

## Подборен кръг за IOAAjr 2026

Теоретичен тур, 5 юли 2026 г.

*Време за работа: 5 часа*

### Решения

**Задача 1. Пътувай из Космоса с... Филип.** Филип е решил да пътува не само из България, но също и ... около Земята! Един ден, той и неговият добър приятел Александър Кирилов построили своя собствена космическа станция, която се движи по елиптична орбита около нашата планета. Филип и Сашо решили да измерват видимия ъглов размер на Земята. Оказало се, че максималната и минималната стойност на този ъглов размер са съответно  $45^\circ$  и  $20^\circ$ . Намерете:

**А)** Голямата полуос на орбитата на станцията; [2т.]

**Б)** Орбиталния период на космическата станция; [2т.]

**В)** Ексцентрицитетът на орбитата; [2т.]

**Г)** За колко време станцията изгрява (пресича математическия хоризонт) за наблюдател на екватора, в момент, в който тя е в апогей, ако нейният линеен размер е 100 m и орбитата ѝ лежи в равнината на екватора? [3т.]

Филип решил, че иска освен Земята да изследва и други планети. Двамата с Александър заминали към една от планетите в Слънчевата система и със своята космическа станция започнали да се движат в елиптична орбита около нея. След няколко дни в орбита, Александър докладва на Филип, че минималният и максималният видим ъглов размер на тази планета, при наблюдение от станцията им отново са  $45^\circ$  и  $20^\circ$ . Интервалът от време между два момента, в които видимият ъглов размер е минимален и максимален е  $T = 15$  h. Филип се досетил, че използвайки тези данни той може да пресметне средната плътност на планетата:

**Д)** Пресметнете възможните стойности на тази плътност и вие. [6т.]

#### Справочни данни:

Гравитационна константа:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$

Маса на Земята:  $M_E = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$

Радиус на Земята:  $R_E = 6378 \text{ km}$

### Решение:

**А)** Нека да въведем следните означения:

$r_A$  – разстояние между станцията и центъра на Земята в апогей

$r_P$  – разстояние между станцията и центъра на Земята в перигей

$e$  – ексцентрицитет на орбитата на станцията

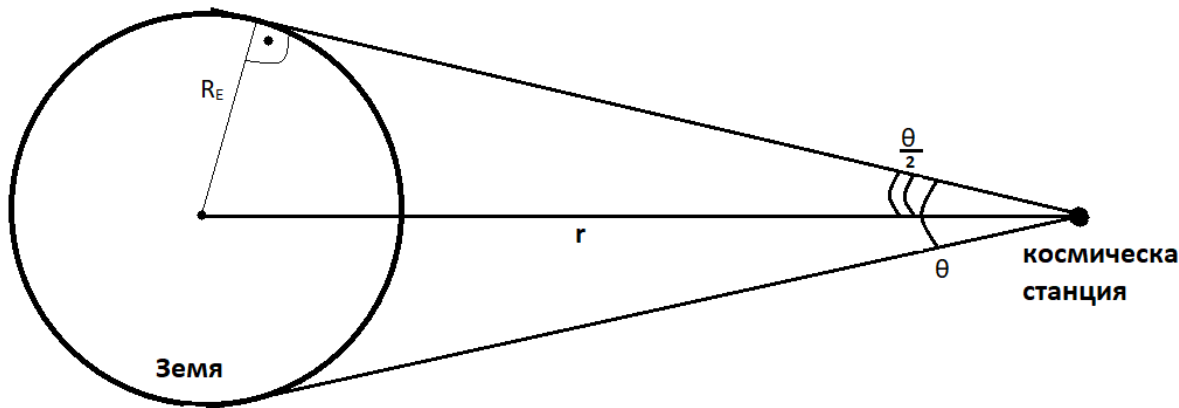
$a$  – голяма полуос на орбитата на станцията

$\theta_{\text{MAX}}$  - видим ъглов размер на Земята, за наблюдател на космическата станция, когато тя се намира в перигея на своята орбита

$\theta_{\text{MIN}}$  - видим ъглов размер на Земята, за наблюдател на космическата станция, когато тя се намира в апогея на своята орбита

$d$  – размера на космическата станция

Тъй като дадените ъгли не могат да бъдат приети за малки, трябва да използваме тригонометрия, за да намерим перигейното и апогейното разстояние.



Изхождайки от горния чертеж, можем да запишем следните равенства:

$$\sin\left(\frac{\theta_{\text{MAX}}}{2}\right) = \frac{R_E}{r_P} \text{ и } \sin\left(\frac{\theta_{\text{MIN}}}{2}\right) = \frac{R_E}{r_A}$$

Следователно:

$$r_P = \frac{R_E}{\sin\left(\frac{\theta_{\text{MAX}}}{2}\right)} \approx 16\,667 \text{ km}$$

$$r_A = \frac{R_E}{\sin\left(\frac{\theta_{\text{MIN}}}{2}\right)} \approx 36\,730 \text{ km}$$

В сила са следните равенства:

$$r_A = a(1 + e) \text{ и } r_P = a(1 - e)$$

От тук получаваме че:

$$a = \frac{r_A + r_P}{2} \approx 26\,700 \text{ km}$$

Б) Съгласно III закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM_E}{4\pi^2}$$

За търсения период можем да запишем:

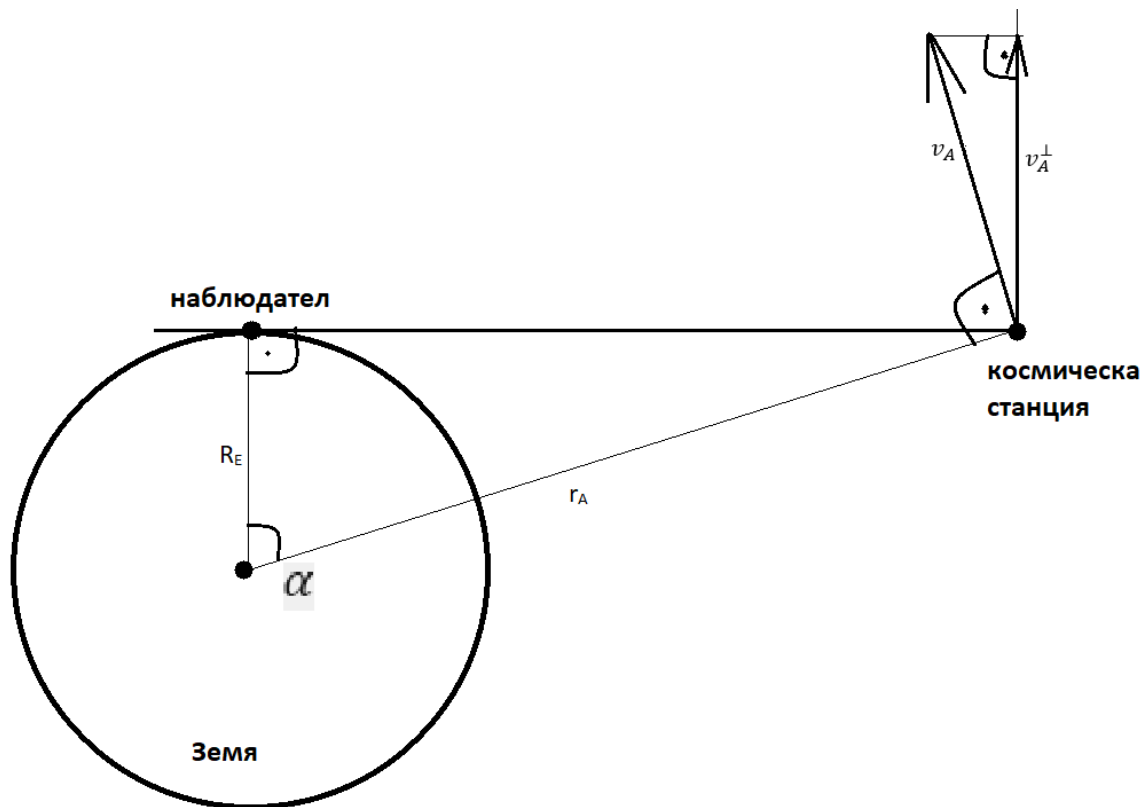
$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_E}} \approx 722 \text{ min}$$

В) Използвайки, че:  $r_A = a(1 + e)$ , получаваме:

$$e = \frac{r_A}{a} - 1 \approx 0,38$$

Г) Когато станцията се намира в апогей, нейната линейна скорост е:

$$v_A = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \sqrt{\frac{GM_E}{a}} \approx 2\,608 \text{ m/s}$$



От чертежа се вижда, че перпендикулярната спрямо лъча на зрение компонента на тази скорост е:

$$v_A^\perp = v_A \sin(\alpha)$$

От друга страна:

$$\cos(\alpha) = \frac{R_E}{r_A}$$

Съгласно Питагоровата теорема:

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \left(\frac{R_E}{r_A}\right)^2}$$

Замествайки в израза за  $v_A^\perp$  получаваме:

$$v_A^\perp = v_A \sqrt{1 - \left(\frac{R_E}{r_A}\right)^2} \approx 2568 \text{ m/s}$$

Тъй като наблюдателят се намира на екватора, а същевременно и орбитата на космическата станция е в екваториалната равнина на Земята, то тя изгрява перпендикулярно спрямо хоризонта. Това означава, че продължителността на нейния изгрев е равна на интервала от време, за който станцията изминава един свой диаметър, от гледната точка на наблюдателя. Следователно, търсената продължителност е:

$$t = \frac{d}{v_A^\perp} \approx 0.039 \text{ s}$$

*Тъй като космическата станция се намира на математическия хоризонт за наблюдателя, няма нужда да отчитаме въртенето на Земята около нейната ос.*

Скоростта, която наблюдателят има спрямо оста на Земята, в този момент, е ориентирана изцяло по правата, която минава през него и станцията и не влияе на компонентата на скоростта, която е перпендикулярна на лъча на зрение.

Д) Използвайки, че:

$$r_P = \frac{R_E}{\sin\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right)}$$

$$r_A = \frac{R_E}{\sin\left(\frac{\theta_{MIN}}{2}\right)}$$

а също и:

$$a = \frac{r_A + r_P}{2}$$

за голямата полуос на орбитата можем да запишем:

$$a = \frac{R_E}{2} \frac{\sin\left(\frac{\theta_{MIN}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_{MIN}}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right)}$$

Нека положим:  $X = \frac{\sin\left(\frac{\theta_{MIN}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta_{MIN}}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{MAX}}{2}\right)}$ , т.е.

$$a = XR_E$$

Можем да пресметнем, че  $X \approx 4,19$ .

Ако орбиталният период на космическата станция е  $P$ , то съгласно III закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM_E}{4\pi^2}$$

Също, така ако  $\rho$  е търсената плътност, то:

$$M_E = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

Замествайки изразите за масата и за голямата полуос в третия закон на Кеплер се получава:

$$\frac{(XR)^3}{P^2} = \frac{\frac{4}{3}G\pi\rho R^3}{4\pi^2}$$

След съкращаване на радиуса на планетата:

$$\rho = \frac{3\pi X^3}{GP^2}$$

Следващата стъпка от решението се състои в това да покажем, че сме прочели внимателно условието и сме го разбрали ☺.

Казано е, че даденото време е интервалът между два момента, в които планетата има максимален и минимален видим ъглов размер за наблюдател на станцията. Но никъде не е споменато, че това са два последователни такива момента ☺. Това означава, че  $T$  е равно на нечетен брой орбитални полупериоди на космическата станция. В общ вид това се записва така:

$$T = \left(N + \frac{1}{2}\right) P$$

Където  $N = 0, 1, 2, \dots$  е естествено число.

От това следва, че възможните стойности за плътността на планетата са толкова, колкото са възможните стойности за числото  $N$ , т.е. безкрайно много. От друга страна, ние знаем, че това е планета и нейната плътност се очаква да бъде в някакви граници.

Изразявайки периода  $P$  от общата формула за  $T$  и замествайки го в израза за плътността:

$$\rho = \frac{3\pi X^3}{G\left(\frac{T}{N + \frac{1}{2}}\right)^2}$$

За първите няколко стойности на  $N$ , получаваме:

$$N = 0: \rho \approx 890 \text{ kg/m}^3$$

$$N = 1: \rho \approx 8000 \text{ kg/m}^3$$

$$N = 2: \rho \approx 22\,200 \text{ kg/m}^3$$

Разумните стойности за плътността са първите две. Следващите са прекалено високи за планета, която е изградена от скали.

Ако  $N = 0$ , т.е. даденият интервал от време е половината от орбиталния период, то планетата има средна плътност близка до тази на скалиста планета с размера на Марс. За  $N = 1$  се получава плътност сходна с тази на желязото, т.е. това може да е планета състояща се от оголено желязно ядро.

#### Критерии за оценяване:

##### **А) 2т.**

- За правилно изразяване на перигейното и апогейното разстояние е верни числени стойности – 1т.

- За правилно изразяване на голямата полуос и вярна числена стойност – 1т.

Ако ученикът е използвал формулите за видим ъглов размер, които важат за приближение за малки ъгли, се присъжда максимум 1т на това подусловие!

##### **Б) 2т.**

- За правилен израз за орбиталния период – 1т.

- За вярна числена стойност – 1т.

##### **В) 2т.**

- За верен израз за търсения эксцентрицитет – 1т.

- За вярна числена стойност – 1т.

##### **Г) 3т.**

- За правилен израз за скоростта на станцията в апогей и вярна числена стойност – 1т.

- За правилно изразяване на компонентата на скоростта, която е перпендикулярна на лъча на зрение – 1т.

Разбира се, всеки друг правилен метод би следвало да се оцени с максимален брой точки.

- За правилен израз за търсения интервал от време и вярна числена стойност – 1т.

##### **Д) 6т.**

- За изразяване на перигейното, апогейното разстояние и голямата полуос на орбитата, чрез най-малкия и най-големия видим ъглов размер – 2т.

- За правилно получен израз за търсената плътност, чрез III закон на Кеплер – 2т.
- За правилни числени стойности на плътността и съобразяване на това кои от тях са допустими – 2т.

Ако ученикът не е съобразил това, че даденият интервал от 15h би могъл да бъде равен не само на половината от орбиталния период, то решението следва да се оцени с максимум 4т.

В това подусловие също ако ученикът използва формулите за видим ъглов размер, които важат за приближение за малки ъгли, се отнема една точка!

**Задача 2. Лунен изгрев.** След като е наблюдавала няколко красиви изгрева на пълната Луна от терасата на варненската обсерватория, романтичната и любознателна Александра е решила, че това е особено красиво явление и е тръгнала на пътешествие в търсене на най-продължителния лунен изгрев. Тя бързо стига до идеята, че това може да се случи на един от полюсите на Земята и избира да отиде на северния полюс.

Ще наречем продължителност на лунния изгрев времеви интервал от момента, когато най-горната точка от видимия лунен диск докосне хоризонта, до момента, когато най-долната точка от лунния диск се покаже на хоризонта. Приемаме, че Луната има радиус 1737,4 km и се движи около Земята равномерно по кръгова орбита с радиус 384 400 km. Наклонът на орбиталната равнина на Луната към еклиптиката е  $5,145^\circ$ .

**А)** Кога през годината и при какви обстоятелства Александра може да наблюдава най-продължителния изгрев на пълната Луна на северния полюс? Пресметнете приблизително неговата продължителност. [5т.]

**Б)** По същото време смелата космонавтка Савина е на Луната. Тя наблюдава Земята и разговаря с Александра чрез радиовръзка. Какви особено интересни впечатления споделя Савина? Савина се намира в точка от лунната повърхност, която за Александра е на 10' (дъгови минути) по-нагоре от центъра на видимия лунен диск. Направете необходимите пресмятания и начертайте в подходящ мащаб приблизително как ще изглежда взаимното разположение на видимите дискове на Слънцето и Земята в небето на Савина в момента, когато центърът на видимия лунен диск пресича хоризонта за Александра. [7т.]

**В)** Приведете вашите качествени разсъждения относно евентуалното влияние на рефракцията върху продължителността на лунния изгрев. [3т.]

Сидеричен лунен месец – 27,32 денонощия

Синодичен лунен месец – 29,53 денонощия

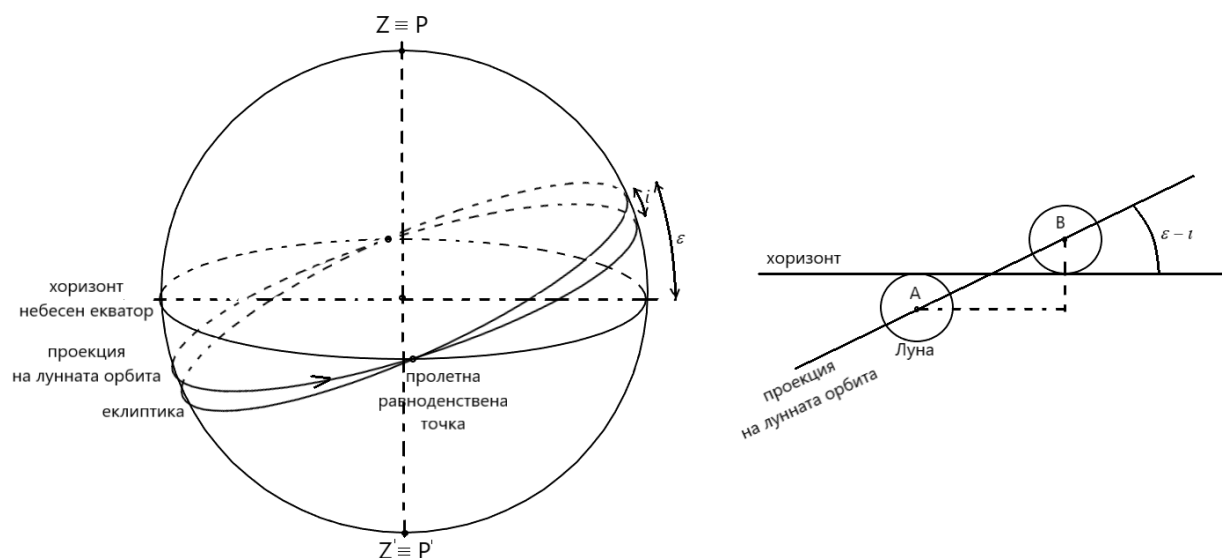
### Решение:

На полюса изгревите на Слънцето и Луната стават не благодарение на околоосното въртене на Земята, а поради видимото годишно движение на Слънцето по еклиптиката и съответно, поради движението на Луната по нейната орбита около Земята. Ако наблюдаваме изгрев на Луната във фаза пълнолуние, то Луната трябва да е разположена противоположно на Слънцето по небесната сфера. Това означава, че в същото време ще наблюдаваме залез на Слънцето. На северния полюс Слънцето залязва само веднъж годишно – в деня на есенното равноденствие около 23 септември. Луната ще изгрява

веднъж във всеки лунен месец, но ако при изгрев тя е в пълнолуние, то това може да се случи само около есенното равноденствие.

За да бъде изгревът с максимална продължителност, Луната трябва да се движи по линия, която сключва минимален ъгъл с хоризонта. На северния полюс хоризонтът съвпада с небесния екватор. При есенното равноденствие Слънцето е в есенната равноденствена точка, следователно пълната Луна трябва да е близо до пролетната равноденствена точка. За да се движи Луната по линия, сключваща минимален ъгъл с хоризонта, лунната орбита трябва да е ориентирана така, че Луната да е близо до низходящия възел на своята орбита – точката, в която при своето орбитално движение около Земята Луната пресича еклиптиката от северната еклиптична полусфера към южната.

В лявата страна на схемата е представена небесната сфера, така както изглежда за наблюдател на северния полюс. Северният небесен полюс съвпада със зенита, хоризонтът съвпада с небесния екватор. С  $i$  е означен ъгълът на наклона на лунната орбита към еклиптиката, а с  $\varepsilon$  наклонът на еклиптиката към небесния екватор. Както се вижда от схемата, при своя изгрев Луната ще се движи под ъгъл  $\varepsilon - i$  към хоризонта.



Вдясно на схемата е дадена съвсем малка част от небесната сфера и са показани положенията на Луната в началото и в края на нейния изгрев. Първо трябва да намерим дъгата АВ в ъглови мерки. Малката част от небесната сфера можем приблизително да считаме за равнина и ако означим с  $\delta$  видимия ъглов диаметър на Луната, то можем да напишем следното съотношение:

$$\frac{\delta}{AB} = \sin(\varepsilon - i)$$

Ако  $R$  е радиусът на Луната, а  $r$  е радиусът на лунната орбита около Земята, то:

$$\delta = \frac{2R}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 0^\circ,5179 \approx 31'$$

$$AB = \frac{\delta}{\sin(\varepsilon - i)} \approx 1^\circ,6504$$

При движението си по своята орбита Луната изминава по небесната сфера ъгъл АВ за време:

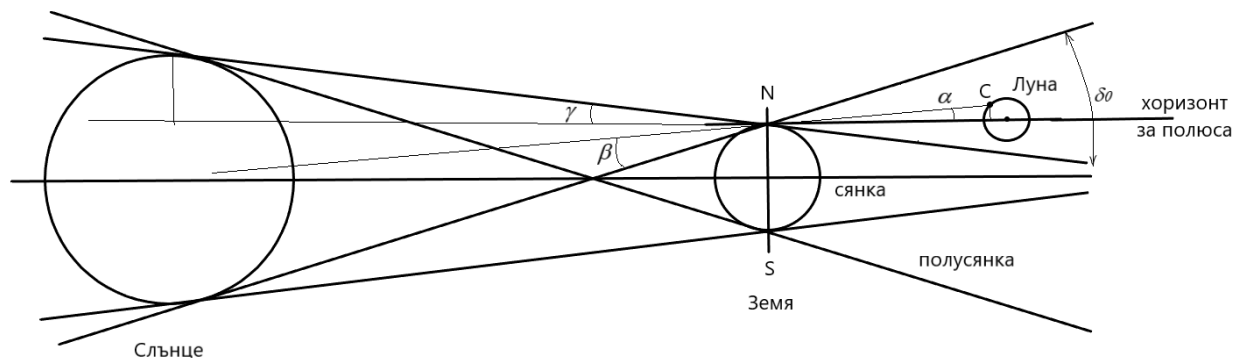
$$\Delta t = T_* \cdot \frac{AB}{360^\circ}$$

където  $T_*$  е орбиталният период на Луната, или сидеричният лунен месец.

$$\Delta t \approx 0,125 \text{ денонощия} \approx 3 \text{ часа}$$

Този резултат е приблизителен. Причините са свързани с факта, че Луната е на сравнително не много далечно разстояние от Земята. Ако в даден момент тя се намира в точката на пролетното равноденствие за наблюдател в центъра на Земята, то за наблюдател на полюса тя ще бъде все още под хоризонта. Следователно най-дългият изгрев на Луната в пълнолуние ще се наблюдава от полюса малко по-късно, след като Луната се е издигнала още малко над плоскостта на екватора. Тогава и наклонът на проекцията на лунната орбита към хоризонта ще е малко по-различен. Освен това ние тук използвахме видимия ъглов диаметър на Луната, пресметнат също за наблюдател в центъра на Земята. За наблюдател на полюса той също би бил леко различен. Но тези поправки са съвсем малки и не биха довели до съществено изменение на приблизителния отговор, който получихме тук.

Ако Луната е близо до пролетната равноденствена точка и в пълнолуние, то тя може да премине през земната сянка и полусянка, т.е. земните жители ще наблюдават лунно затъмнение. В същото време Савина, която е на Луната, ще наблюдава слънчево затъмнение – Земята ще закрива Слънцето. Именно от това явление тя навярно ще споделя своите впечатления с Александра. В момента на равноденствието земната ос е перпендикулярна на правата, свързваща центровете на Земята и Слънцето и терминаторът на Земята минава много близо до полюсите. Да предположим, че именно в този момент от северния полюс се наблюдава изгревът на Луната и центърът на нейния видим диск лежи на хоризонта. Както се вижда от схемата, тогава Луната ще се намира в полусянката на Земята. Следователно Савина, чието положение на Луната е отбелязано с точка С, ще вижда частично слънчево затъмнение.



С  $\delta_0$  е означен видимият от Земята ъглов диаметър на Слънцето. Приблизително същият ще е той и за Савина, защото разстоянието Луна – Земя е много по-малко от разстоянието Земя – Слънце.

$$\delta_0 = \frac{2R_s}{r_0} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

където  $R_s$  е радиусът на Слънцето, а  $r_0$  е разстоянието между Слънцето и Земята.

$$\delta_0 \approx 0^\circ,5331 \approx 32'$$

Ъгълът  $\alpha$  по условие е равен на  $10'$ .

За ъгъла  $\gamma$  можем да напишем:

$$\gamma = \frac{R_S - R_T}{r_0} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

където  $R_T$  е радиусът на Земята. Но понеже той е около 109 пъти по-малък от радиуса на Слънцето, можем да го пренебрегнем и тогава:

$$\gamma \approx \delta_0/2 \approx 16'$$

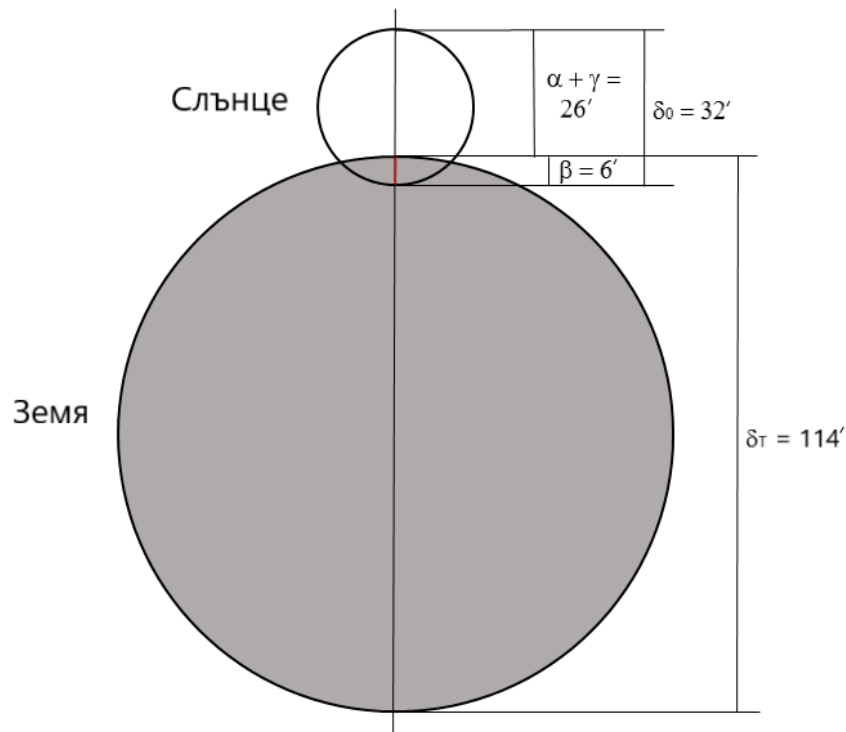
Ъгълът  $\beta$ , който показва каква част от видимия диск на Слънцето ще бъде закрита от Земята, ще бъде:

$$\beta = \delta_0 - \gamma - \alpha = 6'$$

Трябва да определим и видимия от Луната ъглов диаметър на Земята:

$$\delta_T = \frac{2R_T}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 1^\circ,899 \approx 114'$$

Накрая начертаваме в мащаб схемата на взаимното разположение на Земята и Слънцето, както ще се вижда от позицията на Савина в точка С на лунната повърхност.



Рефракцията няма да повлияе върху продължителността на изгрева на Луната. Поради рефракцията на хоризонта се виждат точки от небесната сфера, които са всъщност на определен ъгъл под хоризонта. По тази причина началото на изгрева на Луната ще бъде наблюдавано по-рано, отколкото в случай че няма рефракция. Но със същото подраняване във времето ще настъпи и края на изгрева на Луната и в крайна сметка времевият интервал между началото и края на изгрева ще остане същият. Разбира се, при по-ранния момент, в който ще видим началото на изгрева при наличие на рефракция, Луната ще бъде в леко различна позиция по орбитата си, както и при по-ранния момент на края на изгрева. Строго

погледнато, това може да доведе до разлика в продължителността на изгрева, но тя би била наистина много малка.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

*А) Общо 5 т.*

*За посочване на подходящото време в годината и обосновка – 1,5 т.*

*За посочване на низходящия възел като правилно решение и обяснение – 1,5 т.*

*За пресмятане на продължителността – 2 т.*

*Б) Общо 7 т.*

*За разбиране, че при описаните условия ще се наблюдава затъмнение – 1 т.*

*За добра пространствена представа за ситуацията (Луната е в полусянката на Земята, разположение на хоризонта за полюса, разположение на точката, където се намира Савина) – 1 т.*

*За пресмятания и правилни числени отговори – 3 т.*

*За начертаване на схемата – 2 т.*

*В) Общо 3 т.*

*За правилни обяснения – 2 т.*

*За вярно заключение – 1 т.*

**Задача 3. Завръщане към Блатистата планета.** Преди години в една от задачите за олимпиадата се срещнахме с разумните същества от Блатистата планета. Сега отново сме там и уточняваме, че те имат 8 очи и 16 пипала. Затова са си разделили денонощието на Блатистата планета на 16 мерни единици, които ще наричаме часове. Тяхното Светло слънце се намира далеч в междугалактичното пространство и на небето им не се виждат нито звезди, нито галактики. Оста на въртене на Блатистата планета е перпендикулярна на нейната орбитална равнина, така че и смяна на сезоните няма. На всеки 1024 техни денонощия съществата наблюдават централен пасаж на Ярката планета по диска на Светлото слънце и този период те използват като единица мярка, подобна на годината.

**А)** Според наблюденията на техния велик астроном Янит Анталб, от деня, когато Ярката планета се вижда за най-дълго време вечер след залеза на Светлото слънце до деня, когато настъпва пасажът, изминават 128 дни. Така той пресметнал отношението на радиуса на орбитата на Ярката планета към радиуса на орбитата на Блатистата планета около слънцето. Пресметнете го и вие. **[3т.]**

**Б)** Когато Ярката планета се вижда най-дълго вечер след залеза на Светлото слънце, колко часа изминават от залеза на центъра на видимия диск на слънцето до залеза на планетата? **[3т.]**

**В)** Астрономът Янит Анталб изследвал и някои фундаментални физически закони и създал велика теория. С нейна помощ той изчислил истинските орбитални периоди на Ярката и на Блатистата планета. Изчислете ги и вие. **[4т.]**

Г) Янит Анталб установил, че пасажът на Ярката планета продължава винаги 5 часа. Това е времето, за което центърът на видимия диск на планетата прекосява диска на слънцето. Така той изчислил колко пъти диаметърът на Светлото слънце е по-малък от разстоянието между него и Блатистата планета. Какъв резултат е получил астрономът? [5т.]

### Решение:

Щом като от Блатистата планета се наблюдава пасаж на Ярката планета по диска на слънцето, то очевидно радиусът  $r_1$  на орбитата на Ярката планета около слънцето е по-малък от радиуса  $r_2$  на орбитата на Блатистата планета. Пасаж на Ярката планета по диска на слънцето ще се наблюдава, когато Ярката планета е в долно съединение за наблюдател на Блатистата планета. Периодът от 1024 дена, през който се повтаря тази конфигурация, е синодичният период на Ярката планета  $T_{syn}$ .

На схемата с S е означено Животворното слънце, а с В – Блатистата планета. Когато обитателите на Блатистата планета виждат най-дълго време Ярката планета над хоризонта вечер след залеза на слънцето, Ярката планета е в максимална източна елонгация. Тогава тя е в положение  $A_1$  на схемата. При пасажа по диска на слънцето Ярката планета е в положение  $A_2$ . Времето, което изминава между тези две позиции на Ярката планета, ще бъде:

$$\Delta t_1 = \frac{\beta}{360^\circ} \cdot T_{syn} = 128 \text{ дни}$$

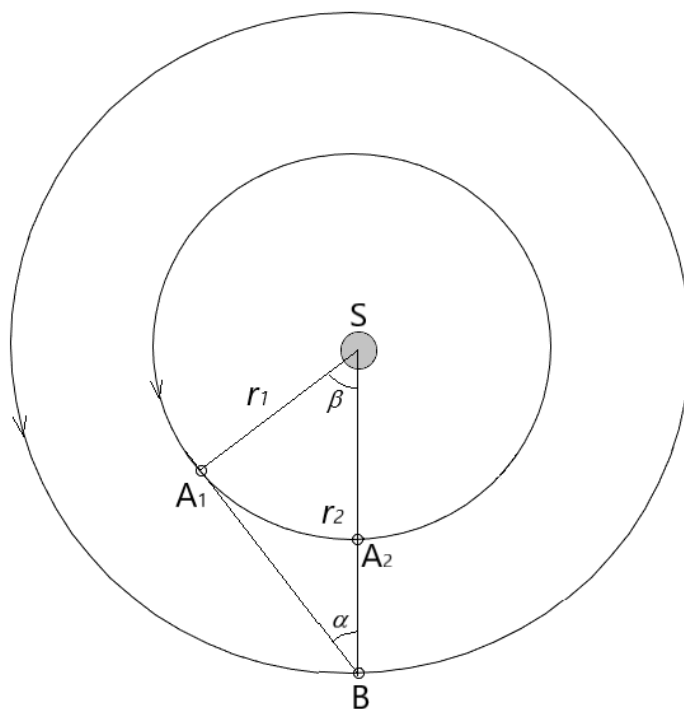
Оттук намираме:

$$\beta = 360^\circ \cdot \frac{\Delta t_1}{T_{syn}} = 45^\circ$$

За отношението на радиуса на орбитата на Ярката планета към радиуса на орбитата на Блатистата планета получаваме:

$$\frac{r_1}{r_2} = \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$$

Нека означим това съотношение с  $k$ , тъй като то ще ни трябва и в по-нататъшните пресмятания.



В правоъгълния триъгълник  $A_1BS$  ъгълът  $\alpha$  също ще е равен на  $45^\circ$ . Като имаме предвид, че по определение от жителите на Блатистата планета, тяхното денонощие се дели на 16 техни часове, то интервалът от време между момента на залеза на центъра на видимия диск на слънцето и залеза на Ярката планета ще бъде:

$$\Delta t_2 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 16 \text{ часа} = 2 \text{ часа}$$

Великата теория, развита на Янит Анталб, трябва да е теорията за гравитацията. Изследвайки движението на планетите, като следствие от теорията за гравитацията, великият астроном трябва да е стигнал и до третия закон на Кеплер. Използваме този закон, както и формулата за връзката между сидеричния и синодичния период на Ярката планета, а също и вече полученото от нас отношение  $k$  на орбиталните радиуси на планетите, за да намерим истинските орбитални периоди  $T_1$  и  $T_2$  на двете планети:

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2}$$

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

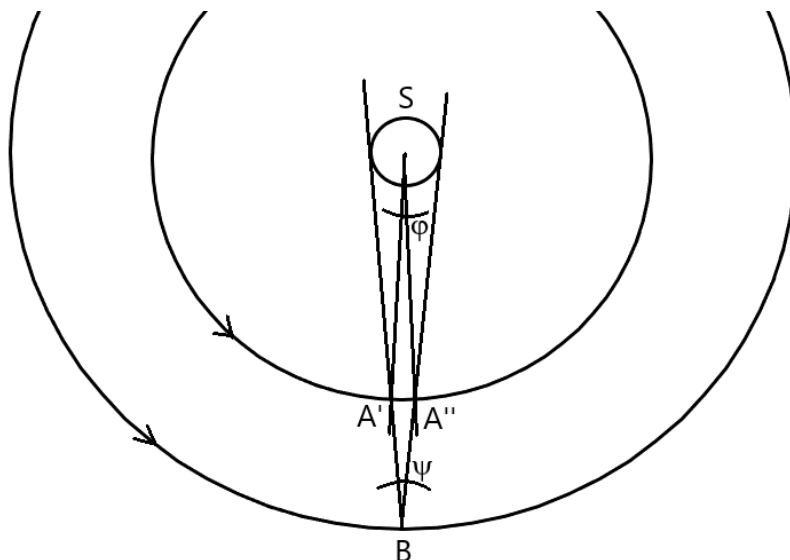
Оттук получаваме:

$$T_1 = T_{syn} \left( 1 - \sqrt{k^3} \right) \approx 415,13 \text{ дни}$$

$$T_2 = T_{syn} \left( \frac{1}{\sqrt{k^3}} - 1 \right) \approx 698,18 \text{ дни}$$

Означаваме времетраенето на пасажа на Ярката планета пред диска на слънцето с  $\Delta t_3$ , а радиуса на слънцето с  $R$ . На следващата схема сме означили с  $S$  Животворното слънце,

с В Блатистата планета, а с А' и А'' положенията на Ярката планета в началото и в края на пасажа.



За ъгълите  $\varphi$  и  $\psi$ , изразени в радиани, можем да напишем:

$$\psi \approx \frac{2R}{r_2}$$

$$\varphi = \frac{\Delta t_3}{T_{syn}} = \frac{5 \text{ часа}/16 \text{ часа}}{1024 \text{ дни}} \approx 0,00030518$$

По време на пасажа Ярката планета изминава дъгата А'А'' и се завърта на ъгъл  $\varphi$  по своята орбита. Ъгълът  $\varphi$  е малък и поради това дъгата А'А'' може да се смята приблизително за праволинейна отсечка. Нейната дължина е:

$$A'A'' = (r_2 - r_1) \psi = r_1 \varphi$$

По-нататък намираме:

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1} \cdot \psi = \varphi$$

$$\left(\frac{1}{k} - 1\right) \cdot \psi = \varphi$$

$$\psi = \frac{\varphi}{\frac{1}{k} - 1}$$

И накрая за съотношението на диаметъра на слънцето към радиуса на орбитата на Блатистата планета получаваме:

$$\psi = \frac{2R}{r_2} \approx 0,0007367$$

Или ако вземем обратното съотношение, диаметърът на слънцето е около 1357 пъти по-малък от радиуса на орбитата на Блатистата планета.

Критерии за оценяване (общо 15 т.)

А) Общо 3 т.

За добра представа за ситуацията и правилни пресмятания – 2 т.

За верен числен отговор – 1 т.

Б) Общо 3 т.

За правилни пресмятания – 2 т.

За верен числен отговор – 1 т.

В) Общо 4 т.

За правилен метод на решение и алгебрични преобразувания – 3 т.

За верни числени отговори – 1 т.

Г) Общо 5 т.

За правилна геометрична представа – 1 т.

За правилни пресмятания – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.

**Задача 4. Звезди по еклиптиката.** Звездата Уасат ( $\delta$  Gem) е на еклиптични координати ( $\lambda_w = 108,5^\circ$ ,  $\beta_w = -0,18^\circ$ ) и има паралакс  $p_w = 0,0538''$ . Уасат е двойна звезда като А-компонентата е с маса 1,57 слънчеви маси, фотосферна температура 6900 К и видима звездна величина 3,53 mag, докато яркостта на В-компонентата е пренебрежима. Масата на Уасат В е 0,81 слънчеви. Уасат има много малка пространствена скорост спрямо Слънцето, която можем да пренебрегнем.

**А)** Пресметнете радиуса на Уасат А. Абсолютната звездна величина на Слънцето е +4,75. Болометричната корекция да се пренебрегне. [3т.]

**Б)** На коя дата Слънцето покрива Уасат? Колко часа продължава окултацията? Приемете земната орбита за кръгова. Радиусът на Слънцето е 696 000 km. [3т.]

Звездата Аин ( $\epsilon$  Tau, също 3,53 mag) е на еклиптични координати ( $\lambda_A = 68,5^\circ$ ,  $\beta_A = -2,57^\circ$ ) и има паралакс  $p_A = 0,0224''$ . Аин е К0-гигант с маса 2,7 слънчеви маси, радиус 12,5 слънчеви и температура 4880 К. Около Аин по кръгова орбита обикаля газовият гигант Аматеру – първата открита планета, обикаляща около звезда в разсеян куп (Хиядите).

Космическият пътешественик Бобо е кацнал на спътник на Аматеру със своя звездолет „Бургас-56“ и прави астрономически наблюдения, вдъхновен от множеството ярки звезди от Хиядите гледани отблизо.

**В)** Бобо изчислява, че скоростта, с която планетата Аматеру обикаля Аин, е 35,5 km/s. Гравитационното ускорение на повърхността на спътника е малко, така че Бобо е доста лек, като в Бургас. Спътникът, на който се намира Бобо, има алbedo (отражателна способност) 60%. Изчислете средната температура на повърхността на този спътник. Дали Бобо ще се чувства съвсем като в Бургас? [3т.]

**Г)** Бобо решава, че е време за промяна и тръгва със звездолета „Бургас-56“ от Аин директно в посока към Уасат. Звездолетът се движи с постоянна скорост от няколко хиляди

километра в секунда. Малко след началото на пътешествието Бобо продължава с астрономическите наблюдения от звездолета и пресмята радиалната скорост и собственото движение на Слънцето. След това Бобо влиза в криокамерата, която поддържа жизнените му функции за дълго време и заспива. След хиляди години Бобо се събужда и продължава с наблюденията. Посоката и скоростта на звездолета са непроменени, а радиалната скорост на Слънцето се е понижила с 30% (по модул). Бобо измерва и собственото движение на Слънцето. С колко процента се е повишило то? [3т.]

Д) Космическият пътешественик Виктор е на екватора на Мистериозна планета някъде в космоса. Ротационният период на Мистериозната планета е разделен на 24 мистериозни часа. Виктор забелязва как Слънцето минава през зенита му, точно 8 мистериозни часа по-късно Уасат минава през зенита му и още точно 8 мистериозни часа след това Аин минава през зенита му. Колко пъти по-ярка е звездата Уасат отколкото звездата Аин по небето на Мистериозната планета? [3т.]

### Справочни данни:

Фотосферна температура на Слънцето: 5772 K

Абсолютна звездна величина на Слънцето: 4,75 mag

Астрономическа единица:  $149,6 \cdot 10^6$  km

Гравитационна константа:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

### **Решение:**

А) От паралакса намираме разстоянието до Уасат:

$$r_W = \frac{1}{p_W} = 18,59 \text{ pc}$$

От видимата звездна величина намираме абсолютната звездна величина на Уасат

$$\begin{aligned} m_W - M_W &= 5 \lg r_W - 5 \\ M_W &= 2,18 \text{ mag} \end{aligned}$$

Сравняваме абсолютната звездна величина на Уасат с тази на Слънцето по формулата на Погсън:

$$\begin{aligned} M_W - M_{\odot} &= -2,5 \lg \frac{L_W}{L_{\odot}} \\ \frac{L_W}{L_{\odot}} &= 10^{0,4(M_{\odot} - M_W)} = 10,67 \end{aligned}$$

От закона на Стефан-Болцман намираме радиуса на Уасат:

$$\begin{aligned} \frac{L_W}{L_{\odot}} &= \left( \frac{R_W}{R_{\odot}} \right)^2 \left( \frac{T_W}{T_{\odot}} \right)^4 \\ R_W &= 2,29 R_{\odot} \end{aligned}$$

Реалната стойност е малко по-ниска ( $\sim 2,1R_{\odot}$ ) заради болометричната корекция.  
[Зт.]

**Б)** Еклиптичната дължина на Уасат е  $108,5^{\circ}$ , което е  $18,5^{\circ}$  след лятно слънцестоене т.е. покритието от Слънцето се случва около 19 дни след лятно слънцестоене, на 10 юли.

Еклиптичната ширина на Уасат е  $-0,18^{\circ}$ , т.е. Уасат е  $0,18^{\circ}$  южно от еклиптиката. Ъгловият радиус на Слънцето по земното небе е  $(1R_{\odot})/(1\text{au}) = 0,267^{\circ}$ . От геометрични съображения хордата, която Уасат изминава зад диска на Слънцето е с дължина

$$\alpha = 2\sqrt{(0,267^{\circ})^2 - (0,18^{\circ})^2} = 0,394^{\circ}$$

Този ъглов размер по небето се изминава от Слънцето спрямо звездите за време

$$t = \frac{\alpha}{\omega_{\odot}} = 9,6 \text{ h}$$

[Зт.]

**В)** От масата на Аин  $M_A = 2,7M_{\odot}$  и кръговата скорост на планетата  $v_P = 35,5 \text{ km/s}$  намираме разстоянието от планетата (респективно, от спътника) до звездата Аин.

$$v_P = \sqrt{\frac{GM_A}{r_P}}$$

$$r_P = 1,90 \text{ au}$$

Ако спътникът е с радиус  $R_S$ , проекцията на площта, с която поема лъчите от звездата е  $\pi R_S^2$ , а  $(1-A)$  е частта от лъчистата енергия, която задържа и използва за поддържане на термодинамично равновесие. Мощността на топлинното му лъчение трябва да е

$$P = \frac{L}{4\pi r_P^2} (1-A) \pi R_S^2$$

От закона на Стефан-Болцман

$$P = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$$

$$L = 4\pi R_A^2 \sigma T_A^4$$

Заместваме и получаваме

$$4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 = \frac{4\pi R_A^2 \sigma T_A^4}{4\pi r_P^2} (1-A) \pi R_S^2$$

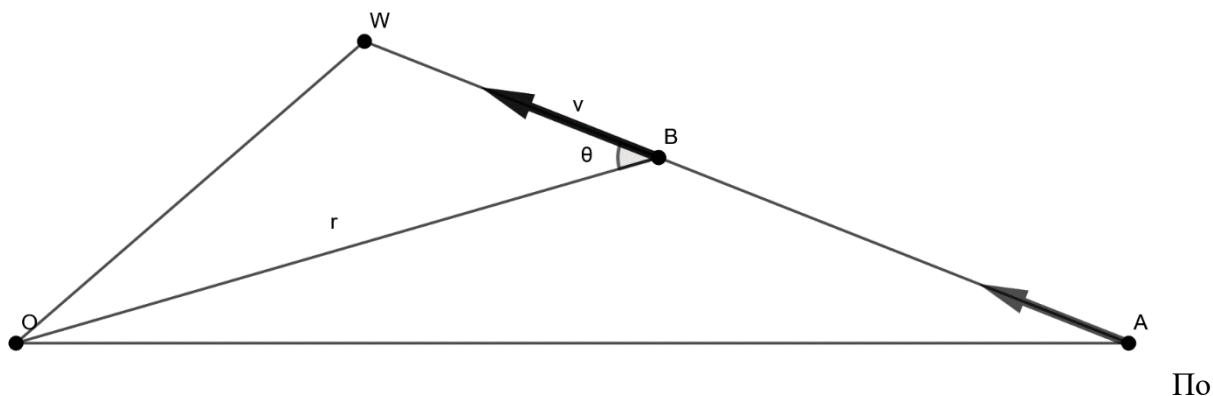
$$T_S^4 = \frac{R_A^2 T_A^4}{4r_P^2} (1-A)$$

$$T_S = T_A \left( \frac{(1-A) R_A^2}{4 r_P^2} \right)^{1/4} = 480 \text{ K} = 207^{\circ}\text{C}$$

В Бургас е топло, но не чак толкова. Бобо няма да се чувства комфортно.

[Зт.]

Г) Необходимо е да решим триъгълника Слънце (O) – Уасат (W) – Аин (A).  
 Разстоянията от паралакс до Уасат и Аин са  $r_W = OW = 18,59$  pc и  $r_A = OA = 44,64$  pc.  
 Ъгловото разстояние между двете е равно на разликата в еклиптичните дължини:  
 $O = \lambda_W - \lambda_A = 40^\circ$ .



косинусова теорема получаваме разстоянието Уасат-Аин:

$$AW = \sqrt{OW^2 + OA^2 - 2 \cdot OW \cdot OA \cdot \cos O} = 32,66 \text{ pc}$$

По синусова теорема пресмятаме ъгъл A:

$$\frac{OW}{\sin(A)} = \frac{AW}{\sin(O)}$$

$$A = 21,46^\circ$$

По време на пътешествието звездолетът поддържа постоянна скорост  $v$ , обозначена на чертежа, насочена към Уасат (W). Мени се ъгълът  $\theta$  между тази скорост и направлението към Слънцето, а оттам и радиалната скорост  $v_R$  и собственото движение  $\mu$  на Слънцето. От чертежа се вижда, че

$$v_R = -v \cos \theta$$

$$\mu = \frac{v \sin \theta}{r}$$

От синусова теорема следва, че

$$\frac{r}{\sin W} = \frac{OW}{\sin \theta}$$

Заместваме и получаваме

$$\frac{v \sin \theta}{\mu \sin W} = \frac{OW}{\sin \theta}$$

$$\mu = \left( \frac{v}{OW \sin W} \right) (\sin \theta)^2$$

В началния момент  $A = \theta_1 = 21,46^\circ$ .

Радиалната скорост се е понижила с 30%, следователно

$$\frac{v_{R2}}{v_{R1}} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = 0,7$$

$$\theta_2 = 49,35^\circ$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \left( \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right)^2 = 4,30$$

Собственото движение на Слънцето се е повишило 4,3 пъти, т.е. с 330%.

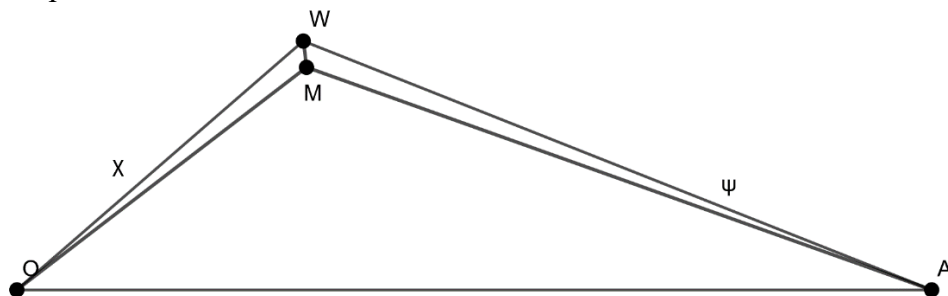
[Зт.]

Д) От обяснението за небето на Мистериозната планета следва, че тя е разположена в тази точка в равнината на трите звезди, в която ъглите между направленията към 3-те звезди са по  $120^\circ$ .

Можем да забележим, че ъгълът при Уасат е

$$W = 180^\circ - (O + A) = 118,54^\circ$$

което е много близо до  $120^\circ$ . Следователно Мистериозната планета е много близо до W на чертежа.



От синусови теореми за малките ъгли  $\chi$  и  $\psi$ , под които виждаме  $WM \cdot \cos(60)$  от точки O и A, важи

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{AW}{OW} = 1,76$$

Решаваме ъглите в OMW и AMW като знаем, че  $OMW = AMW = 120^\circ$ :

$$OWM = 60^\circ - \chi \rightarrow AWM = 58,54^\circ + \chi = 58,54^\circ + 1,76\psi$$

За триъгълник AMW:

$$120^\circ + \psi + 58,54^\circ + 1,76\psi = 180^\circ$$

$$\psi = 0,53^\circ$$

Отношението на разстоянията AM и WM е

$$\frac{AM}{WM} = \frac{\sin(59,47^\circ)}{\sin(0,53^\circ)} = 93,1$$

Знаейки, че двете звезди са еднакво ярки от Земята (т.О), търсеното отношение на потоците е:

$$\left( \frac{AM}{WM} \right)^2 \left( \frac{OW}{OA} \right)^2 = 1500$$

За наблюдателя на Мистериозната планета Уасат е 1500 пъти по-ярка от Аин. [Зт.]