации протонов. То, что плазма полностью ионизована, можно понять, исходя из того, что компактные релятивистские объекты с аккрецией светят в рентгеновском диапазоне, то есть характерные энергии в них составляют несколько кэВ, что много больше значения энергии связи электрона на первом уровне с ядром, которая равна 13.6 эВ.

Далее, так как по условию температуры электронов и ионов равны (в реальности это не гарантировано, более того, достигается далеко не всегда), то, исходя из равенства концентраций, парциальные давления электронов и протонов также равны. Обозначим одно такое парциальное давление p . Тогда суммарное давление равно $p_{\text{tot}} = p + p = 2p$. Чтобы записать первое начало термодинамики, нам осталось понять, сколько степеней свободы есть у каждого газа. Протоны являются классическим одночастичным газом, поэтому число степеней свободы для них равно $i_p = 3$. Электроны, как сказано в условии, участвуют только в одномерном движении. Этот эффект связан с наличием у нейтронной звезды сверхсильного магнитного поля. Исходя из одномерности движения, число электронных степеней свободы

равно $i_e = 1$. Запишем теперь первое начало термодинамики в дифференциальной форме для электрон-протонной плазмы, адиабатически падающей на полюса нейтронной звезды:

$$0 = 2pdV + \frac{i_e}{2}(pdV + Vdp) + \frac{i_p}{2}(pdV + Vdp) \implies \frac{(i_e + i_p)/2 + 2}{(i_e + i_p)/2}pdV = -Vdp, \quad (2)$$

откуда мы видим, что эффективный показатель адиабаты γ_{eff} в данной задаче равен 2.

И.Д.Маркозов