

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Подборен кръг, 13 юли 2025 г., Варна, практически тур
Старша възраст – Решения

Задача 1. Две планети. Умната планета, обикаляща по кръгова орбита около Могъщата звезда, е населена с високо развити светлосини разумни същества. Те системно наблюдават Дивата планета, на която в бъдеще възнамеряват да построят свои изследователски бази. В таблицата по-долу са дадени данни от наблюдения и измервания. Те са направени през еднакви интервали от време. Всеки интервал се равнява на 52 планетни дни, като в годината за Умната планета има 260 такива дни. Разумните същества използват мерна единица за разстояние, която ще наречем просто мярка, защото думата на техния език е непроизносима за нас. Радиусът на орбитата на Умната планета е 25 мерки.

№	Ъглово отстояние на Дивата планета от звездата за наблюдател на Умната планета в градуси	Посока на видимото отклонение на Дивата планета от звездата	Разстояние между Дивата планета и Умната планета в мерки	Разстояние от Дивата планета до Могъщата звезда в мерки
1	88.5	E	76.8	80.3
2	37.7	E	100.8	82.3
3	14	W	107.3	83.5
4	63.4	W	92.0	83.8
5	124.6	W	66.4	83.3
6	146.2	E	59.4	81.8
7	82.3	E	78.8	79.4
8	32	E	96.0	76.2
9	17.4	W	95.4	72.3
10	60.3	W	76.5	67.7
11	110.1	W	49.2	62.7
12	173.6	E	32.6	57.7
13	99.3	E	43.4	53.3
14	55.2	E	60.2	50.4
15	24.7	E	71.4	49.7
16	9.6	W	76.4	51.6
17	36.4	W	73.5	55.3
18	78.6	W	59.9	60.1
19	146.7	W	43.1	65.1
20	126.9	E	52.0	70.0
21	68.2	E	79.9	74.3
22	22.2	E	100.6	77.9
23	25.9	W	102.1	80.7
24	79.1	W	83.6	82.6
25	146.4	W	61.6	83.7

А) На листа милиметрова хартия начертайте в подходящ мащаб орбитата на Умната планета около Могъщата звезда. По данните от таблицата постройте орбитата на Дивата планета. За тази цел използвайте данните за видимото ъглово отстояние на Дивата планета от звездата и за разстоянието между Дивата планета и Умната планета. Данните за разстоянието на Дивата планета от звездата не използвайте. Препоръчваме ви да работите с мащаб 1 мярка = 1 милиметър. **[9 т.]**

Б) Определете голямата полуос на орбитата и орбиталния период на Дивата планета, като ги изразите в мерните единици на разумните същества. **[3 т.]**

Тези величини ще ви потрѣбват в следващите две подусловия. Ако не успеете да постройте орбитата на Дивата планета и да ги определите от нея, оценете ги по данните в таблицата за разстоянието от Дивата планета до звездата.

В) Нека за наблюдател от Умната планета m_a е видимата звездна величина на Дивата планета (в единици от нашата земна система от звездни величини), когато Дивата планета е едновременно в опозиция и в апоцентъра на своята орбита, а m_p е нейната видима звездна величина, когато е в опозиция и в перицентъра на своята орбита. Пресметнете разликата $\Delta m = m_a - m_p$. **[4 т.]**

Г) Когато Дивата планета е в опозиция и в апоцентъра на орбитата си, жителите на Умната планета я фотографират с астракамера с диаметър на обектива D и фокусно разстояние F_a , а когато Дивата планета е в опозиция и в перицентъра на орбитата си, я фотографират с камера със същия диаметър на обектива, но фокусно разстояние F_p . Намерете отношението на фокусните разстояния F_a/F_p , при което яркостта на единица повърхност от получените изображения на планетата ще е една и съща. **[4 т.]**

Решение.

А) Интервалите от време, през които са получени данните в таблицата, се равняват на $52/260=1/5$ част от годината за Умната планета. Използваме препоръчания ни мащаб и начертаваме по средата на листа милиметрова хартия орбитата на Умната планета около Могъщата звезда във вид на окръжност с радиус 25 mm. С помощта на транспортир и като имаме предвид, че $360^\circ/5=72^\circ$, разделяме окръжността на 5 равни части и обозначаваме това с точки, които ще представляват положенията на Умната планета в моментите на измерванията, дадени в таблицата. Избираме една от точките за начална.

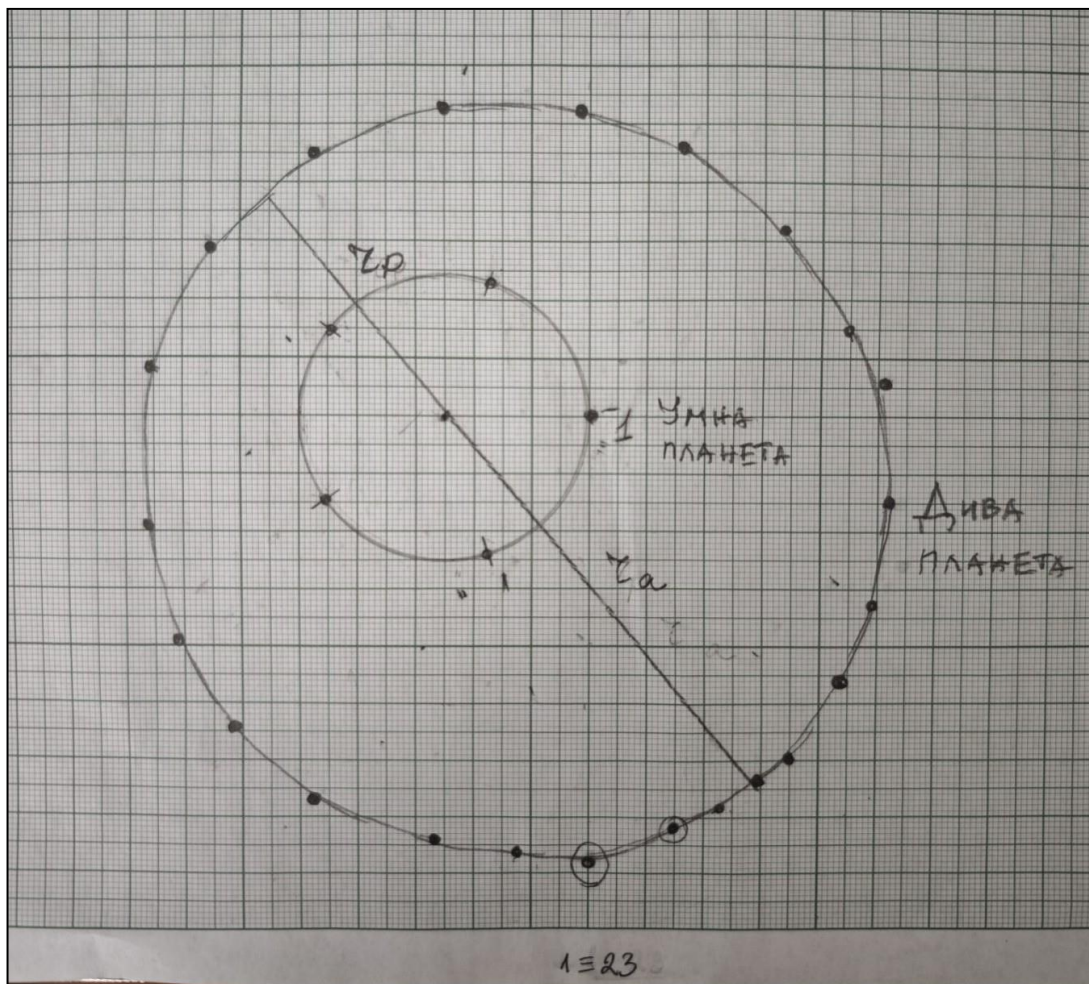
Да приемем, че към нас е насочен северният полюс на Умната планета и тя обикаля около Могъщата звезда в същата посока, в която се върти около оста си, т.е. обратно на часовниковата стрелка. Същото предполагаме и за Дивата планета. Видимото ъглово отстояние на Дивата планета от звездата за наблюдател на Умната планета означаваме с $\Delta\lambda$. Представяме си наблюдател, който стои на повърхността на Умната планета с гръб към нас в положение, при което за него е пладне. За този наблюдател надясно е запад, а наляво е изток. Свързваме Умната планета и звездата с права линия (това е радиус-векторът на планетата). От нея с център в Умната планета отмерваме ъгъл $\Delta\lambda$ надясно, ако отклонението е в посока на запад (W), или наляво, ако отклонението е в посока на изток (E). Прекарваме лъч от Умната планета под ъгъл $\Delta\lambda$ към нейния радиус-вектор. По този лъч отмерваме в съответния мащаб разстоянието до Дивата планета и я нанасяме с точка. Повтаряме същата процедура за следващото измерване, като не забравяме да го направим за следващото положение на Умната планета по нейната орбита, което е на 72° в посока, обратна на часовниковата стрелка спрямо предходното положение. Така, като използваме всички данни от таблицата, построяваме положенията на Дивата планета. Прекарваме през тях плавна линия и очертаваме елиптичната орбита на планетата. Резултатът е показан на Фигура А1.

Б) Първо, можем да забележим, че положенията на Дивата планета при първото и при 23-тото измерване почти точно съвпадат. Така определяме орбиталния период на Дивата планета в единици планетни дни или в години за Умната планета:

$$T = (23 - 1) \times 52 \text{ планетни дни} = 1144 \text{ планетни дни.}$$

$$T = \frac{1144}{260} = \mathbf{4.4 \text{ години.}}$$

Начертаваме голямата ос на орбитата на Дивата планета и я измерваме. Получаваме 133 mm. Голямата полуос на орбитата на тази планета се равнява на $133/2 = 66.5$ мерки.



Фигура А1. Орбитите на Умната планета и Дивата планета.

В) Измерваме разстоянията от Могъщата звезда до Дивата планета в перицентъра и в апоцентъра на нейната орбита. Те са съответно

$$r_p = 49 \text{ мерки}, r_a = 84 \text{ мерки}$$

Когато Дивата планета е в перицентъра, Могъщата звезда създава върху нея осветеност

$$E_{p0} = \frac{L}{4\pi r_p^2},$$

където L е светимостта на звездата. Общаталъчиста енергия, която попада върху Дивата планета, ще бъде

$$W_p = E_{p0} \cdot S = \frac{LS}{4\pi r_p^2},$$

където S е площта на напречното сечение на планетата. Дивата планета ще отрази част от товалъчение към Умната планета и ще създаде върху нея осветеност

$$E_p \propto \frac{1}{(r_p - r_0)^2} \cdot \frac{LS}{4\pi r_p^2}.$$

където r_0 е радиусът на орбитата на Умната планета, а $r_p - r_0$ е разстоянието от Умната планета до Дивата планета, когато последната е в перицентъра на орбитата си и едновременно с това в опозиция за наблюдателите от Умната планета. Тук ние не знаем точните закономерности при отразяването и разсейването на светлината, попадаща върху кълбовидно тяло, следователно не знаем какъв коефициент трябва да поставим пред общия израз от формулата. Затова вместо знака за равенство използваме знака за пропорционалност.

Осветеността, създавана върху Умната планета от Дивата планета в апоцентъра и в опозиция, ще се получи по съвсем аналогична формула:

$$E_a \propto \frac{1}{(r_a - r_0)^2} \cdot \frac{LS}{4\pi r_a^2}.$$

Отношението на двете осветености ще бъде

$$\frac{E_p}{E_a} = \frac{(r_a - r_0)^2 \cdot r_a^2}{(r_p - r_0)^2 \cdot r_p^2} \approx 17.76.$$

По-нататък от формулата на Погсън за разликата между видимите звездни величини на Дивата планета в двата случая намираме:

$$\Delta m = m_a - m_p = 2.5 \lg \frac{E_p}{E_a}$$

$$\Delta m \approx \mathbf{3.12^m}$$

Г) В перицентъра и в опозиция Дивата планета създава осветеност E_p за Умната планета. Като я умножим по площта на обектива на астрокамерата, ще получим общата лъчиста енергия, която преминава през обектива за единица време:

$$W_{0p} = E_p \cdot \frac{\pi D^2}{4}.$$

Тук не отчитаме загубите на лъчение, причинени от отражението и поглъщането в обектива и от оптичските аберации.

Да предположим, че радиусът на Дивата планета е R . Когато тя е в перицентъра на орбитата си и в опозиция, нейният видим ъглов диаметър, изразен в радиани, ще бъде

$$\delta_p = \frac{2R}{r_p - r_0}.$$

Линейния размер на изображението на планетата във фокалната плоскост на обектива на камерата намираме по формулата $d_p = \delta_p F_p$. Лъчистата енергия, преминала през обектива на камерата, ще се раздели по площта на това изображение и ще ни послужи като мярка за неговата повърхностна яркост:

$$I_p = \frac{W_{0p}}{\pi d_p^2 / 4}.$$

За яркостта на изображението, получено когато планетата е в опозиция и в апоцентъра, можем да получим аналогична формула. Накрая можем да съставим отношението на двете яркости:

$$\frac{I_p}{I_a} = \frac{W_{0p}}{W_{0a}} \cdot \frac{d_a^2}{d_p^2}.$$

Като заместим в него всички получени по-горе алгебрични изрази за съответните величини и направим възможните съкращения, намираме

$$\frac{I_p}{I_a} = \frac{r_a^2}{r_p^2} \cdot \frac{F_a^2}{F_p^2}.$$

По условие повърхностните яркости на планетата в двата случая трябва да са еднакви. Оттук получаваме

$$\frac{r_a^2}{r_p^2} \cdot \frac{F_a^2}{F_p^2} = 1.$$

Следователно отношението на фокусните разстояния на камерите трябва да бъде

$$\frac{F_a}{F_p} = \frac{r_p}{r_a} \approx \mathbf{0.58}.$$

Заключението от последните две подусловия е, че общият видим блясък на Дивата планета зависи както от нейното разстояние до наблюдателите, в случая до Умната планета, така и от разстоянието ѝ до звездата, която я огрява. Повърхностната яркост на изображението на Дивата планета обаче зависи от нейното разстояние до Могъщата звезда, но не и от разстоянието ѝ до наблюдателите – жителите на Умната планета.

Ева Божурова

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

- A)** За правилен метод за построяване на орбитата на Дивата планета – **3 т.**
За правилно графично изпълнение – **6 т.**
- Б)** За определяне на голямата полуос и орбиталния период – **3 т.**
- В)** За правилен начин за пресмятане на разликата в звездните величини – **3 т.**
За верен числен отговор – **1 т.**
- Г)** За правилен подход при пресмятането на отношението на фокусните разстояния – **3 т.**
За верен числен отговор – **1 т.**

Задача 2. Астрометрия на екзопланети. Астрометричният метод е един от най-предизвикателните методи за откриване на екзопланети. Той се базира на това, че звездата обикаля около общия център на масите на системата звезда-планета, което отклонява положенията ѝ по небето. Засега са потвърдени едва 14 планети, открити по този метод, но почти всички те са открити от 2020 г. насам. Методът е използван за уточняване на параметрите на още над 60 планети, открити по други начини. Въпреки че повечето планети се откриват по метода на пасажите или по метода на лъчевите скорости, тези два метода фаворизират откриването на планети, които са много близо до звездите. Очаква се астрометричният метод да бъде много ценен в бъдеще, тъй като по него ще се откриват планети на по-големи орбити, включително такива в обитаемата зона.

На Фигура 1 е даден видимият път на фона на далечните звезди за близка звезда, около която обикаля екзопланета с маса $10 M_J$ (Юпитерови маси). С пунктирана крива е даден видимият път на центъра на масите на системата, т.е. пътят, който звездата би имала, ако около нея нямаше планета. Видимият път на звездата се отклонява от него, но тъй като ефектът е много слаб, за по-добра илюстрация този ефект (разликата между плътната и пунктираната крива) е усилен k пъти. Приемете, че орбитата на планетата е кръгова, с радиус 0.6 au , и с наклон 0° , тоест лежи в равнината на картата (небесната равнина). С пунктирана права е даден пътят на центъра на масите на системата планета-звезда, наблюдавано от центъра на масите на системата Слънце-Земя. Отразената светлина от планетата е прекалено слаба и не може да бъде засечена директно.

Приемете, че полуосите на паралактичната елипса са ориентирани успоредно на посоките на нарастване на ректасцензията и деклинацията.

- **A)** Измерете собственото движение на системата в mas/yr (дъгови милисекунди на година, $1'' = 1000 \text{ mas}$). **[3 т.]**

- Б) Измерете максимално точно годишния паралакс на системата. Изчислете разстоянието до нея в парсеци. [4 т.]
- В) Изчислете тангенциалната скорост на системата в km/s. [3 т.]
- Г) Измерете с максимална възможна точност орбиталния период на планетата около звездата. [4 т.]
- Д) Изчислете масата на звездата в слънчеви маси ($M_{\odot}$). [2 т.]
- Е) Направете необходимите измервания и изчислете фактора k , с който е отдалечен изкуствено видимият път на звездата спрямо този на центъра на масите. [4 т.]

Справочни данни:

$$1 M_{\odot} = 1047 M_J = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

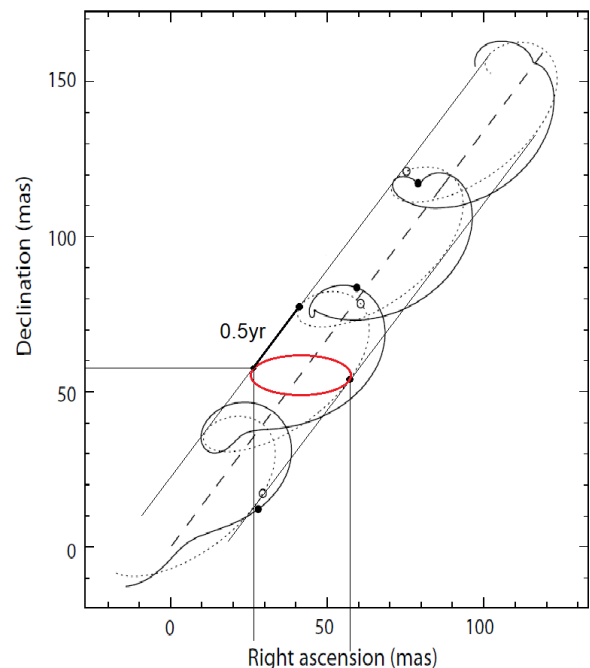
Решение.

А) Пунктираната траектория е комбинация от собственото движение на центъра на масите, което е линейно и равномерно, и от паралактичното отместване. Видимото движение на центъра на масите по пунктираната траектория има период 1 уг. Избираме по пунктираната крива два момента на точно 3 уг един от друг (с еднакво паралактично отместване), намираме разликите в отместванията по двете оси, делим на 3 уг и така пресмятаме собственото движение на системата и компонентите му:

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha} \cos \delta &= 30 \text{ mas/yr}, \mu_{\delta} = 40 \text{ mas/yr}, \\ \mu &= \sqrt{(\mu_{\alpha} \cos \delta)^2 + \mu_{\delta}^2} = \mathbf{50 \text{ mas/yr}}. \end{aligned}$$

Б) Може да се подходи по различни начини. Един такъв начин е да се изберат две последователни точки, отдалечени максимално от пунктираната права. В тях ъгловата скорост по паралактичната елипса е по/срещу направлението на собственото движение и те са разделени времево на половин година, тъй като са срещуположни по паралактичната елипса. Използвайки тази информация, можем да възстановим паралактичната елипса. Годишният паралакс е равен на голямата ѝ полуос. Построяваме, измерваме и получаваме годишен паралакс $p = 20 \text{ mas} = \mathbf{0.02''}$. Разстоянието до системата е $d = 1/p['] = \mathbf{50 \text{ pc}}$.

В) Ако използваме мерни единици km/s, pc, ''/yr, тангенциалната скорост е $v_T = 4.74 \mu d = \mathbf{11.85 \text{ km/s}}$.



Фигура А2. Паралактична елипса.

Г) По небето отместването на звездата S спрямо центъра на масите на системата планета-звезда C е вектор $\overrightarrow{CS} \equiv \vec{r}$ с фиксирана големина r , който се върти с период, равен на орбиталния. Той ни изпраща от пунктираната крива към непрекъснатата крива, така че разстоянието от дадена точка по едната крива до другата крива трябва да бъде не повече от r .

Когато разстоянието между пунктираната крива и непрекъснатата крива е максимално, векторът $\vec{v}$ следва да има максимален възможен принос към

отдалечаването от пунктираната крива, тоест трябва да сочи точно перпендикулярно на пунктираната крива при C .

I начин: Допирателната по самата пунктирана крива указва посоката на движение на центъра на масите по небето в даден момент. Това движение се явява векторен сбор от собственото движение на центъра на масите $\vec{\mu}$ (константа) и вектора на промяна на паралакса $d\vec{p}/dt$. Също както самото паралактично отместване $\vec{p}$ по небето, векторът $d\vec{p}/dt$ променя посоката си с период, равен на една година (въпреки че $\vec{p}$ не е с постоянна големина – паралактичната елипса е далеч от кръгче!). И така, посоката на $\vec{\mu} + d\vec{p}/dt$ явно се променя с период 1 година.

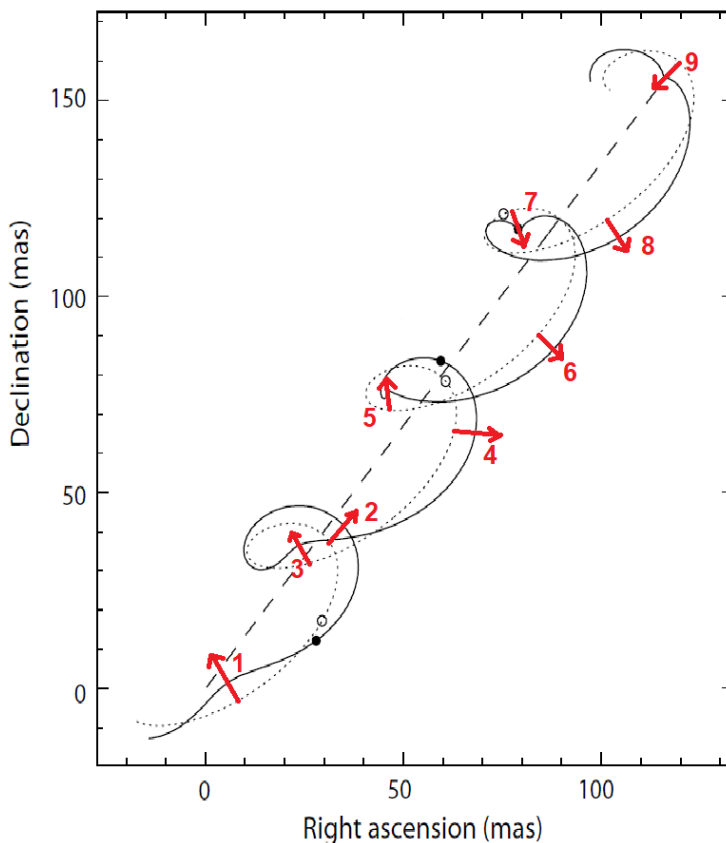
Съответно това $\vec{\mu} + d\vec{p}/dt$ да е перпендикулярно на $\vec{v}$ е свързано със синодичен период, който зависи от орбиталния период на системата T и периода на паралакса $T_0 = 1$ уг. За всеки такъв синодичен период T_{syn} траекторията на звездата (непрекъснатата крива) ще достигне максимално отдалечаване от траекторията на центъра на масите (пунктираната крива) 2 пъти – съответно „ляво“ и „дясно“. От 1-вото до 9-ото максимално отдалечаване (време $4T_{\text{syn}}$) минават приблизително 3.4-3.5 години, откъдето оценяваме периода на $T_{\text{syn}} = 0.86$ уг.

Има и по-точен начин на работа: Ако времето от 1-вото до 9-ото максимално отдалечаване е $3 + x$ години, то изоставането на максимално дясно отклонение спрямо паралактичната фаза на предното максимално дясно отклонение в години е $(1 - (3 + x)/4)$. По графиката се забелязва, че 3 такива отмествания случайно дават общо около x години. Решаваме $3(1 - (3 + x)/4) = x$. Получаваме $x = 0.43$ уг, $T_{\text{syn}} = (3 + x)/4 = 0.86$ уг.

Сега обръщаме внимание, че движението по паралактичната елипса и движението на звездата поради планетата са еднопосочни. Така получаваме орбиталния период на планетата по формулата за синодичен период:

$$T = \frac{T_{\text{syn}} T_0}{T_{\text{syn}} + T_0} = \mathbf{0.46 \text{ уг.}}$$

II начин: Тук използваме, че положенията на максимално отдалечаване задават направлението планета-звезда (или център на масите - звезда) по небето. Те са маркирани с червени стрелки на Фигура А3. Можем например да забележим, че в момент 2 направлението планета-звезда е точно обратното спрямо момент 9, т.е. планетата е направила $N + 1/2$ оборота между двата момента. Можем да проследим траекториите като движим по тях мислено центъра на масите и звездата и да преброим, че $N = 6$. Също така, двата момента са в почти еднаква фаза спрямо паралактичното отместване, т.е. почти точно на 3 уг един от друг. Тоест, за 3 години планетата е направила 6.5 оборота и орбиталният период е $T = (3 \text{ уг})/6.5 = \mathbf{0.46 \text{ уг.}}$



Фигура А3. Направления планета-звезда.

Д) Ако работим в мерни единици аи, уг, $M_{\odot}$, то $M = r_p^3/T^2$. Заместваме с $r_p = 0.6$ аи, $T = 0.46$ уг и получаваме $M = \mathbf{1.0 M_{\odot}}$.

Е) След измервания получаваме максимално отдалечаване на траекторията на звездата от траекторията на центъра на масите $\rho = 5.3$ mas. На разстояние 50 pc то съответства на линейно отстояние $(0.0053'')(50 \text{ pc}) = 0.265$ аи. Но ефектът е усилен k пъти, тоест максималното отдалечаване всъщност е $r_s = (0.265/k)$ аи.

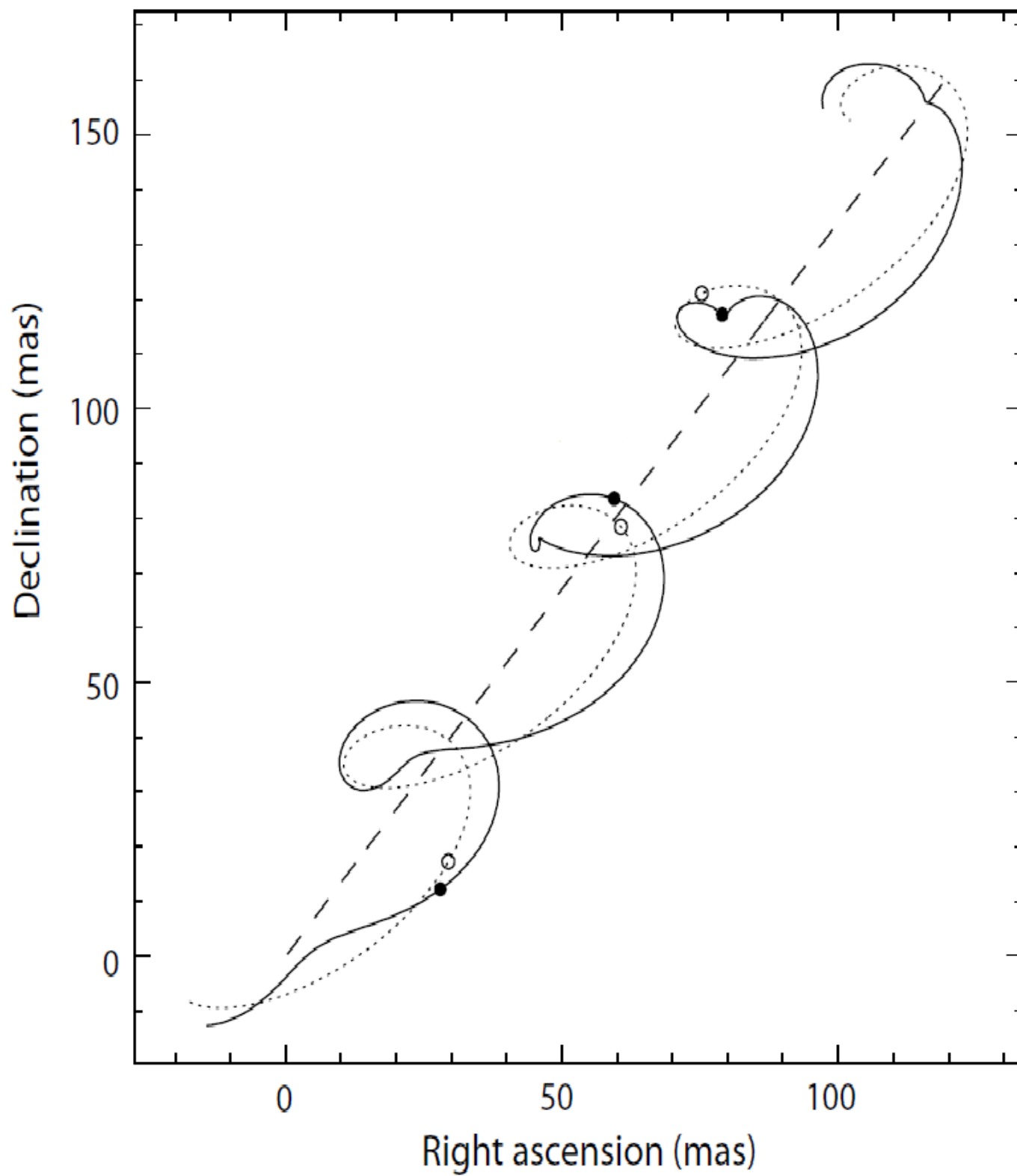
За разстоянията до центъра на масите в двойна система важи $M_p r_p = M_s r_s$. Знаейки, че $r_p = 0.6$ аи, а отношението на масите в системата е $M_p:M_s = 10/(1.0 \times 1047)$, получаваме

$$0.6 \text{ аи} = \left(\frac{1.0 \times 1047}{10}\right) \left(\frac{0.265 \text{ аи}}{k}\right) \Rightarrow k = \mathbf{46}.$$

Александър Куртенов

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

- А)** *Общо – 3 т.*
 - Б)** *Общо – 4 т.*
 - В)** *Общо – 3 т. (Разпространението на грешките от А) и Б) не се наказва във В))*
 - Г)** *Общо – 4 т.*
 - Д)** *Общо – 2 т.*
 - Е)** *Общо – 4 т. (Разпространението на грешката от Г) не се наказва в Д) и Е))*
-



Фигура 1. Видим път на близка звезда по небето.