

Подборен кръг за IOAAjr 2026

Практически тур, 6 юли 2026 г.

Време за работа: 4 часа

Решения

Задача 1. Неизвестна планета. В таблицата са дадени стойностите на видимия ъглов диаметър на една от планетите в Слънчевата система, измерени от земен наблюдател. Времето се измерва в част синодичния период, като началният момент е произволно избран, а ъгловият размер ϑ - в относителни мерни единици, т.е. посочените числени стойности не съответстват на никаква мерна единица за ъгъл.

А) Начертайте графика, която показва зависимостта на ъгловия размер от времето. Прекарайте плавна крива през точките. [3т.]

Б) Определете голямата полуос на орбитата на неизвестната планета като първо определите коя е тази планета. [6т.]

В) Определете синодичния период на планетата относно Земята. [4т.]

Г) Попълнете таблицата отново, като запишете моментите от време в денонощия, а видимия ъглов размер в дъгови секунди. Попълнете дадената празна таблица. [5т.]

Д) Защо максимумите на видимият ъглов размер не са еднакво високи? [2т.]

Т	ϑ	Т	ϑ
0.09	1.447821	1.18	0.989106
0.18	1.103784	1.27	0.802752
0.27	0.860092	1.36	0.716743
0.36	0.731078	1.45	0.673739
0.45	0.702408	1.55	0.673739
0.55	0.716743	1.64	0.688073
0.64	0.745413	1.73	0.745413
0.73	0.817087	1.82	0.874427
0.82	0.931766	1.91	1.161124
0.91	1.132454	2	1.490826
1	1.390482	2.09	1.419151
1.09	1.318807	2.18	1.189794

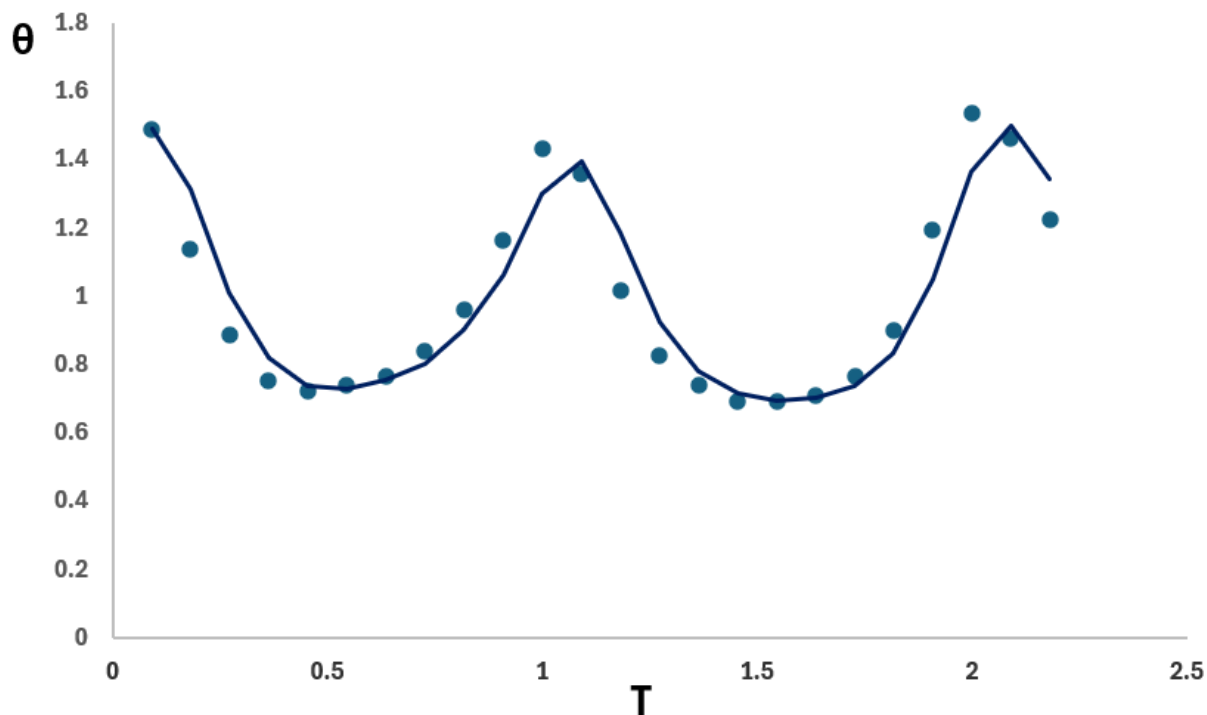
N	Планета	Голяма полуос [au]	Радиус [km]
1	Меркурий	0.39	2 440
2	Венера	0.72	6 052
3	Земя	1.00	6 371
4	Марс	1.52	3 390
5	Юпитер	5.20	69 911
6	Сатурн	9.58	58 232
7	Уран	19.20	25 362
8	Нептун	30.04	24 622

Предайте този лист!

[illegible]

Решение:

А) На милиметровата хартия начертаваме графика, показваща зависимостта между видимия ъглов размер на планетата (по оста Оу) и времето (по оста Ох). Прекарваме плавна крива между точките.



Б) От графиката можем да измерим минималния и максималния видим ъглов размер на планетата в относителните мерни единици, в които той е зададен.

Установяваме че:

$$\theta_{\text{MIN}} = 0,67$$

$$\theta_{\text{MAX}} = 1,49.$$

Можем да пресметнем, че:

$$\frac{\theta_{\text{MAX}}}{\theta_{\text{MIN}}} \approx 2,22$$

Ако с r_{MIN} и r_{MAX} означим най-малкото и най-голямото разстояние между планетата и Земята, а с D физическия диаметър на планетата, то можем да запишем следните равенства:

$$\theta_{\text{MAX}} = \frac{D}{r_{\text{MIN}}}$$

И

$$\theta_{\text{MIN}} = \frac{D}{r_{\text{MAX}}}$$

От тук следва, че:

$$\frac{\theta_{\text{MAX}}}{\theta_{\text{MIN}}} = \frac{r_{\text{MAX}}}{r_{\text{MIN}}}$$

От предоставените ни данни не можем да направим никакъв извод относно това дали планетата е вътрешна или външна. Поради тази причина, ще разгледаме два случая.

I случай: Неизвестната планета е външна.

Ако радиусът на орбитата на планетата е r , то в този случай:

$$r_{\text{MIN}} = r - 1\text{au}$$

$$r_{\text{MAX}} = r + 1\text{au}.$$

Ако предположим, че планетата е Марс, то се получава, че: $r_{\text{MIN}} = 0,52\text{ au}$ и $r_{\text{MAX}} = 2,52\text{au}$. Съотношението това максимално и минимално разстояние е приблизително 5, което е много далеч от полученото по-рано 2,2

При допускане, че планетата е Юпитер, то: $r_{\text{MIN}} = 4,2\text{ au}$ и $r_{\text{MAX}} = 6,2\text{au}$.

Сега съотношението 1,48, което също не съответства.

За по-далечните планети отношението между най-голямото и най-малкото разстояние до Земята ще бъде все по-близо до 1. По тази причина дори няма смисъл да проверяваме за тях.

Това означава, че случаят в който планетата е външна може да бъде отхвърлен.

II случай: Неизвестната планета е вътрешна.

При това предположение:

$$r_{\text{MIN}} = 1\text{au} - r$$

$$r_{\text{MAX}} = r + 1\text{au}.$$

Ако допуснем, че търсената планета е Меркурий, то: $r_{\text{MIN}} = 0,61\text{ au}$ и $r_{\text{MAX}} = 1,39\text{ au}$.

Тук обаче, отношението на максималното към минималното разстояние е 2,27, което е много близо до получената от данните стойност. Следователно, можем да направим заключението, че планетата е Меркурий. Нейната голяма полуос на орбитата е $a_M = 0,39\text{ au}$.

В) За да определим синодичния период на Меркурий T_{SYN} , първо ще пресметнем неговия период на орбитално движение около Слънцето T_M .

Съгласно III закон на Кеплер:

$$\frac{a[\text{au}]_M^3}{T[\text{г}]_M^2} = 1$$

От тук намираме: $T_M[\text{г}] = a[\text{au}]_M^{3/2} \approx 0,24\text{г} \approx 89\text{d}$

За синодичния период можем да запишем следното равенство:

$$\frac{1}{T_{\text{SYN}}} = \frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_M}$$

Следователно:

$$T_{\text{SYN}} = \frac{T_E T_M}{T_E - T_M} \approx 117\text{d}$$

Г) За да попълним първата и третата колона на таблицата (които са озаглавени T [d]) умножаваме дадените ни в условието моменти от време по получения синодичен период. За да попълним видимия ъглов размер, нека да пресметнем стойността на θ_{MAX} в секунди. Означаваме с R_M радиуса на Меркурий. Следователно:

$$\theta_{\text{MAX}} = \frac{2R_M}{1\text{au} - a_M} \approx 11,0''$$

Знаейки, че този максимален видим ъглов размер съответства на 1,49 условни мерни единици, можем да пресметнем стойностите на всички ъглови размери, чрез пропорция. Получените стойности нанасяме в тази таблица:

T [d]	θ ["]	T [d]	θ ["]
11	10.7	139	7.3
21	8.2	150	5.9
32	6.4	160	5.3
43	5.4	171	5
53	5.2	182	5
64	5.3	192	5.1
75	5.5	203	5.5
85	6	214	6.5
96	6.9	224	8.6
107	8.4	235	11
117	10.3	246	10.5
128	9.8	256	8.8

Д) Максимумите не са еднакво високи, защото Меркурий има силно елиптична орбита. Поради това, по в различните моменти от време, когато той е в долно съединение (когато видимият му ъглов размер е максимален) разстоянието до него е съществено различно.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

А) 3т.

- За постояване на графика върху която са нанесени всички точки, с правилно разграфени оси – 2т.

- За прекарана плавна крива – 1т.

Б) 6т.

- За намиране на съотношението между максималния и минималния ъглов размер – 1т.

- За правилни разсъждения, чрез които се достига до извода, че планетата е Меркурий – 5т.

Използваният от участника метод може да се различава значително от авторския! Ако методът е логически правилен и изчерпва всички възможни случаи следва да се присъди максимален брой точки. Ако ученикът не е разгледал и двете възможности (вътрешна и

външна планета), но е достигнал до извода, че планетата е Меркурий, следва да се отнемат 2т.

В) 4т.

- За намиране на орбиталния период на Меркурий – 4т

- За намиране на синодичния период – 4т.

Г) 5т.

- За правилен метод за пресмятане на числените стойности, които трябва да се внесат в таблицата – 1т.

- За правилно попълнени числени стойности, съобразно използвания метод – 4т.

По този критерий могат да се присъждат непълен брой точки, ако ученикът е допуснал изчислителни грешки.

Д) 2т.

- За правилен отговор, че планетата е Меркурий и аргументация – 1т.

Задача 2. Спектрални наблюдения на галактики. Една от най-важните спектрални линии в съвременната астрономия е 21 cm линия на неутралния водород. Тя се получава когато електронът във водородния атом промени посоката на спина си, при което се излъчва фотон с честота $\nu = 1420.4$ Hz. Чрез нея ние можем да проследим движението на множество облаци неутрален водород, разположени в галактичната равнина, и да определим тяхната пространствена скорост. Това е един от основните методи за получаване на кривата на въртене на Галактиката – зависимостта на скоростта на въртене от разстоянието до центъра.

Представете си, че наблюдавате излъчването от облаци неутрален водород за фиксирано направление в равнината на галактиката. Приемете, че всички водородни облаци се движат по кръгови орбити около галактичния център със скорости, равни на слънчевата: $v(r) = v_{\odot} = 230$ km/s.

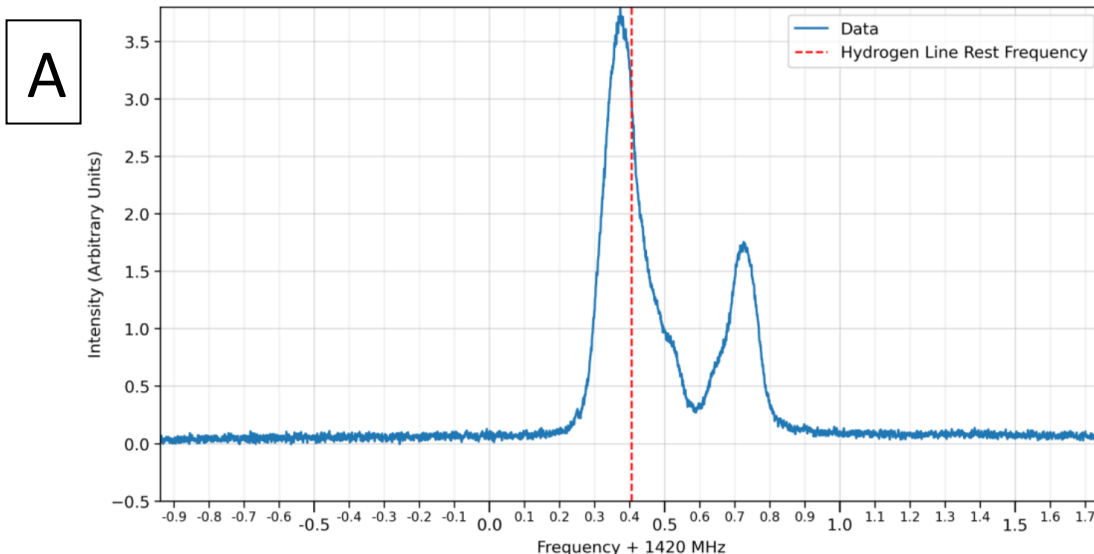
А) Намерете израз за максималната лъчева скорост, която бихте засекли от такъв облак, за дадена галактична дължина ℓ , ако $0^\circ < \ell < 90^\circ$. [2т.]

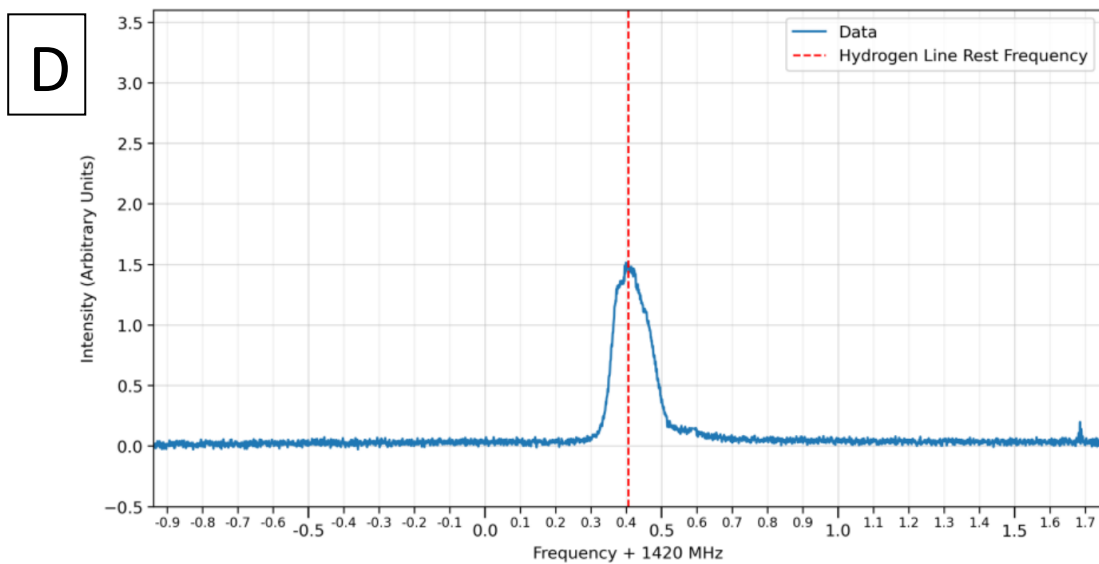
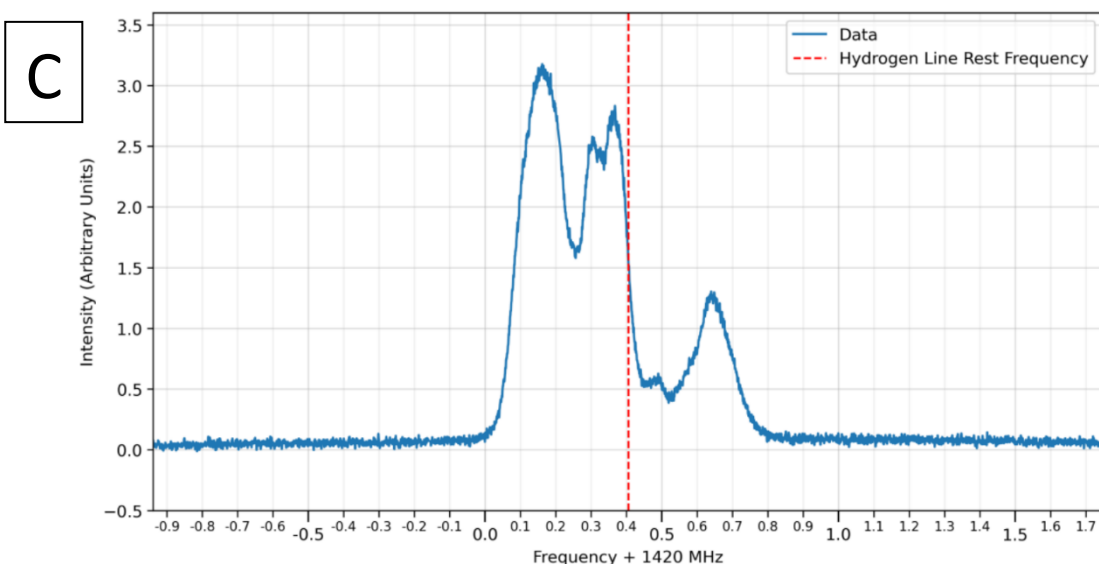
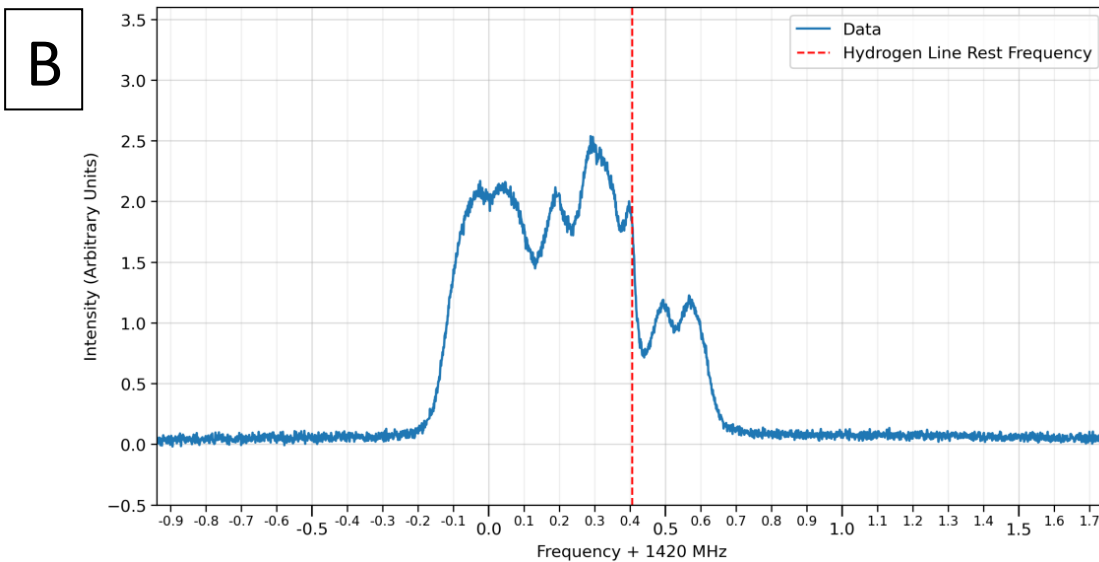
Б) Намерете израз за минималната лъчева скорост, която бихте засекли от такъв облак, за дадена галактична дължина ℓ , ако $90^\circ < \ell < 180^\circ$. [2т.]

Упътване: Слънцето се движи в посока $\ell = +90^\circ$ около Галактичния център. Във финалните буквени изрази използвайте като променливи само $v_{\odot}$ и ℓ .

В) Дадени са ви 4 графика, показващи зависимостта на интензитета на излъчването на облаци в дадено направление от честотата. Всяка графика е направена при наблюдение на конкретна галактична дължина, като за графики А, В и С тя е в интервала $0^\circ < \ell < 90^\circ$, а за графика D е над 90° . Определете максимално точно галактичната дължина, на която съответства всяка графика. [8т.]

Упътване: За по-точни резултати направете измерванията си в точката, където сигналът е спаднал до 50% спрямо максималната стойност на подходящия пик.



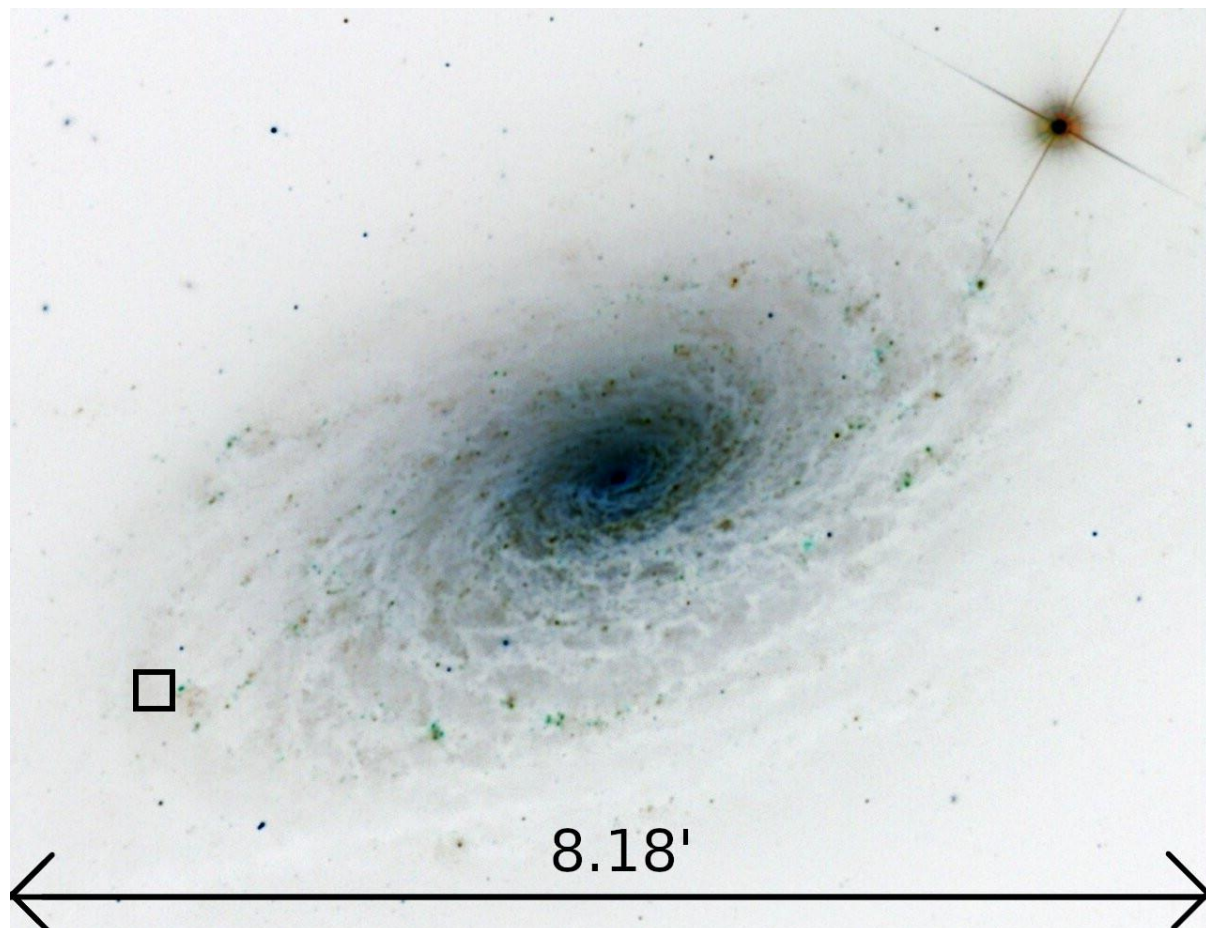


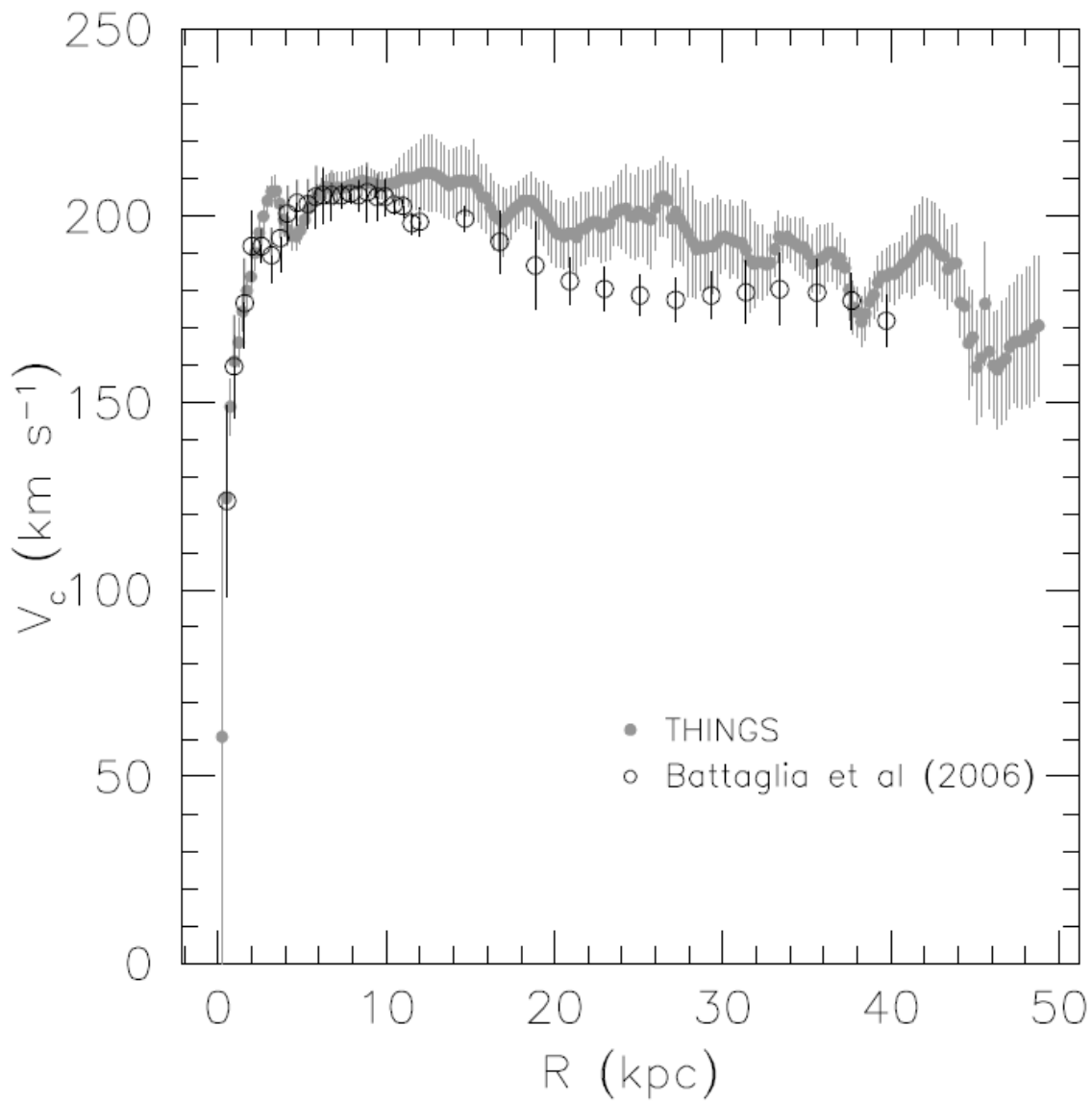
Друга изключително важна линия е $H\alpha = 6562,8\text{\AA}$. Тя се получава при преход на електрон от $n = 3$ към $n = 2$ енергетично ниво, при което се излъчва оптичен фотон. Тази линия се използва за изучаване на широк набор от обекти и явления – емисионни мъглявини, протуберанси на Слънцето, магнитна активност на звезди, определяне на темп на звездообразуване (SFR) в галактики и много други. В тази задача ще изчислите на каква дължина на вълната бихме я наблюдавали в галактиката Слънчоглед (NGC 5055 / M63).

Даден ви е негатив на снимка на галактиката, направена в Kitt Peak National Observatory, както и крива на лъчевата скорост по голямата полуос на M63 като функция на разстоянието от центъра. Стойностите по тази графика са отместени с константа така, че лъчевата скорост на центъра на M63 да е 0 km/s . Разстоянието до M63 е $7,9 \text{ Mpc}$. Приемете, че пекулярната ѝ скорост е пренебрежима. Въртенето на галактиката е по часовника.

Г) Определете за какво време звездите в квадратчето ще направят една пълна обиколка около центъра на M63. [5т.]

Д) От тези звезди е наблюдавана емисия в $H\alpha$ (коригирана за въртенето на Земята около Слънцето и на Слънцето около центъра на Млечния път). Изчислете каква ще бъде наблюдаваната ѝ дължина на вълната. [3т.]





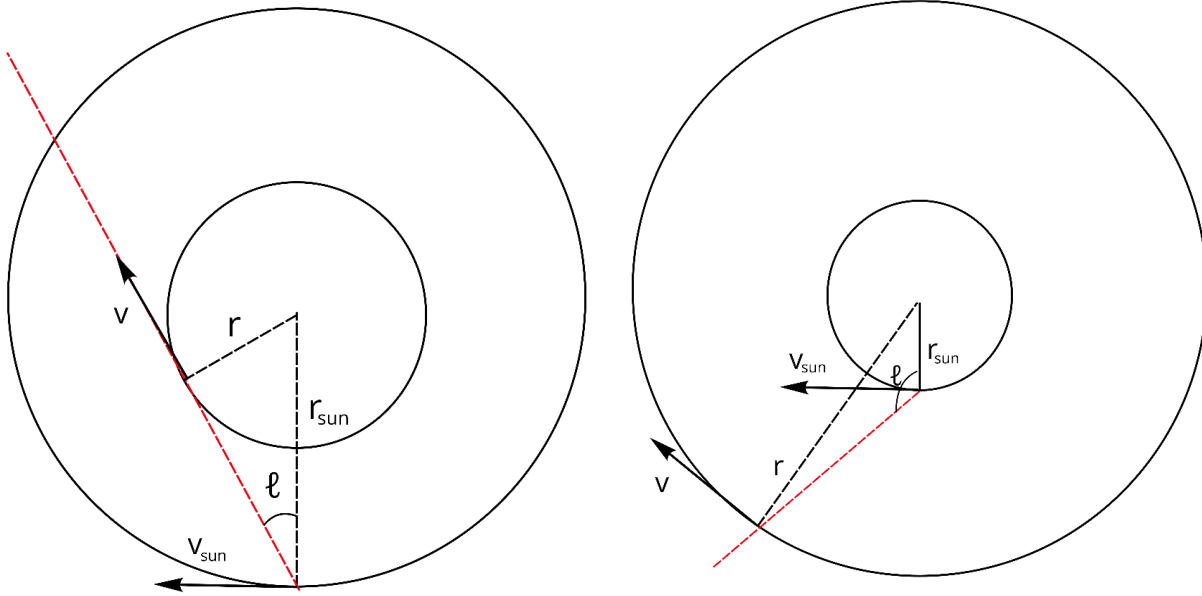
Источници

Earwicker et al. (2026). Reconstructing the Milky Way with the 21 cm hydrogen line.
https://agiseti.com/assets/files/ReconstructingTheMilkyWay_Instructor.pdf

de Blok et al. (2008). High-Resolution Rotation Curves and Galaxy Mass Models from THINGS.
The Astronomical Journal, Volume 136, Issue 6, pp. 2648-2719, 10.48550/arXiv.0810.2100

Решение:

А+Б) За да определим максималната (по модул) лъчева скорост за дадена галактична дължина ℓ , е необходимо да разгледаме 2 случая. На двата чертежа по лъча на зрение е обозначен облакът, съответстващ на максималната лъчева скорост за $0^\circ < \ell < 90^\circ$ и на минималната за $90^\circ < \ell < 180^\circ$.



Ако приемем, че всички облаци се движат с еднаква пространствена скорост, равна на скоростта на Слънцето около Галактичния център ($v_\odot = 230 \text{ km/s}$), то в интервала $0^\circ < \ell < 90^\circ$ най-голяма лъчева скорост ще има облакът, за който направлението ℓ е допирателна към орбитата му. Това е така, защото в този случай пространствената скорост на облака ще лежи изцяло по лъча на зрение. Тогава формулата за максималната лъчева скорост ще бъде:

$$v_{r,max} = v(r) - v_\odot \sin \ell \approx v_\odot (1 - \sin \ell)$$

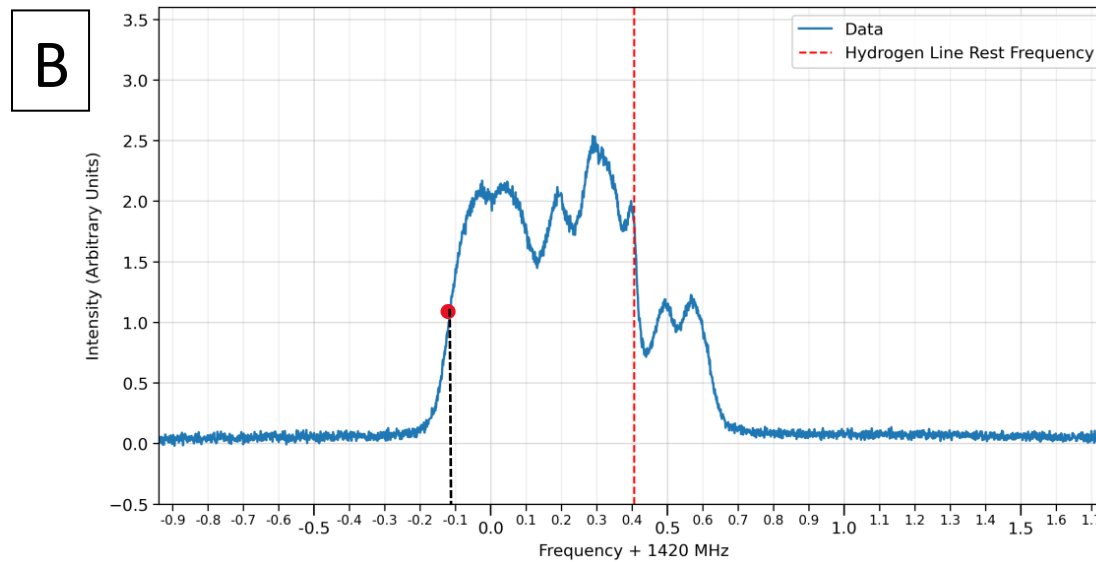
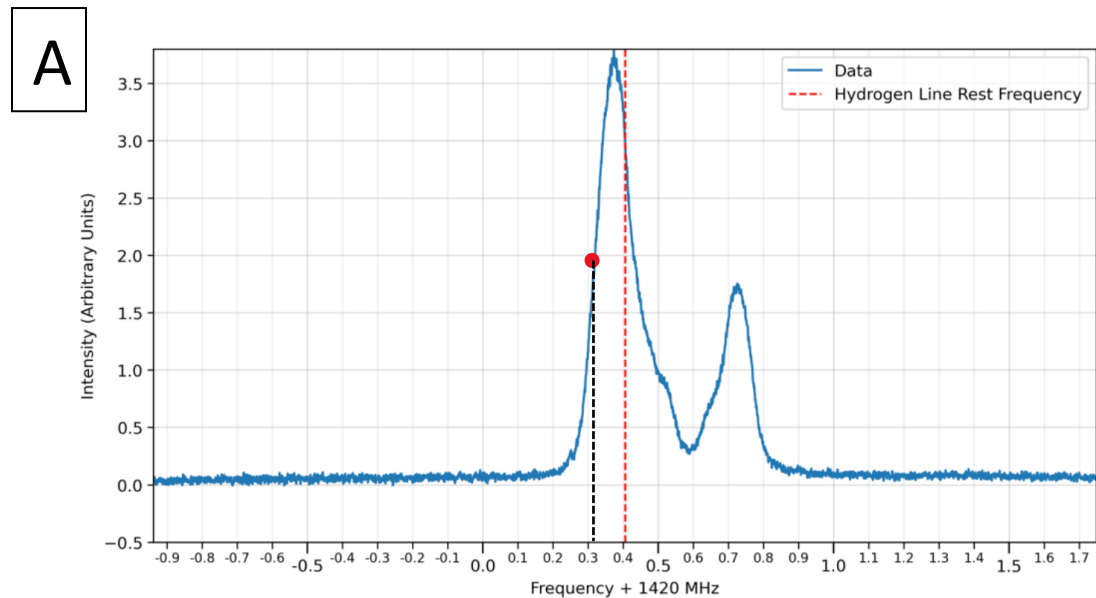
В този случай $v_{r,max}$ винаги ще е по-голямо от 0, тъй като $0^\circ < \ell < 90^\circ$, така че облакът ще бъде червено отместен.

От втория чертеж се вижда, че в интервала $90^\circ < \ell < 180^\circ$ облакът с най-малка лъчева скорост ще е най-далечният, който можем да видим. Това е така, защото лъчевата скорост за произволно разстояние r ще бъде разликата между проекциите на v и $v_\odot$ по направлението ℓ . Когато облакът се намира максимално далеч от центъра на Галактиката, то той ще се движи почти перпендикулярно спрямо лъча на зрение (тангенциалната му скорост ще бъде пълната му пространствена). Тогава лъчевата му скорост ще бъде:

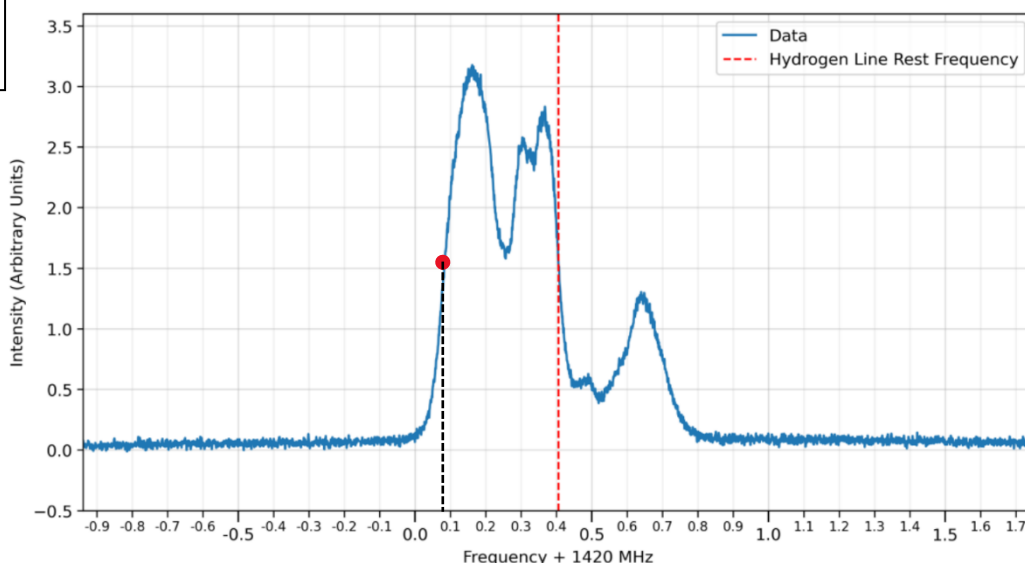
$$v_{r,max} = -v_\odot \sin \ell$$

За този интервал от стойности на ℓ $v_{r,max}$ винаги ще е отрицателно, така че облакът ще бъде синьо отместен.

В) Тъй като графики А-С са в интервала $0^\circ < \ell < 90^\circ$ и облакът се вижда червено отместен, то трябва да намерим лъчевата скорост, която отговаря на най-малка честота. За всяка графика отбелязваме най-червено отместения пик и, следвайки упътването, измерваме честотата, съответстваща на спад в интензитета на 50% спрямо този на пика.



C



Получаваме стойности за честотите: $\nu_A = 1420,31$ MHz, $\nu_B = 1419,89$ MHz, $\nu_C = 1420,09$ MHz.

Използваме формулата за ефект на Доплер и записваме, че

$$\frac{\nu_0}{\nu_{obs}} = 1 + \frac{\nu_{r,max}}{c}$$

Оттук пресмятаме, че максималната лъчева скорост за всяка една графика е: $\nu_{A,max} = 19$ km/s, $\nu_{B,max} = 107,8$ km/s, $\nu_{C,max} = 65,5$ km/s.

Накрая можем да използваме получената формула от А), за да определим галактичната дължина за всяка фигура:

$$\ell = \arcsin\left(1 - \frac{\nu_{r,max}}{\nu_{\odot}}\right)$$

Получава се, че галактичната дължина за графика А е $\ell_A = 66,5^\circ$, за графика В е $\ell_B = 32,1^\circ$ и за графика С е $\ell_C = 45,7^\circ$ (*истинските стойности са $70^\circ, 30^\circ$ и 50° , така че нашите резултати са много близки*).

За да определим галактичната дължина на фигура D не е необходимо да правим допълнителни измервания. Достатъчно е да забележим, че пикът е симетричен спрямо лабораторната честота и няма никакво червено или синьо отместване. Това означава, че минималната лъчева скорост спрямо нас по това направление е 0. Тъй като тази фигура отговаря на $\ell > 90^\circ$, сравнявайки с формулата, получена от А), виждаме, че това е възможно единствено за $\ell = 180^\circ$. Именно това е галактичната дължина, на която е получена графика D.

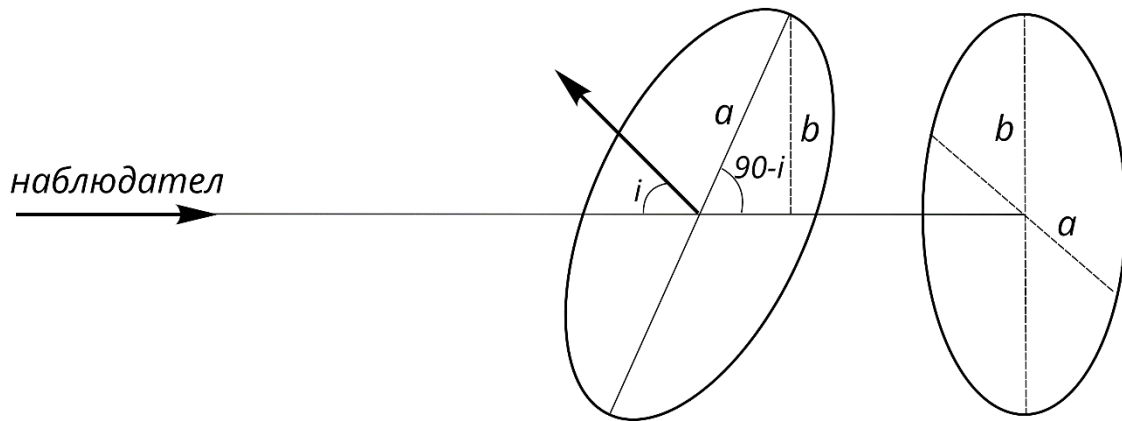
Г) За да намерим периода за една пълна обиколка около центъра на М63, е необходимо да определим разстоянието на звездите от него и скоростта, с която се движат. По изображението измерваме, че те са на $l = 10.3 \text{ mm}$ от него. Също имаме, че на $\theta_0 = 8.18'$ отговарят $l_0 = 24.2 \text{ mm}$ (за учениците l и l_0 ще се различават). Използвайки мащаба на изображението, определяме, че ъгловото им отстояние на звездите от центъра на галактиката е:

$$\theta = \theta_0 \frac{l}{l_0} = 3.48' = 1.013 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

От даденото ни разстояние до М63 изчисляваме, че истинското физическо разстояние от тях до центъра е:

$$r_c = d\theta = 8000 \text{ pc}$$

Също имаме дадена графика на ротационната лъчева скорост на галактиката като функция от разстоянието r от центъра ѝ. Чрез нея измерваме скоростта, която отговаря на разстояние r_c . Получава се, че тя е $v_{r,c} = 210 \text{ km/s}$. Тази скорост обаче не е коригирана за наклона на галактиката i . От снимката на М63 се вижда, че лъчът на зрение не е разположен в равнината на галактиката, а тя е наклонена към нас. Можем да измерим наклона като определим отношението между малката и голямата ѝ полуос.



От чертежа се вижда, че

$$\cos i = \frac{b}{a}$$

В милиметри $2b = 59 \text{ mm}$ и $2a = 108 \text{ mm}$, съответно $i \approx 57^\circ$.

Оттук пресмятаме пълната пространствена скорост на звездите в квадратчето:

$$v_c = \frac{v_{r,c}}{\sin i} = 250.7 \text{ km/s}$$

Периодът за едно пълно завъртане около центъра на галактиката съответно е:

$$T_c = \frac{2\pi r_c}{v_c} = 1.97 \times 10^8 \text{ yr}$$

Д) За да изчислим пълната наблюдавана лъчева скорост на точките в квадратчето, е необходимо да отчетем и това, че галактиката се отдалечава от нас. Тъй като пекулярната ѝ скорост е пренебрежима, то тя има пространствена скорост единствено поради разширението на Вселената. Използваме закона на Хъбъл, за да изчислим нейната стойност:

$$v_r = H_0 d = 553 \text{ km/s}$$

където сме приели $H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{s.Mpc}}$.

Тъй като М63 се върти по часовниковата стрелка, то звездите в квадратчето се отдалечават от нас. Следователно трябва към горната скорост да прибавим лъчевата скорост заради въртенето около центъра на галактиката. Финално получаваме, че

$$v_{r,f} = v_r + v_{r,c} = 763 \text{ km/s}$$

Използваме формулата за ефект на Доплер, за да изчислим финалната наблюдавана дължина на вълната за Н α :

$$\lambda_{obs} = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_{r,f}}{c} \right) = 6579.5 \text{ \AA}$$

Критерии за оценяване (общо 20т.):

А) общо 2т.

1т. – за правилен чертеж и разсъждения относно положението на облака с максимална лъчева скорост

1т. – за правилен буквен израз

Б) общо 2т.

1т. – за правилен чертеж и разсъждения относно положението на облака с минимална лъчева скорост

1т. – за правилен буквен израз

В) общо 8т.

1т. – за съобразяване, че за графики А-С трябва да се вземе пика, отместен на най-малка честота

1т. – за правилно записана формула за ефект на Доплер

3х0.5т. – за измерване на честотите, съответстващи на 50% от интензитета за графики А-С (допуска се отклонение до 0.3MHz)

3x1т. – за определяне на галактичните дължини на графики А-С (1т. за отклонение до 5° , 0.5т. за отклонение до 7°)

1т. – за правилни разсъждения относно липсата на червено отместване на пика на графика D

0.5т. – за правилно определяне на галактичната дължина на графика D

Г) общо 5т.

1т. – за правилното определяне на ъгловото отстояние на звездите в квадратчето от центъра на галактиката

1т. – за изчисляване на истинското физическо разстояние до центъра r_c

1т. – за измерване на ротационната лъчева скорост, съответстваща на $r_c = 8\text{kpc}$

1т. – за определяне на наклона i на галактиката и отчитане на ефекта му върху скоростта на въртене

1т. – за изчисляване на периода за едно пълно завъртане около галактичния център

Д) общо 3т.

1т. – за използване на закона на Хъбъл за определяне на скоростта на отдалечаване на галактиката

1т. – за съобразяване, че финалната лъчева скорост е сума на скоростта на отдалечаване и ротационната лъчева скорост

1т. – за използване на формулата за ефект на Доплер и определяне на наблюдаваната дължина на вълната