

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Подборен кръг, 12 юли 2025 г., Варна, теоретичен тур
Младша възраст – Решения

Задача 1. Астероиди в опозиция. Поради няколко отделни фактора астероидите от Главния пояс са много по-ярки в опозиция, отколкото в други конфигурации. За да планираме наблюденията им, е важно да пресмятаме ъгловата им скорост спрямо звездите. Ъгловата скорост спрямо звездите на астероид в опозиция обикновено не е равна на ъгловата му скорост по орбитата, тъй като при пресмятане на ъглови скорости по небето разглеждаме въртене около наблюдателя на Земята, а не около Слънцето.

Ще разглеждаме само астероиди на кръгова орбита около Слънцето, обикалящи в същата посока като Земята в равнината на земната орбита.

- **А)** Колко дъгови секунди изминава такъв астероид спрямо звездите за един час, в опозиция, ако радиусът на орбитата му е 3.3 au? Скоростта на Земята по орбитата ѝ е 29.8 km/s. **[3 т.]**
- **Б)** Нека да си представим друг такъв астероид със следното свойство: Намираме се на повърхността на астероида в момент на опозиция спрямо Земята. За нас центърът на Земята, центърът на Слънцето и дадена звезда са в една и съща посока. В този момент Слънцето и Земята се отдалечават от звездата в противоположни посоки по небето, но с една и съща ъглова скорост. Покажете, че орбиталният период на астероида около Слънцето в години е φ^3 , където числото $\varphi = 1.6180\dots$ е златното сечение (решението на уравнението $\varphi^2 = \varphi + 1$). **[5 т.]**
- **В)** В Главния пояс ли е астероидът от подусловие **Б)**? Аргументирайте се. **[1 т.]**
Измежду големите астероиди този с най-близка орбита до астероида в **Б)** е 214 Aschera.
- **Г)** Астероидът 214 Aschera има абсолютна звездна величина $H = 9.2$, тоест ако го гледахме от Слънцето и се намираше на земната орбита, звездната му величина би била 9.2 mag. Каква е звездната му величина в опозиция? **[3 т.]**
- **Д)** Астероидът 214 Aschera може да бъде разгледан като триосен елипсоид с отношение на полуосите $a : b : c = 2.27 : 1.83 : 1$, среден радиус $R = (abc)^{1/3} = 11.6$ km и период на въртене $T_{ROT} = 6.84$ h около малката ос (c). Каква е максималната скорост на точка от повърхността на астероида спрямо оста на въртене? **[3 т.]**

Справочни данни:

Астрономическа единица

$$1 \text{ au} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Решение.

А) Ъгловата скорост по небето е равна на тангенциалната скорост v_T спрямо наблюдателя (в случая – Земята), разделена на разстоянието (което в опозиция е $r_A - r_E = 3.3 \text{ au} - 1 \text{ au} = 2.3 \text{ au}$):

$$\omega_1 = \frac{v_T}{r - r_E}.$$

В опозиция скоростите на Земята v_E и на астероида v_A са успоредни една спрямо друга и перпендикулярни спрямо направлението Земя-астероид. Следователно $v_T = v_E - v_A$. Кръговата скорост на астероида е

$$v_A = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r}} = \frac{v_E}{\sqrt{3.3}} = 16.4 \text{ km/s.}$$

Заместваме и получаваме

$$\omega_1 = \frac{v_E - v_A}{r_A - r_E} = 3.893 \times 10^{-8} \text{ rad/s} = 28.9''/\text{h.}$$

За един час астероидът в опозиция изминава **28.9''**.

Б) Да означим радиуса на орбитата на астероида с r , а скоростта по тази орбита с v . Ъгловата скорост на Земята спрямо звездите, гледано от астероида, е равна на ъгловата скорост $\omega'_1 = \frac{v-v_E}{r-r_E}$ на астероида спрямо звездите, гледано от Земята, в опозиция. А ъгловата скорост на Слънцето спрямо звездите, гледано от астероида, е равна на ъгловата скорост $\omega'_2 = \frac{v}{r}$ на астероида спрямо звездите, гледано от Слънцето. Казано е по условие, че $\omega'_1 = \omega'_2$, откъдето

$$\frac{v_E - v}{r - r_E} = \frac{v}{r} \Rightarrow \frac{v_E}{v} - 1 = 1 - \frac{r_E}{r}.$$

Прилагаме формулата за кръгова скорост и стигаме до

$$\sqrt{\frac{r}{r_E}} - 1 = 1 - \frac{r_E}{r}$$

Полагаме $r/r_E \equiv k$, след което

$$\sqrt{k} - 1 = 1 - \frac{1}{k}.$$

Дясната страна се разлага на $\frac{k-1}{k} = \frac{(\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)}{k}$, следователно

$$k = \sqrt{k} + 1.$$

Знаем, че златното сечение е положителното число, за което е вярно $\varphi^2 = \varphi + 1$. Сравняваме това с горното уравнение и заключаваме, че $\sqrt{k} = \varphi = 1.6180$, тоест $k = \varphi^2 = 2.6180$. Оттук радиусът на орбитата на астероида е 2.618 аи.

Остава да намерим орбиталния период с III закон на Кеплер:

$$\frac{T}{1 \text{ yr}} = \left(\frac{r}{r_E}\right)^{3/2} = (\varphi^2)^{3/2} = \varphi^3.$$

Действително периодът на астероида е φ^3 години.

В) Почти всички астероиди в Главния пояс са с голяма полуос в интервала 1.8 – 4.0 аи. Астероид с радиус на орбитата 2.618 аи попада в Главния пояс (да).

Г) Лъчистият поток, който астероидът създава на земното небе, отслабва с разстоянието r Слънце-астероид на 2-ра степен (преди отражението) и с разстоянието d астероид-Земя на 2-ра степен (след отражението). Той също така е пропорционален на коефициент, който зависи от фазовия ъгъл (ъгълът Слънце-астероид-Земя), но ако сравняваме астероида в опозиция с друга конфигурация в опозиция, този коефициент се съкращава.

Прилагаме формулата на Погсън, като сравняваме астероид в опозиция със звездна величина m и същия астероид на разстояние $r_E = 1$ аи и от наблюдателя, и от Слънцето, при фазов ъгъл 0 (при тази ситуация звездната му величина е H):

$$m - H = -2.5 \lg \left(\frac{r_E^2 r_E^2}{r^2 (r - r_E)^2} \right).$$

Тук ползвахме, че разстоянието Слънце-астероид е r , а разстоянието наблюдател-астероид е $r - r_E$. Ако минем в астрономически единици и преработим уравнението, получаваме

$$m = H + 5 \lg(r(r - r_E)),$$

$$m = H + 5 \lg(r(r - 1)) = 9.2 + 5 \lg(2.618 \times 1.618) = \mathbf{12.3}.$$

Д) Заместваме отношението на полуосите $a:b:c = 2.27:1.83:1$ във формулата $R = (abc)^{1/3} = 11.6 \text{ km}$, за да пресметнем полуосите:

$$\begin{aligned} abc &= R^3, \\ (2.27 \times 1.83)c^3 &= R^3, \\ c &= \frac{R}{(2.27 \times 1.83)^{1/3}} = 7.22 \text{ km}. \end{aligned}$$

Ако астероидът се върти около c , то максималното отдалечаване на точка от повърхността му от оста на въртене е

$$a = 2.27c = 16.4 \text{ km}.$$

При ротационен период $T_{\text{rot}} = 6.84 \text{ h}$ максималната скорост на повърхността на астероида при въртене е

$$v_{\text{rot}} = \frac{2\pi a}{T_{\text{rot}}} = 15.1 \text{ km/h} = \mathbf{4.2 \text{ m/s}}.$$

Александър Куртенков

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

А) Общо – 3 т.

Б) Общо – 5 т. (За вярно изпълнено числено решение – поне 4 т.)

В) Общо – 1 т.

Забележка. В случай, че участникът не е решил Б), може да вземе наготово периода от φ^3 години и да приложи III закон на Кеплер. Тогава следва да получи 2 т.: 1 т. за В) и 1 т. за III закон на Кеплер към Б).

Г) Общо – 3 т.

Д) Общо – 3 т.

Задача 2. Снимка на Луната. Даденият на Фигура 1 кадър е заснет миналата година от българския астроном Никола Каравасилев по време на едно от неговите пътувания в северното полукълбо. На него се вижда Луната, която е разположена много близо до видимия хоризонт.

А) В каква фаза е Луната? На каква височина над хоризонта се намира центърът на лунния диск? [3 т.]

• Б) На каква най-малка северна географска ширина φ_{min} би могло да се е намирал Никола, когато е заснел кадъра? [7 т.]

• В) Нека да предположим, че географската ширина на Никола действително е била равна на φ_{min} . Оценете максималната височина над хоризонта, на която Луната ще се наблюдава за това място, след точно шест синодични лунни месеца. [5 т.]

Разстоянието между центровете на Земята и Луната в момента на заснемане е $r = 393774 \text{ km}$. Ъгловият размер на Луната, гледано от Никола, е $\delta = 30'22''$. Не отчитайте рефракцията на светлината в атмосферата.

Справочни данни:

Радиус на Земята

$$R_E = 6378 \text{ km}$$

Радиус на Луната

$$R_L = 1738 \text{ km}$$

Наклон на земната ос

$$\varepsilon = 23^\circ 26'$$

Наклон на лунната орбита спрямо еклиптиката

$$i = 5^\circ 9'$$



Фигура 1. Снимка на Луната.

Решение.

А) На снимката се вижда, че е огрян малко повече от половината лунен диск и че светлата част от Луната е отлясно. Понеже наблюденията са проведени от северното полукълбо на Земята, фазата на Луната е малко след **първа четвърт**.

На даденото изображение, лунният диск има диаметър 11 mm. Използвайки дадения в справочните данни видим ъглов диаметър на Луната, намираме, че ъгловият мащаб на снимката по небето е $166''/\text{mm}$. Центърът на Луната на снимката е на 41 mm от хоризонта. Следователно височината е му е $h = 1.9^\circ$.

Б) На снимката се вижда, че лунният терминатор е практически вертикален. Това означава, че Луната е много близо до горна кулминация. Тъй като кадърът е заснет в северното полукълбо, Луната ще се вижда в посока юг и измерената височина в предното подусловие е именно височината ѝ в горна кулминация.

Най-малката северна географска ширина, на която бихме могли да заснемем този кадър, съответства на случая, в който Луната има своята най-южна възможна деклинация $\delta_{\min}$. Нейната стойност е

$$\delta_{\min} = -(\varepsilon + i) = -28^\circ 35'.$$

Ако не отчитаме денонощния паралакс на Луната (тоест ако приемем, че тя е на безкрайно разстояние от нас), за височината h можем да запишем

$$h = 90^\circ + \delta_{\min} - \varphi_{\min}.$$

Оттук намираме, че

$$\varphi_{\min} = 90^\circ + \delta_{\min} - h = 59^\circ 25'.$$

Сега ще направим и опит да отчетем паралакса, разглеждайки взаимното разположение на наблюдателя (т. H) и центъра на Луната (т. L). На Фигура А1 земната ос, H и L са в една равнина, защото Луната е на юг за наблюдателя. Означението $z = 90^\circ - h = 88.1^\circ$ указва зенитното отстояние на Луната. В пресмятанията си няма да използваме z поради лошата точност на измерване, като вместо това ще гледаме само справочните данни, които са дадени с много значещи цифри. Разстоянието LH намираме по формулата

$$LH = \frac{2R_L}{\delta [\text{rad}]} = 393511 \text{ km}.$$

Можем и да изразим LH спрямо разстоянието Земя-Луна чрез косинусовата теорема:

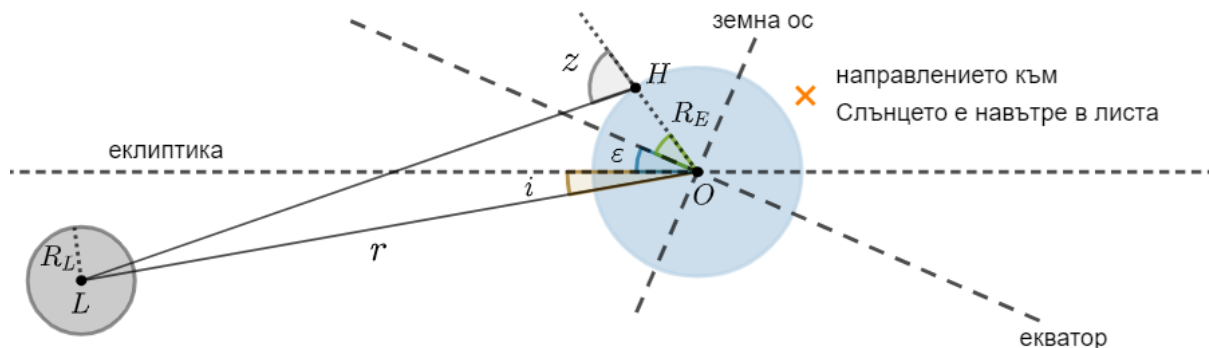
$$LH^2 = R_E^2 + r^2 - 2R_E r \cos \angle LOH,$$

$$\Rightarrow \angle LOH = \frac{R_E^2 + r^2 - LH^2}{2R_E r} = 87^\circ 11'.$$

За този ъгъл е изпълнено също

$$\angle LOH = \varphi_{\min} + i + \varepsilon.$$

Така $\varphi_{\min} = \angle LOH - i - \varepsilon \approx \mathbf{58^\circ 34'}$.



Фигура А1. Земя, Луна и Никола.

В) В разгледания случай Луната достига своята максимална възможна южна деклинация. Това означава, че в този момент лунната орбита е разположена така, че възходящият ѝ възел съвпада с пролетната равноденствена точка.

След точно шест синодични лунни месеца фазата на Луната ще бъде същата, т.е. тя ще бъде на точно същата конфигурация спрямо Слънцето, както в деня, в който е заснета снимката. Интервалът от време е равен приблизително на 177 денонощия (6×29.5 d) или почти точно на половин година. Поради това Слънцето тогава ще бъде почти точно в противоположната точка по еклиптиката спрямо тази, в която то се е намирало, когато е получен даденият кадър. Това означава, че Луната също ще бъде приблизително в противоположната част на своята орбита.

Лунната орбита ще си остава разположена почти точно по същия начин спрямо еклиптиката, защото периодът на прецесия на линията на възлите е значително по-дълъг от половин година (неговата продължителност е около 18.6 години). Съответно можем да считаме, че след шест синодични периода деклинацията на Луната ще бъде максималната възможна, но в посока север спрямо небесния екватор. Стойността на тази деклинация е

$$\delta_{\max} = \varepsilon + i = 28^\circ 35'.$$

Понеже в това подусловие се иска да се направи само оценка за максималната височина, то можем и да не отчитаме паралакса на Луната. Височината се изчислява така:

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi_{\min} + \delta_{\max} \approx \mathbf{58^\circ}.$$

Никола Каравасилев

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

- А)** За правилни разсъждения относно фазата на Луната и верен извод – **1 т.**
 За определяне на ъгловия мащаб по небето чрез измерване на диаметъра на лунния диск – **1 т.**
 За определяне на височината на центъра на лунния диск над хоризонта и верен резултат – **1 т.**
- Б)** За съобразяване на това, че Луната трябва да има максимална южна деклинация – **0.5 т.**
 За намиране на максималната южна деклинация на Луната – **0.5 т.**

За правилно геометрично представяне на положенията на Луната и наблюдателя, верни геометрични разсъждения за намиране на географската му ширина и правилен краен резултат – **6 т.** (ако ученикът не отчита денонощният паралакс, се присъждат максимум **3 т.**)

Забележка. Ученикът може да е разсъждавал по начин, съществено различен от този, който е представен в авторското решение. Ако разсъжденията са верни и е получен правилен резултат, следва да се присъдят максимален брой точки.

В) За правилно съобразяване на начина, по който лунната орбита и разположена спрямо еклиптиката, в деня, в който е получена снимката – **1 т.**

За правилно съобразяване на деклинацията на Луната шест синодични месеца след заснемането на тази снимка – **2 т.**

За верен израз и правилна числена стойност за максималната височина над хоризонта, която Луната ще достигне – **2 т.**

Задача 3. Спътник на Земята. Един изкуствен спътник се движи по кръгова орбита около Земята точно в равнината на екватора и по посока на земното околоосно въртене. Орбиталната скорост на спътника е равна на $v = 6.9 \text{ km/s}$.

- **А)** Намерете височината на спътника над земната повърхност h . **[3 т.]**
- **Б)** От каква част от земната повърхност k спътникът може да бъде наблюдаван в даден момент? **[3 т.]**
- **В)** От каква част от земната повърхност k' спътникът може да се наблюдава като цяло? **[3 т.]**
- **Г)** Намерете ъгловата скорост на спътника ω спрямо звездите за наблюдател на Земята, ако спътникът се намира на хоризонта на наблюдателя. **[3 т.]**
- **Д)** Колко време Δt ще измине след преминаването на спътника през зенита на наблюдател, докато височината му над хоризонта на наблюдателя намалее до 60° ? **[3 т.]**

Не отчитайте атмосферната рефракция.

Справочни данни:

Гравитационна константа

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Маса на Земята

$$M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Радиус на Земята

$$R = 6378 \text{ km}$$

Звездно денонощие

$$T_* = 23 \text{ h } 56 \text{ m } 04 \text{ s}$$

Решение.

А) Нека с v да означим орбиталната скорост на спътника, а h да е търсената височина над земната повърхност. Тъй като той се движи по кръгова орбита, имаме

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \Rightarrow h = \frac{GM}{v^2} - R = \mathbf{2030 \text{ km.}}$$

Б) За максималната географска ширина $\varphi_{\max}$, от която спътникът може да бъде наблюдаван, може да запишем

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{R}{R+h}.$$

Областта от земната повърхност, от която в даден момент можем да наблюдаваме спътника, представлява сегмент от Земята с централен ъгъл $\varphi_{\max}$. Оттук можем да намерим, че площта на този сегмент е

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi_{\max}).$$

Търсената част от площта на цялото земно кълбо е

$$k = \frac{S}{4\pi R^2} = \frac{1 - \cos \varphi_{\max}}{2} = \frac{h}{2(R + h)} = \mathbf{0.12}.$$

В) Областта, по земната повърхност, от която като цяло (в течение на дълъг период от време) можем да наблюдаваме спътника, е заключена между паралелите с географска ширина $\varphi_{\max}$ на север и на юг от екватора. Това означава, че областите, от които спътникът е ненаблюдаем, представляват сферични шапки с централни ъгли $90^\circ - \varphi_{\max}$. Общата площ на тези две области е

$$S' = 4\pi R^2(1 - \cos(90^\circ - \varphi_{\max})) = 4\pi R^2(1 - \sin \varphi_{\max}).$$

Частта, която те заемат от площта на земното кълбо, е

$$k_a = \frac{S'}{4\pi R^2} = 1 - \sin \varphi_{\max}.$$

Оттук следва, че частта от повърхността на Земята, от която спътникът може да се наблюдава като цяло, е

$$k' = 1 - k_a = \sin \varphi_{\max} = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{\max}} = \frac{\sqrt{(2R + h)h}}{R + h} = \mathbf{0.65}.$$

Г) Когато спътникът се намира на видимия хоризонт, разстоянието между него и наблюдателя е

$$d = \sqrt{(R + h)^2 - R^2}.$$

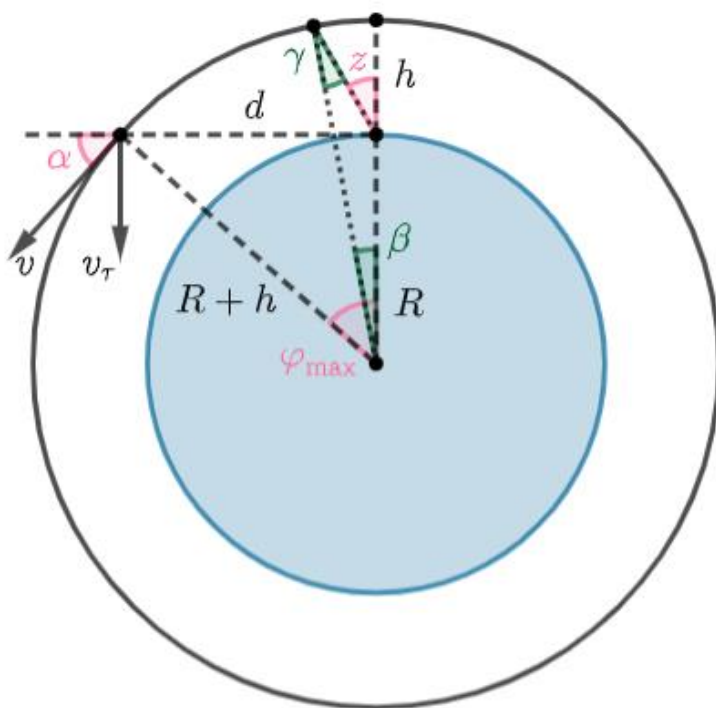
Нека да означим с α ъгъла, който векторът на скоростта на спътника сключва с хоризонта (лъча на зрение) в този момент. Използвайки чертежа от Фигура А2, можем да направим извода, че този ъгъл е равен на $\varphi_{\max}$.

Компонентата на скоростта на спътника, която е перпендикулярна на лъча на зрение, може да се изрази като

$$v_\tau = v \sin \alpha = v \sin \varphi_{\max}.$$

В този случай линейната скорост на наблюдателя е насочена точно по лъча на зрение и по тази причина не трябва да бъде отчитана. Затова видимата ъглова скорост е

$$\omega_2 = \frac{v_\tau}{d} = \frac{v \sin \varphi_{\max}}{\sqrt{(R + h)^2 - R^2}} = \mathbf{2.8 \text{ arcmin/s}}.$$



Фигура А2. Движение на спътника по орбитата му.

Д) Орбиталният период на спътника е

$$P = \frac{2\pi(R+h)}{v} \approx 128 \text{ min.}$$

Понеже спътникът се движи по своята орбита в същата посока, в която Земята се върти около своята ос, то ако t е интервалът от време между две последователни преминавания на спътника през зенита за един и същи наблюдател, ще е изпълнено

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T_*} \Rightarrow t = \frac{PT_*}{T_* - P} \approx 140 \text{ min.}$$

Нека със $z = 30^\circ$ да означим зенитното отстояние на спътника. Използвайки означенията на чертежа, можем да запишем следното равенство, произтичащо от синусовата теорема:

$$\frac{\sin(180^\circ - z)}{R+h} = \frac{\sin \gamma}{R}.$$

Пресмятаме, че $\gamma \approx 22.3^\circ$. За централния ъгъл може да запишем $\beta = 180^\circ - (180^\circ - z + \gamma) = z - \gamma = 7.7^\circ$. Търсеният интервал Δt се отнася към периода P , както ъгълът β се отнася към 360° . Следователно

$$\Delta t = \frac{\beta}{360^\circ} P \approx \mathbf{3 \text{ min.}}$$

Никола Каравасилев

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

- А)** За правилен буквен израз за височината на спътника – **2 т.**
За правилен числен отговор – **1 т.**
- Б)** За правилен израз за максималната географска ширина, от която спътникът може да се наблюдава – **1 т.**
За правилен израз за площта на областта, от която спътникът може да бъде видян в даден момент – **1 т.**
За правилно изразяване на търсената част от повърхността на земното кълбо и верен числен резултат – **1 т.**
- В)** За правилна геометрична представа за областите от които спътникът може да се наблюдава като цяло – **0.5 т.**
За правилно изразяване на общата площ на областите, от които спътникът не може да бъде наблюдаван – **1.5 т.**
За верен израз и числена стойност за частта от земната повърхност, която спътникът може да бъде наблюдаван – **1 т.**
- Г)** За намиране на разстоянието до спътника на видимия хоризонт – **1 т.**
За изразяване на тангенциалната компонента на скоростта – **1 т.**
За правилен израз за видимата ъглова скорост – **0.5 т.**
За верен числен резултат – **0.5 т.**
- Д)** За намиране на „синодичния“ период на спътника – **0.5 т.**
За правилна геометрична постановка за намиране на централния ъгъл, на който спътникът трябва да се отклони спрямо наблюдателя, и съответните алгебрични изразявания – **1.5 т.**
За правилен израз за търсения интервал и верен числен резултат – **1 т.**
-

Задача 4. Две звезди в телескоп. Тази вечер на лагера във Варна ($\varphi = 43^\circ \text{ N}$, $\lambda = 28^\circ \text{ E}$) безкрайно любопитният млад астрофизик, географ и историк Божида Тодоров иска да се поупражни върху работа с телескоп. В апаратната на варненската обсерватория той е намерил окуляр с променливо фокусно разстояние и няма търпение

да го изпробва. Божидар избира да наблюдава две слаби звезди, които са близо една до друга по небето.

- **А)** Оказва се, че сборът на височините на звездите над математическия хоризонт може да бъде най-много $179^{\circ}39'$, независимо откъде наблюдаваме по земната повърхност. Намерете ъгловото отстояние между звездите β . Аргументирайте отговора си внимателно. Ако не можете да намерите β , продължете работата си със стойността $\beta = 18'$. **[4 т.]**

Божидар знае, че във Варна звездите кулминират около 23:26 по гражданско време. Малко след кулминацията им той решава да наблюдава как те преминават през зрителното поле на застопорения му телескоп. Когато работи с фокусно разстояние на окуляра $f_1 = 12.5 \text{ mm}$, звездите влизат точно едновременно в кръга на зрителното поле и излизат от него след време $t_1 = 125 \text{ s}$. Ако промени фокусното разстояние на $f_2 = 25.0 \text{ mm}$, звездите няма да променят яркостта си, но едновременното им преминаване през зрителното поле вече трае $t_2 = 366 \text{ s}$.

- **Б)** Намерете екваториалните координати на звездите. **[6 т.]**

Сега Божидар променя фокусното разстояние на $f_3 = 26.0 \text{ mm}$, и изведнъж двете звезди стават невидими за него!

- **В)** Обяснете това явление. Ако знаете, че фокусното разстояние на обектива е $F = 630 \text{ mm}$, оценете видимата звездна величина на звездите. **[5 т.]**

Упътване: Приемете, че размерът на зрителното поле е правопрпорционален на фокусното разстояние на окуляра.

Решение.

А) Да начертаем земното кълбо и да означим с A' и B' точките по земната повърхност, за които съответно всяка от звездите A и B е в зенита в даден момент. Дъгата $A'B'$ ще се явява ъгловото отстояние β между A и B . Ако мястото на наблюдателя по земното полукълбо е точка X , то мярката на дъгата XA' по земното полукълбо представлява зенитното отстояние на A . Аналогично и за B .

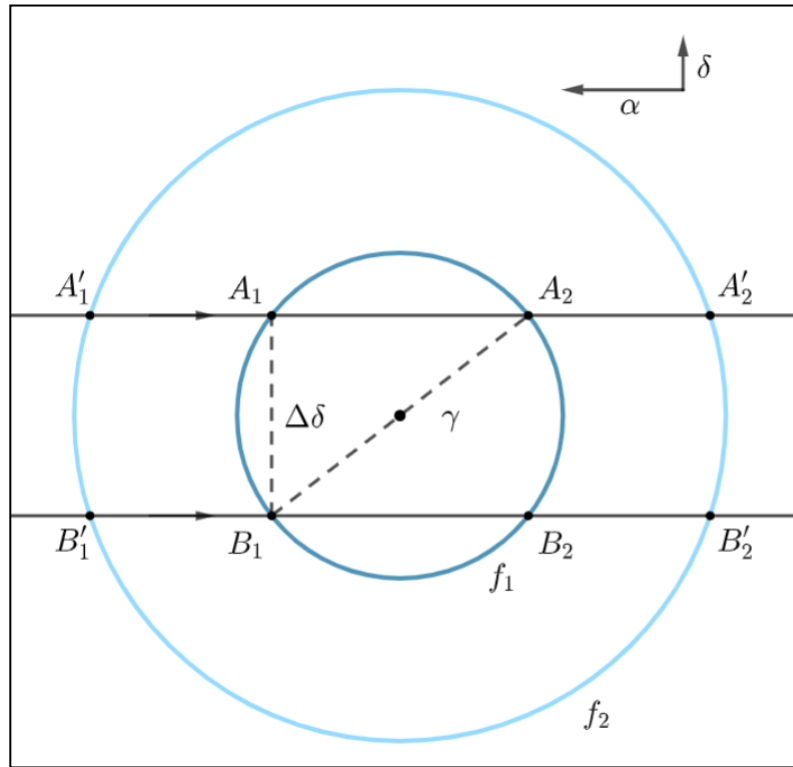
По условие сборът от височините $h_A + h_B$ не става повече от $179^{\circ}39'$. Понеже зенитните отстояния са $z_{A,B} = 90^{\circ} - h_{A,B}$, сборът от зенитните отстояния явно е най-малко $21'$, независимо от положението на X .

Сега за по-лесно ще решаваме обратната задача – ако знаем β , каква е минималната сума на зенитните отстояния на звездите където и да е по земното кълбо? Тук искаме сумата $XA' + XB'$ да е минимална. Тя със сигурност е по-голяма или равна на $A'B'$, защото най-кратката траектория между две точки по земното кълбо е именно големият кръг, който ги свързва (тоест кръгът по сферата, който минава през точките и чийто радиус е равен на радиуса на сферата). Виждаме, че равенство може да се достигне, ако X лежи където и да е по малката дъга $A'B'$. Затова $z_A + z_B \geq \beta$. Заклучаваме, че $\beta = 21'$.

Б) Деклинацията на звездите δ може да се намери, сравнявайки времената за преминаването през зрителното поле на окулярите с фокусни разстояния f_1 и f_2 . Съгласно упътването означаваме техните зрителни полета с γ и 2γ . Когато звездите преминават през зрителното поле на застопорен телескоп, ние виждаме тяхното движение по денонощните им паралели. Тъй като зрителните полета обхващат малки ъгли, отрязъците от успоредните денонощни паралели на A и B в полетата са малки дъги и затова можем да пренебрегнем кривината им, приемайки ги за успоредни отсечки. Ъгловата скорост по тези отсечки е $\omega_E \cos \delta$, където $\omega_E = 2\pi/T_E$ е Ѫгловата скорост на Земята (в rad/s), а $\cos \delta$ е множител, който коригира за геометричен ефект – по-далече от небесния екватор звездите обират $\cos \delta$ пъти по-малки ъгли при въртенето около небесната ос.

Звездите A и B влизат и излизат от зрителното поле точно едновременно. Затова отсечките им по зрителното поле са успоредни и равни, като освен това звездите имат и еднаква ректасцензия, тоест лежат на един меридиан. Записваме, че разликата в ректасцензиите е $\Delta\alpha = 0$, като това ни дава също, че разликата в деклинациите им е $\Delta\delta = \beta = 21'$.

Сега съставяме общ чертеж на преминаването през зрителните полета. Тъмносиният кръг съответства на полето на окуляра с f_1 , а светлосиният – на този с f_2 . Условно приемаме, че звездата A има по-голяма деклинация. Ако деклинацията нараства нагоре, то звездите се движат надясно, а ректасцензията нараства наляво. С индекси 1 и 2 ще бележим съответно точките на влизане и на излизане.



Фигура А1. Преминаване на звездите по зрителното поле.

Имаме, че $A_1A_2 = (\omega_E \cos \delta)t_1$ и $A_1B_1 = \Delta\delta = \beta$. Също така, от $A_1A_2 \perp A_1B_1$ следва, че A_2B_1 е диаметър на полето и съответно има мярка γ . Подобно съображение може да се направи и за по-голямото поле. Така стигаме до системата

$$\begin{aligned} ((\omega_E \cos \delta)t_1)^2 + \Delta\delta^2 &= \gamma^2, \\ ((\omega_E \cos \delta)t_2)^2 + \Delta\delta^2 &= (2\gamma)^2. \end{aligned}$$

Умножаваме първото уравнение по 4 и изваждаме от него второто, за да изключим γ . Така достигаме

$$\cos \delta = \frac{\sqrt{3} \Delta\delta}{\omega_E \sqrt{t_2^2 - 4t_1^2}} \Rightarrow \delta = \pm 57.1^\circ.$$

Отрицателната деклинация се изключва, защото в този случай звездите биха били неизгряващи за Варна. Като отговор оставяме $\delta = +57.1^\circ$. Може да намерим и $\gamma = 34'$, но това не се иска от нас в условието. При правилна работа с помощната стойност $\beta = 18'$ бихме получили $\delta = +43.1^\circ$.

Намирането на ректасцензията на звездите може да се направи независимо от останалата задача. Датата е 12.07 и в България се спазва лятно часово време. Следователно кулминацията на звездите става в 22:26 местно (средно слънчево) време

за централния меридиан на българския часови пояс, 30° E. Варна е на 2° западно от този меридиан, така че местното време във Варна е 22:18.

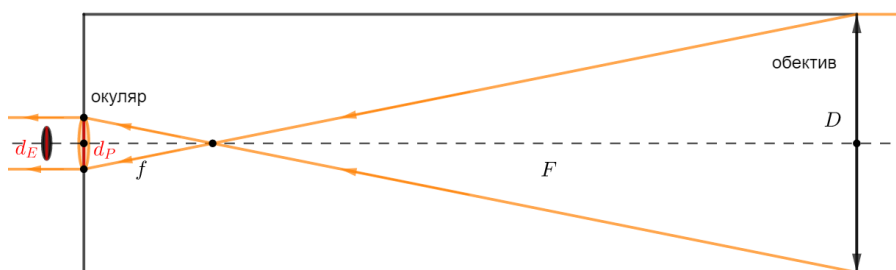
Приемаме за септемврийското равноденствие дата 22.09. Датата на наблюдение 12.07 е $31 + 31 + 10 = 72$ дни преди равноденствието. Знаем, че на 22.09 средното слънчево време и звездното време съвпадат, като с всеки ден след това звездното време избързва с $3\text{ m } 56\text{ s}$. От това възстановяваме, че звездното време за наблюдателя е $4\text{ h } 43\text{ m}$ назад от 22:26, тоест то е 17:43, или $s = 17^{\text{h}}43^{\text{m}}$. Сега използваме връзката между звездно време s , часов ъгъл t и ректасцензия α :

$$s = \alpha + t.$$

При кулминация $t = 0^{\text{h}}$, с което даваме отговор $\alpha = 17^{\text{h}}43^{\text{m}}$.

В) Главната идея тук е, че при твърде големи фокусни разстояния не всичката светлина, която се фокусира, ще попадне в зеницата на наблюдателя. Успоредните лъчи, влизащи в обектива, излизат при окуляра като успореден сноп с ширина d_p , която се нарича изходяща зеница. От подобни триъгълници може да намерим за размера на изходящата зеница

$$\frac{d_p}{f} = \frac{D}{F} \Rightarrow d_p = \frac{Df}{F}.$$



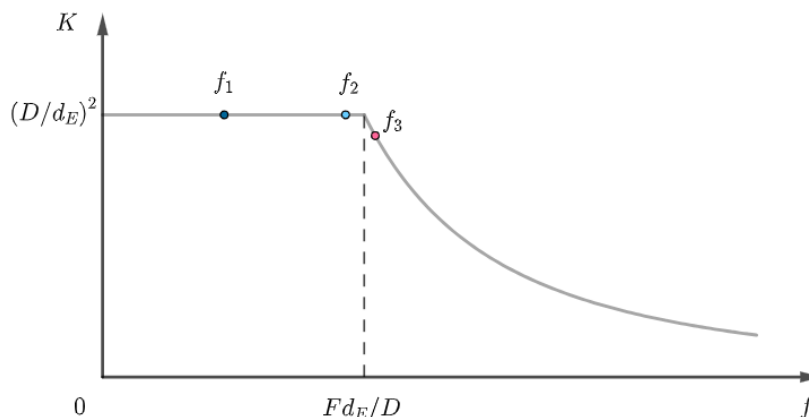
Фигура А2. Илюстрация на идеята за изходяща зеница.

Когато d_p надвишава размера на зеницата на наблюдателя d_E , той ще получава част $(d_E/d_p)^2$ от получената от телескопа светлина. Сравнявайки с наблюдения с просто око, обективът получава $(D/d_E)^2$ пъти повече поток. Затова при $d_p > d_E$ наблюдателят прихваща

$$K = \left(\frac{D}{d_E}\right)^2 \left(\frac{d_E}{d_p}\right)^2 = \left(\frac{D}{d_p}\right)^2 = \left(\frac{F}{f}\right)^2$$

пъти повече поток. Виждаме, че колкото повече се увеличава фокусното разстояние, толкова по-малко ни помага телескопът.

Разбира се, ако $d_p < d_E$, тоест $f < Fd_E/D \equiv f_{\text{lim}}$, с телескопа имаме подобрение $K = (D/d_E)^2$, което не зависи от f и винаги надвишава $(F/f)^2$. За улеснение може да построим следната графика на K от f :



Фигура А3. Увеличение в потока в зависимост от фокусното разстояние на окуляра.

Нека определим кой окуляр на какво място по графиката съответства. Знаем, че ако увеличим фокусното разстояние от f_1 на f_2 , видимият блясък в телескопа не се променя. Това означава, че и двете са по-малки от f_{lim} и съответстват на хоризонталния участък по графиката. Знаем също, че ако увеличим f_2 със съвсем малко, звездите вече стават невидими. Явно f_3 вече е в другия участък и величината f_{lim} е заключена някъде между f_2 и f_3 , тоест

$$\frac{F d_E}{D} \approx f_2 \Rightarrow \frac{D}{d_E} \approx 24.5.$$

Щом съвсем леко навлизане в другия участък на графиката веднага прави звездите невидими, значи те се регистрират едвам-едвам дори и при максималното $K = K = (D/d_E)^2 = 600$. Това подсказва, че от всяка звезда идва такъв поток Φ , че когато го умножим по K , той за малко надвишава граничния поток на видимост за човешкото око Φ_{min} .

Знаем, че Φ_{min} съответства на звездна величина $m_{\text{lim}} = 6$. Тогава с формулата на Погсън може да намерим звездната величина на нашите звезди:

$$m - m_{\text{lim}} = -2.5 \lg \left(\frac{\Phi}{\Phi_{\text{min}}} \right) = -5 \lg \left(\frac{d_E}{D} \right) = 5 \lg \left(\frac{F}{f} \right),$$

$$m = m_{\text{lim}} + 5 \lg \left(\frac{F}{f} \right) \approx \mathbf{13}.$$

Стефан Иванов

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

- A)** За правилен отговор – **1.5 т.**
 За дадена примерна ситуация, когато се достига максимален сбор на височините – **0.5 т.**
 За доказателство, че няма как сборът да е по-голям – **2 т.**
- Б)** За правилна геометрична постановка на преминаването на звездите през зрителното поле, за разлика в ректасцензиите и деклинациите – **1.5 т.**
 За намиране на $\cos \delta$ – **1.5 т.**
 За изключване на южното полукукло и отговор за δ – **0.5 т.**
 За отчитане на лятното часово време – **0.5 т.**
 За намиране на местното време във Варна – **0.5 т.**
 За намиране на звездното време – **1 т.**
 За намиране на ректасцензията – **0.5 т.**
- В)** За качествени съображения относно изходящата зеница – **1 т.**
 За формулата за изходяща зеница – **1 т.**
 За разбиране, че работим около равнозенично увеличение – **1 т.**
 За разбиране, че работим около граничната звездна величина – **1 т.**
 За оценка на звездната величина – **1 т.**