

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
КОМИСИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

Подборен кръг, 9 юли 2024 г., Варна, теоретичен тур

Старша възраст – решения

Задача 1. Изгрев на астероид. Астероид с размер $D = 3$ km се движи по елиптична орбита около Слънцето. Голямата полуос на орбитата му е $a = 51$ au, а нейният ексцентрицитет е $e = 0.98$. Намерете продължителността на изгрева за наблюдател на земния екватор на този астероид по време на равноденствие, ако астероидът се намира в перихелий и едновременно с това е в опозиция спрямо Земята. Разгледайте двата случая, в които орбитата на астероида се намира в равнината на земната орбита и когато тя лежи в равнина перпендикулярна на орбитата на нашата планета. [15 т.]

Справочни данни:

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Маса на Слънцето – $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Астрономическа единица – $r_E = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$

Наклон на земната ос – $\varepsilon = 23^{\circ}26'$

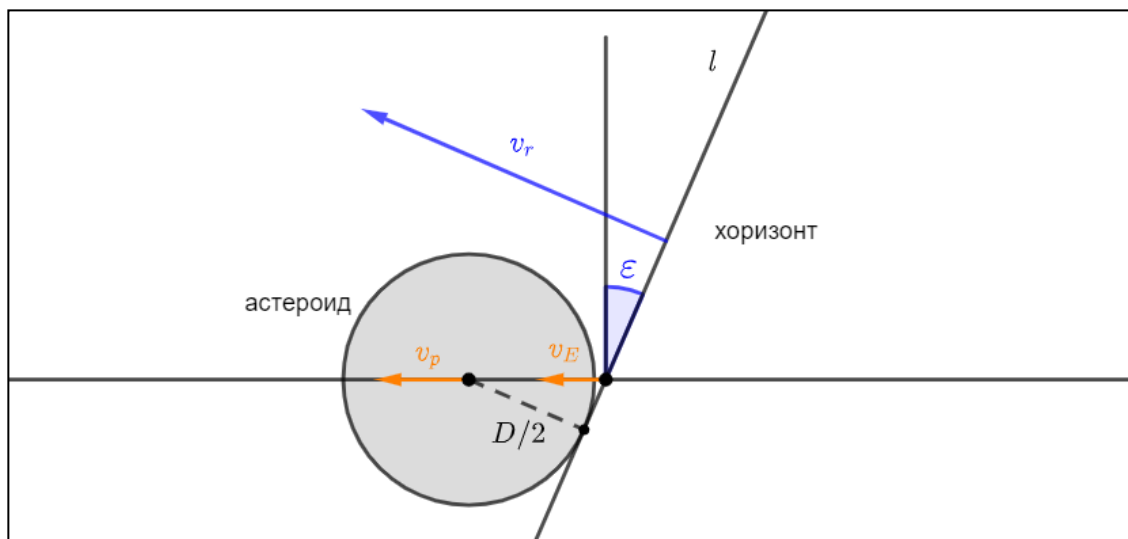
Решение.

Ще приемем земната орбита за кръгова. Орбиталната скорост на Земята е $v_E = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_E}} = 29.79 \text{ km/s}$. Перихелийното разстояние за астероида е $r_p = a(1 - e) = 1.02 \text{ AU}$. Тъй като той е в опозиция, разстоянието му до Земята е $r = r_p - r_E = 0.02 \text{ AU}$. Перихелийната скорост на астероида е $v_p = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a} \frac{1+e}{1-e}} = 41.50 \text{ km/s}$. Относителната му скорост спрямо Земята обаче ще зависи от конкретната конфигурация помежду им.

Нека означим ъгловата скорост на Земята с ω_E . При звездно денонощие $T_E = 23 \text{ h } 56 \text{ m}$ големината ѝ ще се задава с $\omega_E = \frac{2\pi}{T_E} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$. Продължителността на изгрева се определя от това колко време отнема на равнината на хоризонта на наблюдателя да се измести в пространството дотолкова, че да задмине астероида. Това изместване идва от наслагването на два ефекта – околоосното въртене на Земята и орбиталното ѝ движение. Ще разглеждаме движението на равнината на хоризонта само в околностите на астероида. Тъй като посоката на r и ориентацията на земната ос в равноденствие са перпендикулярни, пространствената скорост на точките от тази равнина в околностите на астероида (поради въртене) ще бъде точно $v_r = \omega_E r = 218.19 \text{ km/s}$. Тя ще е насочена под ъгъл ε спрямо еклиптиката. Отделно от това, равнината има и трансляция със скорост $v_E = 29.79 \text{ km/s}$, която е насочена по еклиптиката.

Сега да преминем към разглеждането на възможните случаи. Ще чертаем движението на астероида, гледано откъм Слънцето. Хоризонталното направление по чертежите ще съответства на равнината на еклиптиката, а направлението нагоре ще е към северния еклиптичен полюс. Ще вземем астероида за сфера с диаметър $D = 3 \text{ km}$. Вариантите идват от това дали астероидът се движи в равнината на еклиптиката или перпендикулярно на нея, дали движението му е в права или обратна посока и дали равноденствието е пролетно или есенно.

I случай (пролетно равноденствие, права посока, наклон на орбита $i = 0^\circ$) изглежда така:



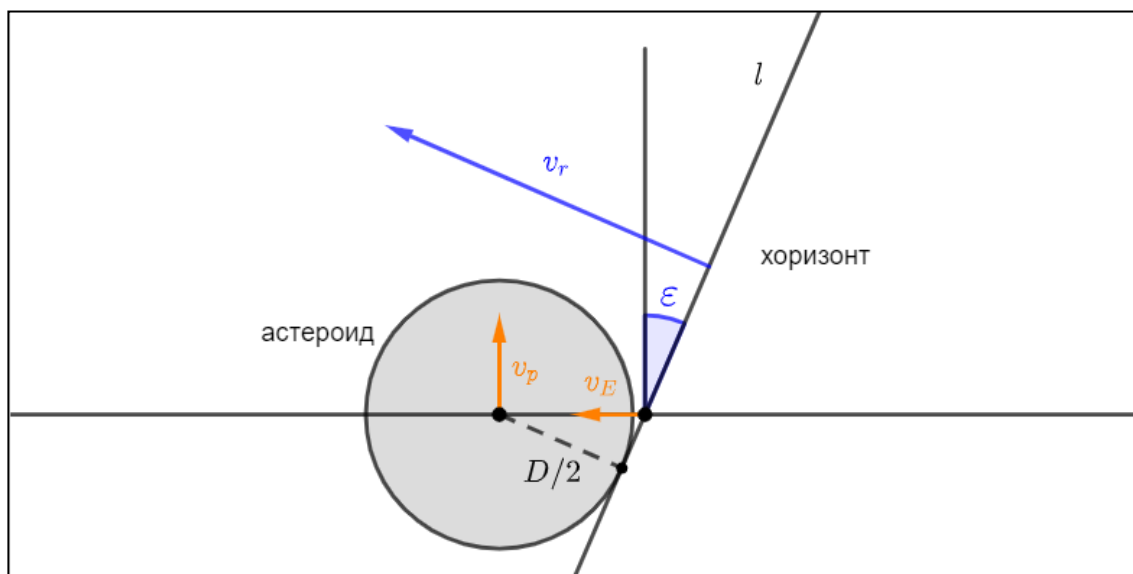
Изгревът приключва, когато равнината на хоризонта l задмине астероида. За да намерим съответното време, трябва да разгледаме компонентите на скоростите перпендикулярно на l . В случая скоростта, с която l настъпва към астероида, е $v_r - (v_p - v_E) \cos \varepsilon$. Тогава времето е

$$t_1 = \frac{D}{v_r - (v_p - v_E) \cos \varepsilon} = 1.446 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

II случай (пролетно равноденствие, обратна посока, наклон на орбита $i = 0^\circ$) има същия чертеж, но v_p е наобратно. Това е същото като астероидът да има скорост $-v_p$ в направлението от предния случай. Съответно ще бъде вярно да използваме същата формула, но в нея да сменим v_p с $-v_p$. В резултат

$$t_2 = \frac{D}{v_r - (-v_p - v_E) \cos \varepsilon} = \frac{D}{v_r + (v_p + v_E) \cos \varepsilon} = 1.058 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

III случай (пролетно равноденствие, права посока, наклон на орбита $i = 90^\circ$) се описва така:



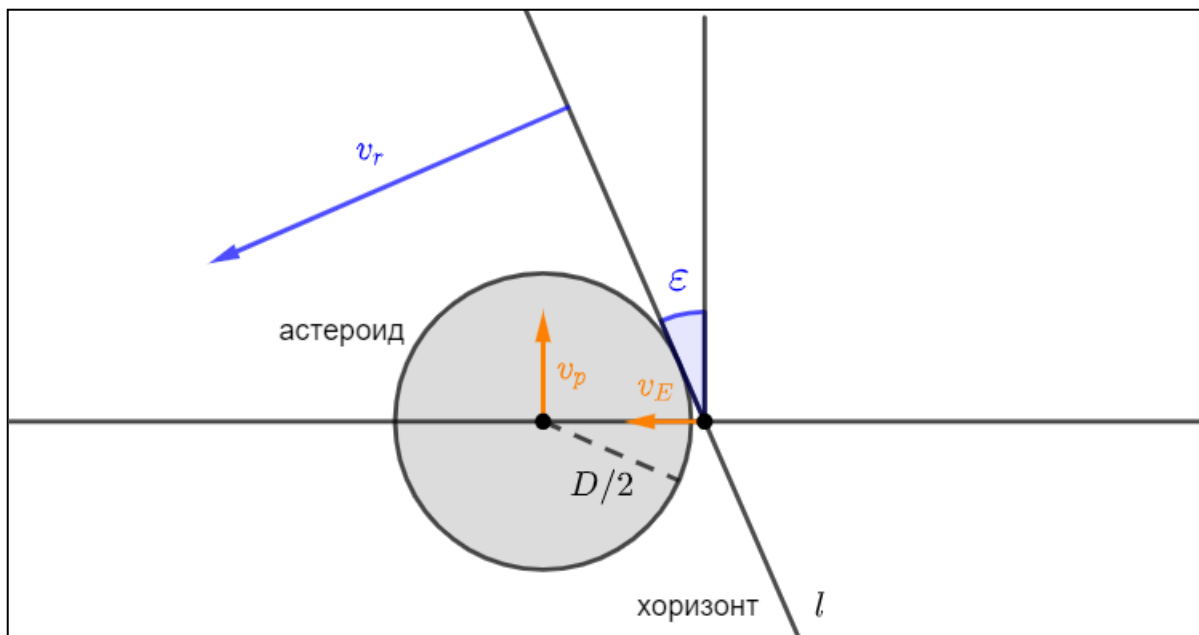
Общата относителна скорост спрямо правата l сега е $v_r - v_p \sin \varepsilon - v_E \cos \varepsilon$, откъдето

$$t_3 = \frac{D}{v_r + v_E \cos \varepsilon - v_p \sin \varepsilon} = 1.310 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

IV случай (пролетно равноденствие, обратна посока, наклон на орбита $i = 90^\circ$) е същият, но отново със сменена посока на v_p . При него имаме

$$t_4 = \frac{D}{v_r + v_E \cos \varepsilon + v_p \sin \varepsilon} = 1.145 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

В случаите V-VIII (есенно равноденствие) ориентацията на хоризонта е друга:



Проекциите на скоростите спрямо l тогава обаче остават същите, тоест множителите $\cos \varepsilon$ и $\sin \varepsilon$ не се променят. От тези четири случая няма да получим различни стойности за продължителността на изгрева, така че няма нужда да ги разглеждаме.

Никола Каравасилев, реш. Стефан Иванов

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

- За пресмятане на земната орбитална скорост, за перихелийната скорост на астероида, за разстоянието Земя-астероид, за ъгловата скорост на Земята – **5 т.**
- За разглеждане на вариантите с орбитално движение на астероида само в едната посока (напр. права), правилна геометрична постановка и верни крайни резултати – **8 т.**
- За разглеждане на вариантите с орбитално движение на астероида и в двете посоки, до достигане на крайни резултати – **2 т.**

Задача 2. Тройна система. От Земята се наблюдава тройна звезда. Системата е стабилна – траекториите на трите компоненти са периодични. Отчита се, че за една от компонентите усреднената по времето стойност на червеното отместване е нула. Също се забелязва, че сборът от червените отмествания на трите компоненти във всеки един момент е нула, но никога и трите нямат червено отместване нула едновременно.

- А) С тази информация покажете, че трите компоненти имат равни маси. [5 т.]

За цивилизацията на светещите Ярославиди тройната звезда е на разстояние само 1 парсек. За тях вече е известно, че компонентите се движат в една и съща равнина, перпендикулярна на зрителния лъч. Докато наблюдава поредния квазар, радиоастрономът Теодора Желязкова регистрира ... зашифровано послание от Ярославидите! След много работа, Теодора го декодира, получавайки изображение на тройната звезда. Радиоастрономът веднага съобразява какво показва изображението и бърза да го отрази в научна статия.

- Б) Каква форма ще имат траекториите на компонентите след запечатания на изображението момент? Дайте само обоснован качествен отговор. Използвайки данните дотук, намерете долна граница за масите на компонентите, изразена в сл. маси. [5 т.]
- В) Ако е известно също, че периодът на системата е 1.9 дни, каква точна стойност за масите на компонентите трябва да се публикува в статията? [5 т.]

Указание: Стойностите за червеното отместване винаги са коригирани за орбиталното движение на Земята. Синьото отместване може да се разглежда като червено отместване z с отрицателен знак, например $z = -0.01$.

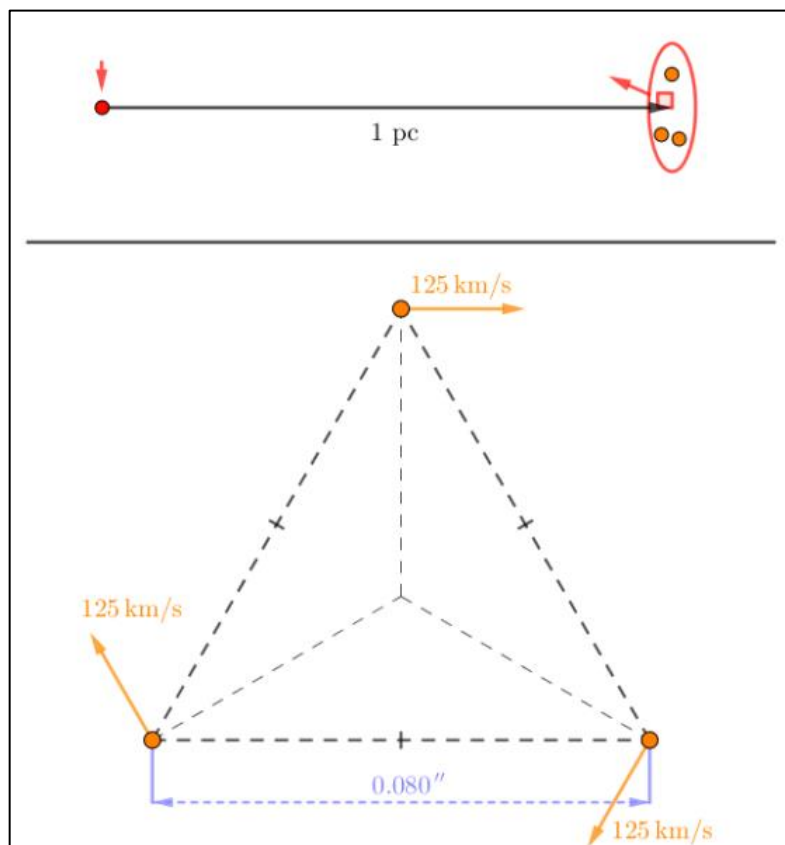
Справочни данни:

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

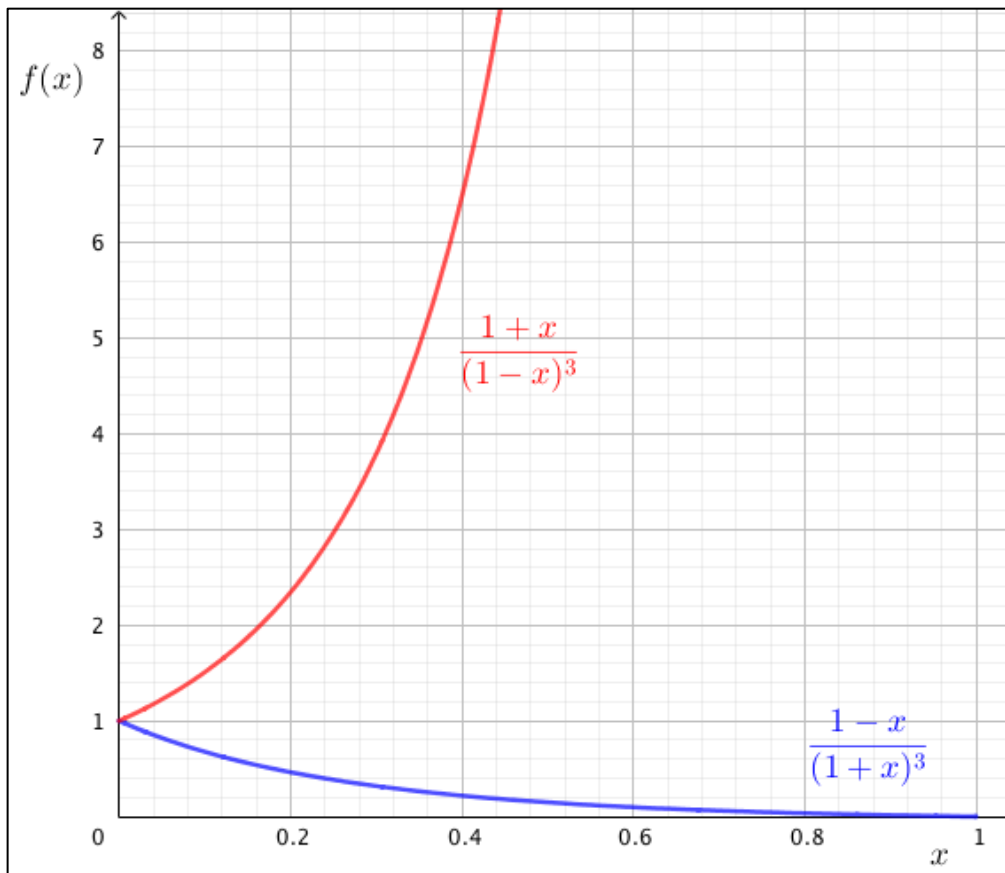
Маса на Слънцето – $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Астрономическа единица – $r_E = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$

Послание от Ярославидите:



Графики на някои функции:



Решение.

а) В общия случай макар и да е периодична, траекторията на компонента от тройна звезда не се придържа към една равнина. Затова не може да прилагаме съображения, свързани с движение по фиксирана равнина, но такива не са и нужни.

Да разгледаме движението на една компонента в отправна система, свързана с центъра на масите (ЦМ) на системата. Взимаме направлението от наблюдателя към ЦМ. Скоростта на компонентата по това направление се явява относителната ѝ лъчева скорост v_r спрямо ЦМ (самият център на масите също може да има лъчева скорост относно наблюдателя v_{rc} , при което наблюдаваната лъчева скорост ще е $v_{rc} + v_r$). Тъй като траекторията на компонентата е периодична, трябва за дълъг период от време (много по-голям от орбиталния период) усреднената стойност на v_r да бъде нула, тоест $\langle v_r \rangle = 0$. В противен случай за периода от време ще има резултантно отместване спрямо ЦМ по избраното направление. А резултантно отместване спрямо ЦМ по какво да е направление означава, че трите компоненти ще се раздалечат на безкрайност. Защо? Съгласно дефиницията на център на масите, в избраната от нас отправна система векторният сбор на маса по радиус-вектор $\sum_i M_i \vec{r}_i$ винаги е нула. И когато големината на единия от радиус-векторите в сбора клони към безкрайност, направлението и големината на останалите радиус-вектори трябва да компенсират за това.

По условие за една от компонентите е изпълнено, че лъчевата ѝ скорост относно наблюдателя е нула, усреднявайки по времето. Ако лъчевата скорост на ЦМ е v_{rc} , а лъчевите скорости на компонентите спрямо ЦМ са v_{r1}, v_{r2}, v_{r3} , условието дава $\langle v_{rc} + v_{r1} \rangle = 0$, откъдето $v_{rc} = 0$. А тогава наблюдаваните червени отмествания пряко съответстват на лъчевите скорости относно ЦМ. Затова

$$\frac{v_{r1}(t)}{c} + \frac{v_{r2}(t)}{c} + \frac{v_{r3}(t)}{c} = 0.$$

Комбиниране това със закона за запазване на импулса, при което е гарантирано

$$\begin{cases} v_{r1}(t) + v_{r2}(t) + v_{r3}(t) = 0 \\ M_1 v_{r1}(t) + M_2 v_{r2}(t) + M_3 v_{r3}(t) = 0 \end{cases}$$

Сега нека използваме отново, че $\langle v_{r1} \rangle = 0$. Това означава, че v_{r1} с времето приема и положителни, и отрицателни стойности. Преминавайки от произволна положителна към произволна отрицателна стойност, v_{r1} трябва в някакъв момент да става нула. Да вземем този момент $t = T$. И от резултата

$$\begin{cases} v_{r2}(T) + v_{r3}(T) = 0 \\ M_2 v_{r2}(T) + M_3 v_{r3}(T) = 0 \end{cases}$$

получаваме $(M_3 - M_2)v_{r3}(T) = 0$. Отчитайки, че $v_{r3}(T) = 0$ налага $v_{r1}(T) = v_{r2}(T) = v_{r3}(T)$ в противоречие с условието, получаваме $M_2 = M_3$. Връщайки се с този резултат в

$$\begin{cases} v_{r1}(t) + v_{r2}(t) + v_{r3}(t) = 0 \\ M_1 v_{r1}(t) + M_2 v_{r2}(t) + M_2 v_{r3}(t) = 0 \end{cases}$$

аналогично получаваме $M_1 = M_2$, така че $M_1 = M_2 = M_3$, **което трябва да се докаже.**

б) Ако разстоянието от наблюдателя до трите компоненти е $r_0 = 1$ рс, разстоянието между всеки две компоненти d се намира, знаейки съответстващото ъглово отстояние δ :

$$d[\text{AU}] = \delta[']r_0[\text{pc}] ; d = 0.08 \text{ AU}.$$

Разстоянието от всяка компонента до ЦМ на системата, r , е директно свързано с d . Връзката намираме най-бързо с косинусовата теорема.

$$d = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 120^\circ} = \sqrt{3}r.$$

Означаваме масите на всяка от компонентите с M . Гравитационното ускорение, която всяка компонента изпитва, е насочено към центъра на масите и има големина

$$a_g = 2 \cdot \frac{\gamma M}{d^2} \cos 30^\circ = \frac{\gamma((\sqrt{3}/3))M}{r^2}.$$

В ситуацията от изображението имаме симетрия спрямо центъра на масите (въпреки че, видимо, системата има собствено движение като едно цяло). С течението на времето симетрията се запазва, което означава, че независимо от по-нататъшната траектория, трите звезди ще продължават да лежат във върховете на равноностранен триъгълник. Следователно изразът за гравитационното ускорение, което всяка компонента има, ще запазва вида си

$$a_g = \frac{\gamma((\sqrt{3}/3))M}{r(t)^2},$$

където $r(t)$ е моментното разстояние до центъра на масите.

Движение около силов център, при което силата е обратнопропорционална на квадрата на разстоянието до центъра, има за траектория кеплерова орбита. Знаем, че движението в тройната звезда е периодично. Следователно траекториите на компонентите могат да бъдат единствено **елипси**. И изразът за гравитационното ускорение показва, че движението на всяка компонента е еквивалентно на движението на маломасивно тяло около хипотетична централна звезда с маса $\frac{\sqrt{3}}{3}M$. Тази еквивалентност ще използваме занапред.

За да бъде гравитационно свързана системата, трябва скоростта v , показана на изображението, да е по-малка от параболичната, съответстваща на показаното разстояние до центъра на масите. Така минималната маса на компонентите, $M_{\min}$, се задава чрез^{1 2}

$$v < \sqrt{\frac{2\gamma((\sqrt{3}/3))M}{r}} ;$$

$$M > M_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v^2 r}{\gamma} = 1.40 \times 10^{30} \text{ kg} \Leftrightarrow \mathbf{0.70 M_{\odot}}.$$

в) На изображението векторът на скоростта е перпендикулярен на радиус-вектора за всяка от компонентите. Това означава, че те са в перицентъра или апоцентъра на траекториите си. Да разгледаме паралелно и двата варианта. Означаваме голямата полуос на всяка от елипсите с a , а ексцентритета им с e . Ако на изображението компонентите са в перицентър:

$$\text{I: } v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\gamma M}{a} \frac{1+e}{1-e}}; \quad r = a(1-e).$$

Ако на изображението компонентите са в апоцентър:

$$\text{II: } v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\gamma M}{a} \frac{1-e}{1+e}}; \quad r = a(1+e).$$

Третият закон на Кеплер дава зависимостта $\frac{(\sqrt{3}/3)\gamma M}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$, където T е орбитален период, при което

$$\text{I: } \left(\frac{vT}{2\pi r}\right)^2 = \frac{1+e}{(1-e)^3};$$

$$\text{II: } \left(\frac{vT}{2\pi r}\right)^2 = \frac{1-e}{(1+e)^3}.$$

Изчисляваме $\left(\frac{vT}{2\pi r}\right)^2 = 0.22$ и засичайки по дадената графика, намираме $e \approx 0.38$. Това решение получихме от варианта, при който на изображението компонентите са в апоцентър. Сега последователно имаме

$$a = \frac{r}{1+e} \approx 0.033 \text{ AU}$$

$$M = 4\sqrt{3}\pi^2 \frac{a^3}{\gamma T^2} \approx 4.78 \times 10^{30} \text{ kg} \Leftrightarrow \mathbf{2.4 M_{\odot}}$$

В крайния отговор оставяме две значещи цифри съгласно точността на началните данни и това, че отчитаме по графика с неточност.

Стефан Иванов

Бележки.

¹ С данните дотук това е най-силната оценка, която може да направим. Доказва се, че скоростта по елипсата, имаща голяма полуос a , на разстояние r от силовия център е

$$v = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

но при неопределен орбитален период a може да приема стойности от нула до безкрайност. Затова със сигурност може да поставим единствено критерия за параболична скорост.

² Възможно е и енергетично решение на задачата. Пълната механична енергия на системата в момента, отразен на изображението, е

$$E = 3 \frac{Mv^2}{2} - 3 \frac{\gamma MM}{d} = 3M \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\gamma M}{\sqrt{3}r} \right),$$

където взимаме потенциалната енергия за всеки две компоненти поотделно (общо три двойки). Съгласно критерия за гравитационно свързана система, приравняваме израза на нула и достигаем същия резултат.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

а) – За заключение, че усреднената лъчева скорост на всяка звезда относно ЦМ е нула и лъчевата скорост на самия ЦМ е нула – **2 т.**

– За записване на уравненията за лъчевите скорости, получени от ЗЗИ и условието за червено отместване – **1 т.**

– За избиране на момент, в който една от лъчевите скорости е равна на нула, и довършване на решението – **2 т.**

Други верни доказателства също получават пълен брой точки.

б) – За намиране на разстоянието между компонентите и ЦМ на изображението – **1 т.**

– За съобразяване, че симетрията се запазва – **1 т.**

– За изразяване на гравитационното ускорение спрямо моментното разстояние до ЦМ – **1 т.**

– За аргументиран извод, че траекториите са елипси – **1 т.**

– За изразяване и числена стойност на долната граница за масите на компонентите (толерира се ± 1 значеща цифра) – **1 т.**

в) – За съобразяване, че компонентите на изображението са в перицентър или апоцентър – **1 т.**

– За достигане на израз, от който да се определи ексцентрицитетът – **2 т.**

– За числена стойност на ексцентрицитета – **1 т.**

– За изразяване и числена стойност на масите (толерира се ± 1 значеща цифра) – **1 т.**

Задача 3. Неразделена двойна звезда. Двойна звездна система се наблюдава като единичен точков обект, въпреки че разстоянието между компонентите е много по-голямо от радиусите им. Системата не може да бъде разделена в нито един филтър в оптичния диапазон, даже и с 2.4-метровия космически телескоп Хъбъл. В спектъра на точковия обект се разпознава, че вторичната компонента е звезда от спектрален клас G. И двете компоненти са звезди от Главната последователност. Светимостта на системата е 11.6 слънчеви светимости, а паралаксът ѝ – 3.9 mas.

- А) Определете масата на системата. Посочете точността на вашия отговор. За целите на задачата считайте, че в разглеждания интервал от маси на звезди от Главната последователност е в сила зависимост маса-светимост

$$L \propto M^{4.1}.$$

[3 т.]

- Б) Масата на системата не може да бъде определена директно със спектрограф, регистриращ скорости до 300 m/s. Какво можете да кажете за наклона на оста на системата спрямо зрителния лъч? [3 т.]
- В) След колко най-малко години системата ще се състои от две бели джуджета? [3 т.]
- Г) Каква би била звездната величина V на системата за наблюдател от галактика с червено отместване $z = 0.033$? Междувездната екстинкция да се пренебрегне. [3 т.]
- Д) Ако звездната величина B на системата за наблюдател от Земята е $B = 13.35$, то звездите от кой спектрален клас (с подклас) имат същия $B - V$ цвят индекс като наблюдавания от Земята за тази система? [3 т.]

Използвайте дадената по-долу таблица и следните зависимости:

$$R \propto M^{0.8},$$

където R и M са съответно радиус и маса на звезди от Главната последователност;

$$A_V = 3.1E(B - V)$$

където A_V е междувъздушна екстинкция във филтър V , а $E(B - V)$ е цветови ексцес (почервявяване) на $B - V$ индекса поради селективно поглъщане.

Спектрален клас	$B - V$	T	BC_V
O5V	-0.33	42000	-4.0
B0V	-0.30	30000	-2.8
A0V	-0.02	9800	-0.40
F0V	0.30	7300	-0.06
G0V	0.58	6000	-0.03
K0V	0.81	5100	-0.24
M0V	1.40	3800	-1.21

Справочни данни:

Абсолютна болометрична звездна величина на Слънцето – $M_{BOL} = 4^m.74$

Радиус на Слънцето – $R_S = 696\,000\text{ km}$

Фотосферна температура на Слънцето – $T_S = 5\,770\text{ K}$

Слънчева маса – $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\text{ kg}$

Константа на Хъбъл – $H = 70\text{ (km/s)/Mpc}$

Решение.

а) Вторичната компонента е от спектрален клас G, който заема сравнително тесен интервал от маси: от $0.88 M_\odot$ до $1.10 M_\odot$. По дадената зависимост

$$L \propto M^{4.1}$$

светимостите на звезда от клас G на главната последователност трябва да варират в интервал от $0.6 L_\odot$ до $1.5 L_\odot$. Изваждаме я от светимостта на системата и получаваме, че светимостта на главната компонента е между $10.1 L_\odot$ и $11.0 L_\odot$. Прилагаме отново зависимостта, но за главната компонента и получаваме възможен интервал от маси $1.75 M_\odot$ до $1.80 M_\odot$.

Сумираме комбинациите от минимална и максимална стойности за масите на компонентите и получаваме маса на системата от $2.68 M_\odot$ до $2.85 M_\odot$. За целите на следващите подусловия ще ползваме средните стойности $M_1 = 1.78 M_\odot$, $M_2 = 0.99 M_\odot$ и $M_1 + M_2 = 2.77 \pm 0.08 M_\odot$.

б) В условието се иска коментар за наклона, подкрепен с количествени разсъждения. За улеснение ще ги правим за кръгови орбити. Максималният възможен наклон на системата е в случай с минимална орбитална скорост, т.е. при най-голяма възможна орбита. Дифракционната разделителна способност на телескопа Хъбъл в синия край на оптичния диапазон (дължина 380 nm) е

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.040''.$$

Разстоянието между компонентите е максимум

$$d = \theta r = \frac{\theta}{p} = 10.2 \text{ AU.}$$

На такова разстояние при кръгови орбити относителната скорост на компонентите една спрямо друга е

$$v = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{d}} = 15.5 \text{ km/s.}$$

Скоростта на маломасивната компонента е

$$v_2 = v \frac{M_1}{M_1 + M_2} = 10.0 \text{ km/s.}$$

Ако спектрографът регистрира радиални скорости до 300 m/s, то радиалната компонента на v_2 достига не повече от 150 m/s = 0.15 km/s. Максималният възможен наклон на системата е

$$i = \arcsin\left(\frac{0.15}{10.0}\right) = 0.86^\circ.$$

в) От зависимостта $L \propto M^{4.1}$ и съображението за време на живот на Главната последователност $t_{\text{MS}} \propto M/L$ извеждаме приблизителната формула за звезда с маса близо до тази на Слънцето

$$t_{\text{MS}} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-3.1} 10 \text{ Gyr.}$$

По тази формула t_{MS} за главната компонента (минимална възможна маса 1.75 слънчеви) е 1.8 Gyr. Това е и максималната възможна настояща възраст на системата, тъй като главната компонента по условие е на главната последователност.

Времето за престой на вторичната компонента при максимална маса 1.10 слънчеви е 7.5 Gyr. На тази възраст на системата главната компонента вече ще е бяло джудже, а вторичната ще излиза от главната последователност. След около още 10% от живота си, на възраст около 8.5 Gyr, вторичната компонента също ще е бяло джудже. Това е най-рано след време 8.5 – 1.8 = **6.7 Gyr**.

г) Галактика на червено отместване $z = 0.033$ е на разстояние

$$r_G = \frac{zc}{H_0} = 141 \text{ Мрс.}$$

Модулът на разстоянието за галактиката е

$$(m - M)_G = 5 \lg r_G - 5 = 35.75.$$

С 11.6 слънчеви светимости абсолютната звездна величина на системата е

$$M = 4.74 - 2.5 \lg \frac{L}{L_\odot} = 2.08.$$

Видимата болометрична звездна величина е 35.75+2.08 = 37.85. Ако приложим болометричната корекция (около 0.26 mag от температурата в Д), получаваме звездна величина около **38.1** – над 600 пъти по-слабо от най-слабите звезди, които Хъбъл регистрира.

д) Търсим наблюдавания от Земята цветови индекс $B - V$ (след почервявяване). По-голямата част от светимостта на обекта идва от главната компонента, така че тя определя цвета на обекта. По дадената зависимост

$$R \propto M^{0.8}$$

определяме радиус на главната компонента $1.59 R_\odot$. По закона на Стефан-Болцман

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4$$

определяме температура на главната компонента 8260 K, което съответства на спектрален клас A5 – A6, който има $(B - V)_0 = 0.17$ и болометрична корекция -0.26 . Оттук нататък ще работим за системата като едно цяло.

По паралакса намираме разстоянието r , а от него – модула на разстоянието до Земята:

$$m - M = 5 \lg r - 5 = 7.04.$$

Непочервенената болометрична звездна величина е $7.04 + 2.08 = 9.12$ mag. След прилагане на болометричната корекция и цветовия индекс получаваме видима звездна величина при нулева екстинкция $B_0 = 9.26 + 0.26 + 0.17 = 9.55$ mag. Поглъщането във филтър В е $A_B = 13.35 - 9.55 = 3.8$. От дадената формула за пълно към селективно поглъщане обработваме и получаваме

$$A_V = 3.1(A_B - A_V) \Rightarrow A_B = \frac{4.1}{3.1} A_V = 4.1E(B - V).$$

Заместваме и получаваме цветови ексцес $E(B - V) = 0.93$. Прилагаме към цветовия индекс за спектралния клас $(B - V)_0 = 0.17$ и получаваме $(B - V) = 1.10$, характерно за **K5** звезди. Звездата е бяла, но изглежда оранжева.

Александър Куртенов

Задача 4. Астрометрия. През 2045 г. именитият български астроном Красимир Станков иска да изследва далечна звезда за проект със своите докторанти. Той подава заявка за наблюдателно време на новия 4-метров телескоп на НАО Рожен. Комисията за разпределение, ръководена от проф. Валентин Митев, му отпуска време в три наблюдателни нощи през интервали от точно четвърт година една от друга. При всяко наблюдение Красимир отчита екваториалните координати на звездата и изследва нейния спектър. Приведени са част от резултатите му.

	ректасцензия	деклинация
нощ 1	$\alpha_{1A} = 17^{\text{h}}58^{\text{m}}26^{\text{s}}.654105$	$\delta_{1A} = +67^{\circ}04'30''.92513$
нощ 2	$\alpha_{2A} = \alpha_{1A} - 0^{\text{s}}.000598$	$\delta_{2A} = \delta_{1A} + 0''.00106$
нощ 3	$\alpha_{3A} = \alpha_{1A} - 0^{\text{s}}.000583$	$\delta_{3A} = \delta_{1A} - 0''.00147$

Красимир изпраща своите данни до колегата си (теоретик) Раян Камаринчев с молба да му помогне в определянето на някои параметри. Раян е озадачен, че Красимир не му е изпратил точните дати на наблюденията. Той пробва да му се обади, но не получава отговор. Раян ще трябва да се справи сам.

- А) Намерете датата на първото наблюдение с точност до един ден.
- Б) Намерете разстоянието до звездата. [15 т.]

Указание: Екваториалните координати се измерват спрямо астрометрични стандарти и не се влияят от аберацията на светлината.

Справочни данни:

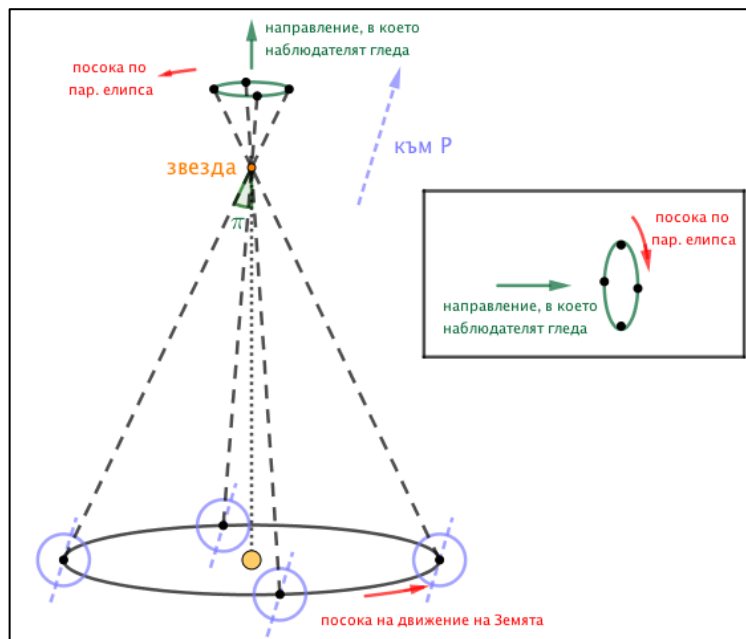
Момент на лятно слънцестоене през 2045 г. – 21.06., 22: 33 UT

Решение.

а) Северният еклиптичен полюс има координати $(18^{\text{h}}; (90^{\circ} - \varepsilon))$, където ε е наклонът на еклиптиката спрямо небесния екватор. Видно е, че координатите на звездата са много близки до

това. Ако паралаксът на звезда е π , паралактичната ѝ елипса има голяма и малка полуос съответно π и $\pi \sin \beta$, където β е модул на еклиптичната ширина. Затова паралактичните елипси на звездите в околността на праховия облак са на практика окръжности.

Както е видно от схемата, движението на звездите с $\beta > 0$ по паралактичните им елипси става по часовниковата стрелка. Също забелязваме, че звездите достигат точката от паралактичната елипса, имаща максимална деклинация, в деня на лятно слънцестоене за северното полукълбо.



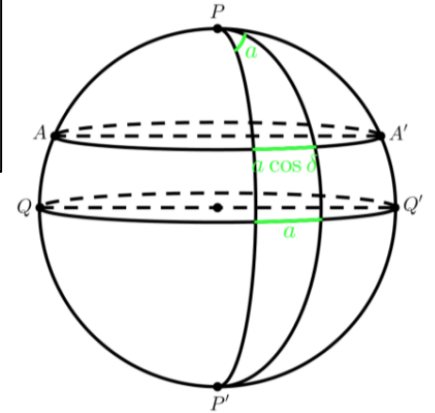
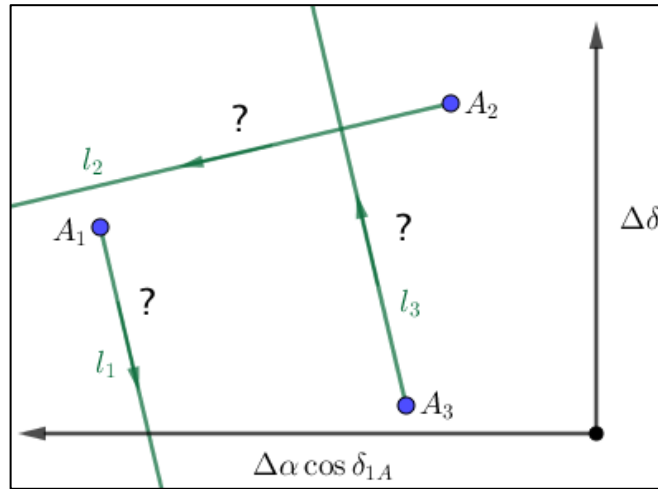
Информацията дотук позволява да определим мястото на звезда по паралактичната ѝ елипса (окръжност) в зависимост от датата. Завъртане на ъгъл θ по часовниковата стрелка спрямо “основната линия” отговаря на дата, намираща се на $\frac{\theta}{360^\circ} \cdot 1$ уг след момента на лятно слънцестоене за северното полукълбо:

С течение на годината направлението на вектора $\vec{v}$, свързващ звездата и центъра на паралактичната ѝ елипса, се променя по аналогичен начин (въртене по окръжност). Така дори и да не знаем паралакса на дадена звезда, можем все пак да намерим в какво направление спрямо звездата се намира центърът на паралактичната ѝ елипса.

Да разгледаме трите наблюдения на звездата, която означаваме с А. Преместването на звездата между наблюденията е резултат едновременно от движението на звездата по окръжност поради паралакс и собственото ѝ движение μ . За момента не знаем направлението на $\vec{v}$ за никое от наблюденията. Забелязваме, обаче, че между всеки две наблюдения $\vec{v}$ трябва да се е завъртял с 90° по часовниковата стрелка.

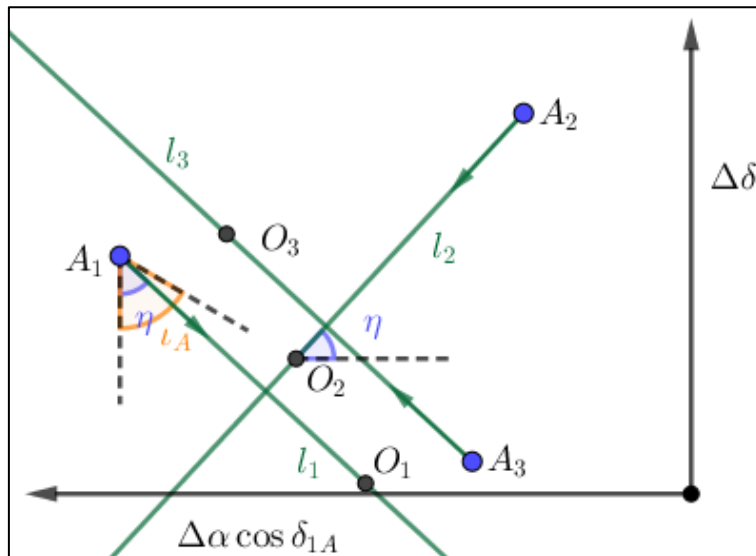
С времето центърът на паралактичната елипса на А се движи по небето единствено в резултат на собственото движение на А, тоест траекторията му е права линия. При първото наблюдение той лежи на l_1 , при второто – на l_2 , при третото – на l_3 . При това той е постоянно на едно и също ъглово разстояние от А, равно на паралакса ѝ π_A .





Горната схема указва ъгови размери, поради което разликите a в ректасцензията са коригирани с множител косинус деклинацията на областта, в която се наблюдава (вж. чертежа). На схемата е използвано, че посоката на нарастване на ректасцензията е “на 90° наляво” от тази на нарастване на деклинацията. Това може да се провери с чертеж на небесна сфера.

Нека центърът на паралактичната окръжност е първоначално в точка O_1 от l_1 , а при последното наблюдение е в точка O_3 от l_3 . Тъй като A_1O_1 и A_3O_3 са успоредни и равни, фигурата $A_1O_1A_3O_3$ трябва да е успоредник. Той ще има диагонали A_1A_3 и O_1O_3 , които се разполовяват взаимно. Това означава, че A_1A_3 се разполовява от средата на O_1O_3 . Но тази среда представлява O_2 , центърът на паралактичната елипса на A по време на второто наблюдение. Точката O_2 обаче лежи на l_2 . С това доказахме, че правилното направление на l_1, l_2, l_3 е такова, че средата на A_1A_3 лежи на l_2 .



Сега можем да възстановим положенията на O_1 и O_3 , използвайки, че $A_1O_1 = A_2O_2 = A_3O_3$. Ъгъла η на чертежа може да намерим, разглеждайки O_2 и A_2 :

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\left| \frac{\delta_{1A} + \delta_{3A}}{2} - \delta_{2A} \right|}{\left| \frac{\alpha_{1A} + \alpha_{3A}}{2} - \alpha_{2A} \right| \cos \delta_{1A}}; \eta = 45.07^\circ.$$

Ако се върнем на A_1 , виждаме, че векторът $\vec{v}$ се е завъртял по часовниковата стрелка на ъгъл $360^\circ - \eta$ спрямо положението, съответстващо на лятно слънцестоене за северното полукуълбо (вертикалната пунктирна линия). Датата на първото наблюдение, когато е станало избухването, е $\frac{\eta}{360^\circ} \cdot 365.25$ d преди 21 юни. Резултатът е **7 май**.

б) Паралаксът на звездата е ъгловото отстояние между A_2 и O_2 :

$$\pi_A = \sqrt{\left(\left(\frac{\alpha_{1A} + \alpha_{3A}}{2} - \alpha_{2A}\right) \cos \delta_{1A}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{1A} + \delta_{3A}}{2} - \delta_{2A}\right)^2} = 2.536 \text{ mas.}$$

Разстоянието до звездата тогава е

$$r_A = \frac{1}{\pi_A["]} \approx \mathbf{394 \text{ pc.}}$$

Крайният отговор на задачата¹ е даден с брой значещи цифри, съответстващ на точността на астрометрията.

Стефан Иванов

Бележки.

¹ Данните, които имаме, могат да ни доведат до още резултати, например тангенциалната скорост на звездата. За целта са нужни още няколко пресмятания. Ъгъла ι_A на горната схема намираме, разглеждайки A_1 и A_3 .

$$\operatorname{tg} \iota_A = \frac{(\alpha_{1A} - \alpha_{3A}) \cos \delta_{1A}}{\delta_{1A} - \delta_{3A}}; \iota = 66.66^\circ$$

За ъгловото отстояние κ между A_1 и O_2 пресмятаме:

$$\kappa_A = \frac{1}{2} \sqrt{((\alpha_{1A} - \alpha_{3A}) \cos \delta_{1A})^2 + (\delta_{1A} - \delta_{3A})^2} = 1.855 \text{ mas}$$

Отсечката O_1O_2 представлява преместването на центъра на паралактичната елипса за четвърт година. Дължината ѝ намираме с косинусова теорема в триъгълника AO_1O_2 със страни κ_A, π_A и ъгъл между тях $\iota - \eta$:

$$\chi = \sqrt{\kappa_A^2 + \pi_A^2 - 2\kappa_A\pi_A \cos(\iota_A - \eta)} = 1.060 \text{ mas}$$

Собственото движение на А следователно е $\mu = \frac{4\chi}{1 \text{ yr}} = 4.239 \text{ mas/yr}$. Тангенциалната скорост тогава се задава с $v_\tau = \mu r_A = 7.92 \text{ km/s}$. Това е сравнително малка стойност.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

а), б) – За разпознаване на близостта до еклиптичния полюс и извод, че паралактичната елипса става окръжност – **2 т.**

– За описан метод, по който може да се вземе датата на наблюдение – **3 т.** (за указано положение по окръжността във фиксиран момент, например лятно слънцестоене, **1 т.** ; за идея да се отчита ъгъла на преместване по окръжността спрямо това положение **1 т.** ; за правилна посока на движение по окръжността **1 т.**)

– За съобразяване, че центърът на паралактичната окръжност във втората нощ е по средата на положенията на звездата в първата и третата нощ – **4 т.**

– За изчисляване на ъгъла η или еквивалентно пресмятане – **2 т.** (при неотчетен множител косинус за ректасцензията **1 т.**)

- За датата на първото наблюдение – **1 т.**
 - За изразяване на паралакса – **2 т.** (при неотчетен множител косинус за ректасцензията **1 т.**)
 - За числена стойност на разстоянието до звездата – **1 т.** (толерира се ± 1 значеща цифра)
-

Редакция на темата: Стефан Иванов