

**XXXIII Санкт-Петербургская
Астрономическая олимпиада**
теоретический тур, решения

2026
8
февраля

10 класс

1. Эффективная температура звезды Главной последовательности равна $12 \cdot 10^3$ К. Оцените отношение средней плотности этой звезды к средней плотности Солнца.

Решение:

Для звезд Главной последовательности существуют степенные аппроксимации зависимостей между светимостями L , массами $\mathfrak{M}$ и радиусами R . Пусть в интересующем нас случае они имеют вид

$$\begin{cases} L \propto \mathfrak{M}^\alpha \\ L \propto R^\beta \end{cases}$$

Кроме этого, мы знаем соотношение между светимостью, радиусом и эффективной температурой T :

$$L \propto R^2 T^4,$$

а интересует нас средняя плотность $\rho \propto \mathfrak{M} \cdot R^{-3}$.

Соотношения для звезд Главной последовательности позволяют сделать вывод, что $\mathfrak{M} \propto R^{\beta/\alpha}$, поэтому средняя плотность зависит от радиуса как

$$\rho \propto \mathfrak{M} \cdot R^{-3} \propto R^{\frac{\beta}{\alpha}-3}.$$

Из соотношения между светимостью и радиусом получаем, что

$$R^\beta \propto R^2 T^4,$$

откуда $R \propto T^{\frac{4}{\beta-2}}$. Таким образом, средняя плотность зависит от эффективной температуры как

$$\rho \propto T^{(\frac{\beta}{\alpha}-3) \cdot \frac{4}{\beta-2}} = T^{\frac{4(\beta-3\alpha)}{\alpha(\beta-2)}}.$$

Теперь определимся с показателями степени. Эффективная температура не очень велика, соответственно, и масса звезды должна быть умеренной (для сравнения можно вспомнить, например, Сириус А, эффективная температура которого равна $10 \cdot 10^3$ К, а масса — около $2.5 \mathfrak{M}_\odot$). Поэтому можно воспользоваться приближенными соотношениями между светимостями L , массами $\mathfrak{M}$ и радиусами R звезд Главной последовательности для случая масс, близких к солнечным, а тогда $\alpha \approx 4$, $\beta \approx 5$.

Осталось вычислить ответ. Поскольку эффективная температура интересующей нас звезды в 2 раза больше эффективной температуры Солнца, то ее средняя плотность будет относиться к средней плотности Солнца как

$$\frac{\rho}{\rho_\odot} = 2^{\frac{4(5-3 \cdot 4)}{4(5-2)}} = \frac{1}{2^{7/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{128}} \approx \frac{1}{5} = 0.2.$$

П.А.Тараканов

2. Кубсат пересылает RGB-изображение размером 4096×4096 пикселей без сжатия (каждый пиксель кодируется 3 байтами, по 1 байту на цветовой канал) со скоростью 120 Мбит/с. Радиосвязь работает в диапазоне частот $7 \div 11$ ГГц, приемной аппаратурой является стационарная параболическая антенна диаметром 1.6 метра. Требуется ли поворачивать антенну вслед за спутником в процессе передачи одного изображения?

Решение:

На передачу данных требуется некоторое время, за которое спутник может успеть заметно сместиться по орбите и выйти за пределы диаграммы направленности приемной антенны.

Сначала вычислим объем изображения, памятуя, что в одном байте $2^3 = 8$ бит, а $1024 = 2^{10}$:

$$4096 \times 4096 \text{ пикселей} \times 3 \text{ байта/пиксель} = (4 \times 2^{10})^2 \times 3 = 3 \times 2^{24} \text{ байт} = 3 \times 2^{27} \text{ бит.}$$

Такой объем информации передается со скоростью 120 Мбит/с за время

$$t = \frac{3 \times 2^{27} \text{ бит}}{120 \times 2^{20} \text{ бит/с}} = \frac{2^{2+5}}{40} = \frac{32}{10} = 3.2 \text{ секунды.}$$

Спутник движется с первой космической скоростью вокруг Земли (7.9 км/с), значит, за 3.2 секунды он пройдет расстояние около 25 км. Кубсаты обычно запускают на небольшую высоту, вроде высоты орбиты МКС (400 км), но мы оценим ее как 200 км для усложнения работы антенне. Тогда с точки зрения антенны кубсат пройдет максимально возможный угол на небе, равный $25/200 = 1/8 = 0.125$ радиана.

Оценим ширину диаграммы направленности антенны θ , она же — дифракционный предел. Длина волны λ вычисляется через скорость света c и частоту ν :

$$\theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{c}{\nu D} = \frac{3 \times 10^8 \text{ м/с}}{[7 - 10.7] \times 10^9 \text{ Гц} \cdot 1.6 \text{ м}} = [0.017; 0.027] \text{ радиан}$$

Итак, диаграмма направленности антенны на крайних частотах в несколько раз меньше, чем угол, который пройдет кубсат. Значит, антенне необходимо вести спутник, чтобы гарантированно принять изображение. Если расположить кубсат «повыше», то это еще уменьшит область перекрытия диаграммы направленности и траектории спутника, но итогового ответа не изменит.

В.В.Григорьев

3. Массы компонент наблюдаемой с Земли двойной звезды равны $3 \mathcal{M}_{\odot}$ и $5 \mathcal{M}_{\odot}$, орбитальный период системы равен 8 земным годам. Известно, что максимальное угловое расстояние между компонентами на небе составляет $4''$. На каком расстоянии от Солнца может находиться эта двойная звезда? Каким может быть максимальное значение видимой звездной величины системы?

Решение:

Запишем III закон Кеплера, используя систему единиц «масса Солнца — астрономическая единица — год», обозначив орбитальный период P , большую полуось системы a и массы компонент M_1 и M_2 :

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{M_1 + M_2}.$$

Отсюда вычисляется большая полуось системы в астрономических единицах: $a = \sqrt[3]{P^2 (M_1 + M_2)} = 8 \text{ а.е.}$

Известно, что большая полуось системы — это *среднее* расстояние между компонентами. Если орбиты круговые, то оно совпадает с максимальным, но при сильно вытянутых орбитах максимальное расстояние может превышать среднее (максимум в 2 раза). Кроме этого, мы наблюдаем систему с некоторого произвольного направления, поэтому отрезок наибольшей

длины, соединяющий компоненты, может не лежать в картинной плоскости (и даже быть ей перпендикулярен).

Таким образом, проекция этого отрезка на картинную плоскость может меняться в пределах от $2a$ практически до 0. Очевидно, что достижение нижней границы соответствует тому, что двойная звезда находится совсем рядом с Солнцем (что нереально), а верхняя граница позволяет оценить максимально возможное расстояние от двойной звезды до Солнца. Поскольку $2a = 16$ а.е., то под углом $4''$ такой отрезок будет виден с расстояния $16/4 = 4$ пк.

Теперь определимся с тем, какими могут быть компоненты этой двойной, учитывая, что нас интересует еще и максимальное значение видимой звездной величины (т.е. минимально возможный блеск) системы.

Если обе звезды являются звездами Главной последовательности, то сделанная выше оценка корректна: радиусы звезд в этом случае существенно меньше даже 0.1 а.е., поэтому с той точностью, с которой мы можем получить оценку максимального расстояния между звездами, ее действительно можно принять равной $2a$.

Заметим также, что ни одна из звезд не может быть красным гигантом: это увеличит минимальное расстояние, на которое могут сблизиться звезды, и, как следствие, уменьшит максимальное расстояние между ними (а тем самым и максимально возможное расстояние до системы). Красные гиганты ярче звезд Главной последовательности (при той же массе), расстояние до системы меньше, поэтому минимальную оценку блеска мы тем самым тоже не получим.

Обе компоненты не могут быть белыми карликами или нейтронными звездами: их масса больше и предела Оппенгеймера-Волкова, и тем более предела Чандрасекара. Сразу обе они не могут быть и черными дырами — такую систему нельзя было бы наблюдать. Но вот ситуация, при которой черной дырой является одна из компонент, принципиально возможна. Поскольку нам надо минимизировать блеск системы, делаем вывод: расстояние должно быть максимальным (и равным 4 пк), черной дырой должна быть более массивная компонента (в этом случае блеск системы минимален).

Воспользовавшись соотношением между светимостью и массой звезд Главной последовательности (см. решение задачи № 1), получим, что минимальная светимость системы — $3^4 \approx 80$ светимостей Солнца. Можно «честно» посчитать соответствующую абсолютную звездную величину, но можно также вспомнить, что изменение светимости в 100 раз соответствует изменению абсолютной звездной величины на 5^m , а разность звездных величин 4^m будет соответствовать отношению светимостей примерно в 2.5 раза меньше, т.е. около 40. В интересующем нас случае разность звездных величин должна получаться примерно $4^m.7 \div 4^m.8$, откуда можно сделать вывод, что абсолютная звездная величина системы с хорошей точностью должна равняться $M = 0^m$ (аккуратный счет при наличии калькулятора даст результат $-0^m.05$, так что получившаяся оценка вполне работоспособна).

Осталось воспользоваться соотношением между абсолютной звездной величиной, видимой звездной величиной m и расстоянием в парсеках r , подставив в него максимально возможное расстояние:

$$m = M + 5 \lg r - 5 = 0 + 5 \lg 4 - 5 = 5 \cdot 2 \lg 2 - 5 = 10 \cdot 0.3 - 5 = -2^m.$$

Можно также заметить (особенно если примерное значение $\lg 2 \approx 0.3$ неизвестно), что расстояние 4 пк в 2.5 раза меньше используемого для определения абсолютной звездной величины 10 пк. Поскольку освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния, видимая звездная величина системы должна быть на 2^m меньше абсолютной, что мы и получили.

Как несложно заметить, в реальности такой системы не существует: в близких окрестностях Солнца нет настолько массивных звезд.

П.А.Тараканов

4. В нашей Галактике есть 8 шаровых звездных скоплений ярче $+6^m$. Их номера в каталоге NGC (Новом Общем каталоге) — 5139, 104, 6656, 6752, 6121, 5904, 6397, 6205 (напомним, что в этом каталоге всего 7840 объектов). Видно, что 7 из 8 объектов имеют номера в диапазоне от 5000 до 7000. Простое ли это совпадение? Почему?

Решение:

Для начала полезно вспомнить (хотя можно и догадаться, даже не зная этот факт), по какому принципу пронумерованы объекты в Новом общем каталоге — номера присваивались в порядке возрастания их прямого восхождения. Для грубой прикидки можно оценить, что объекты распределены по прямому восхождению равномерно — и тогда диапазон номеров от 5000 до 7000 будет соответствовать приблизительно четверти небосвода, в области прямых восхождений от 15^h до 21^h .

В чем может быть причина того, что шаровые скопления сконцентрированы в этой части неба? В нашей Галактике эти объекты (и не только самые яркие из них) сильно сосредоточены к ее центру и распределены относительно симметрично вокруг него. В экваториальных же координатах центр Галактики находится недалеко от точки зимнего солнцестояния, на прямом восхождении около 18^h , и из-за концентрации к центру Галактики прямые восхождения шаровых скоплений должны быть близки к этому же значению. Таким образом, номера шаровых скоплений в каталоге NGC отражают пространственное распределение этих объектов в Галактике, случайным совпадением это не является.

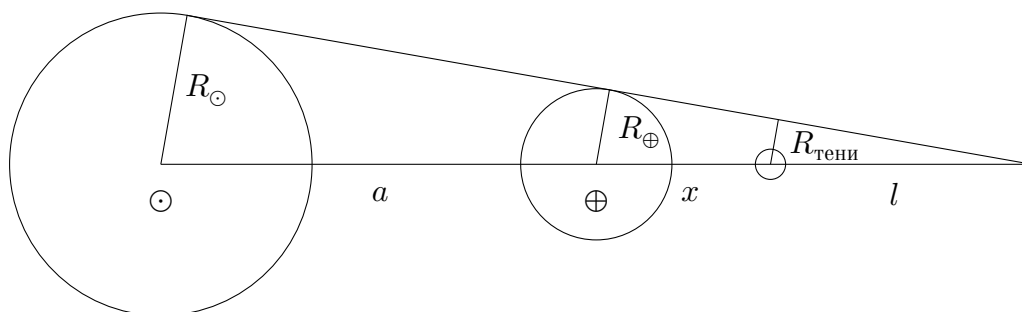
И.В. Чугунов

5. Юный астроном Вася, проживающий в городе Сочи (широта $\varphi = 43^\circ 35'$, долгота $39^\circ 43'$), вышел ночью на улицу, чтобы наблюдать необычное явление — полное лунное затмение. Также Вася помнил, что этой же ночью Юпитер будет находиться в квадратуре. Посмотрев на горизонт, Вася отыскал Юпитер, находившийся в тот момент в созвездии Девы и только что взошедший. Найдите максимально возможную высоту центра Луны во время затмения в том месте, где его наблюдал Вася.

Решение:

Юпитер находится в квадратуре, значит угол между линией «Солнце–Земля» и «Земля–Юпитер» равен 90° . При этом, Юпитер восходит над горизонтом, значит, квадратура западная, а это означает, что Солнце четверть года назад находилось в той же точке, где сейчас Юпитер. Он располагается в созвездии Девы, где находится точка осеннего равноденствия. Следовательно, действие задачи, происходит в окрестностях зимнего солнцестояния, где склонение Солнца минимально. Коль скоро в эту ночь случилось полное лунное затмение, то Луна находится вблизи противоположной к Солнцу точки эклиптики.

Далее будем рассуждать следующим образом. Нас просят найти максимально возможную высоту центра Луны над горизонтом. Точка наибольшей высоты в течение суток — верхняя кульминация, высота в ней равна $h = 90^\circ - \varphi + \delta$, где δ — склонение центра Луны. При этом, так как происходит затмение и Луна находится напротив Солнца относительно Земли, а склонение Солнца находится в окрестностях минимального, то склонение Луны лежит в окрестности максимального, если пренебрегать наклоном к эклиптике. По условию задачи Юпитер находится в Деве, в которой расположена точка осеннего равноденствия. Таким образом, условием задачи не запрещена ситуация, когда Юпитер попадает ровно в эту точку. Тогда его восход соответствует истинной солнечной полночи, в которой как раз и реализуется ситуация верхней кульминации Луны при максимально возможном склонении. Тут можно было бы написать, что ответ получается, если подставить максимально возможное склонение Луны в течение года, которое равно $23^\circ 26' + 5^\circ 09'$, но будем аккуратны. Вспомним, что происходит полное лунное затмение, то есть разница склонения Луны и $23^\circ 26'$ ограничена, вообще говоря, радиусом земной тени.



Найдем радиус тени Земли на орбите Луны. Из рисунка (не в масштабе) видно, что на расстоянии x от Земли

$$\frac{R_{\text{тени}}(x)}{l} = \frac{R_{\oplus}}{x+l} = \frac{R_{\odot}}{x+l+a},$$

где $R_{\oplus}$ — радиус Земли, $R_{\odot}$ — радиус Солнца, а a — большая полуось земной орбиты,

Так как очевидно, что $x+l \ll a$, то можно считать, что

$$\frac{R_{\odot}}{x+l+a} \approx \frac{R_{\odot}}{a} = \sin \theta_{\odot} \approx \theta_{\odot},$$

где $\theta_{\odot}$ — угловой радиус Солнца с Земли в радианах (этот угол мал).

Путом несложных преобразований получаем

$$R_{\text{тени}}(x) = R_{\oplus} - x\theta_{\odot}.$$

С расстояния, равного радиусу орбиты Луны r , угловой радиус тени (тоже малый угол) для земного наблюдателя в радианах будет равен

$$\theta_{\text{тени}} \approx \frac{R_{\text{тени}}(r)}{r} = \frac{R_{\oplus} - r\theta_{\odot}}{r} = \frac{R_{\oplus}}{r} - \theta_{\odot}.$$

Известно, что Земля примерно в 4 раза больше Луны по размеру, а Солнце при наблюдении с Земли практически одного углового размера с Луной, поэтому грубо угловой радиус тени будет равен 3 угловым радиусам Луны (если помнить радиусы Земли и Луны или их соотношение более точно, то можно получить, что угловой радиус земной тени будет равен примерно 2.7 углового радиуса Луны).

Угловой размер тени Земли максимален в точке перигея орбиты Луны. При этом угловой радиус Луны там составляет $\theta \approx 17'$. Тогда максимальное склонение центра Луны равно $\delta = 23^{\circ}26' + 3 \cdot \theta - \theta = 23^{\circ}26' + 2 \cdot 17' = 24^{\circ}$.

Теперь вычисляем высоту в кульминации: $h = 90^{\circ} - \varphi + \delta = 90^{\circ} - 43^{\circ}35' + 24^{\circ} \approx 70^{\circ}.5$.

Осталось сделать последний шаг. На высоту Луны в затмении будет влиять также суточный параллакс. Как известно, горизонтальный экваториальный суточный параллакс Луны равен примерно 1° , на зенитном расстоянии около $z = 20^{\circ}$ это значение нужно будет умножить на $\sin z$, то есть примерно на 0.3, а на широте φ — еще и на $\cos \varphi \approx 0.7$. Тем самым итоговый результат составит $70^{\circ}.7 \approx 71^{\circ}$.

И.Д.Маркозов