

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
КОМИСИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XXVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

Подборен кръг, 9 юли 2024 г., Варна, теоретичен тур

Младша възраст – решения

Задача 1. Кулминация на звезда. Дарио и Константин са приятели от ученическите си години. И двамата са станали астрономи, но започнали работа в две различни обсерватории. В нощта на 20/21 декември 2039 г. те установяват, че звездата Капела е в горна кулминация едновременно и за двамата, като и двамата измерват височина над хоризонта 70° .

- **А)** Какво е най-малкото възможно (ненулево) разстояние по земната повърхност между двете обсерватории? [4 т.]
- **Б)** Какво е местното слънчево време за всеки от двамата в този момент? [3 т.]
- **В)** Може ли да се твърди, че Капела е незалязваща звезда за някой от двамата астрономи? Ако това е вярно, то каква е височината над хоризонта на Капела в долна кулминация за този астроном? [4 т.]

В една друга нощ, точно в полунощ, един от двамата астрономи наблюдава пълно лунно затъмнение.

- **Г)** Задължително ли е и другият астроном да вижда затъмнението? [4 т.]

Справочни данни:

Наклон на лунната орбита към еклиптиката – $i = 5^\circ 9'$.

Радиус на Земята – $R_E = 6\,371\text{ km}$.

Координати на Капела – $\alpha_K = 5^{\text{h}} 17^{\text{m}}$ и $\delta_K = 45^\circ 50'$

През 2039 г. есенното равноденствие настъпва на 22 септември.

Решение.

а) Ако наблюдател с географска ширина φ , наблюдава звезда с деклинация δ и тя е в горна кулминация, то за зенитното ѝ отстояние z е изпълнено:

$$z = |\delta - \varphi|$$

В нашия случай, имаме наблюдатели с ширини φ_1 и φ_2 , като без ограничаване на общността можем да приемем, че $\varphi_1 < \varphi_2$. Описаната ситуация е възможна, ако за единия наблюдател Капела кулминира на юг от зенита, а за другия на север. И за двамата звездата има зенитно отстояние $z = 20^\circ$. Оттук следва, че:

$$z = \delta - \varphi_1, \quad z = \varphi_2 - \delta.$$

Лесно пресмятаме, че: $\varphi_1 = 25^\circ 50'$ $\varphi_2 = 65^\circ 50'$.

Понеже горната кулминация на Капела настъпва едновременно за двамата астрономи, те се намират на един и същи меридиан. Следователно, разстоянието между техните обсерватории е:

$$d = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{360^\circ} 2\pi R_E \approx 4\,450\text{ km}.$$

б) Тъй като Капела се намира в горна кулминация, то моментът по звездно време (s) е равен на нейната ректасцензия, т.е. $s = 5^{\text{h}} 17^{\text{m}}$. В деня на есенно равноденствие слънчевото и

звездното време съвпадат. С всеки изминал ден, звездното време „изпреварва“ средното слънчево с 3 m 56 s. От деня на последното есенно равноденствие са изминали 89 денонощия. Следователно натрупаната „преднина“ на звездното денонощие е 350 min 4 s. Пресмятаме, че слънчевото денонощие в този момент е **23:27**.

в) За да бъде незалязваща една звезда, за нейната деклинация трябва да бъде изпълнено:

$$\delta > 90^\circ - \varphi,$$

където φ е географската ширина на наблюдателя. Виждаме, че това е изпълнено за младия астроном, който се намира на $\varphi_2 = 65^\circ 50'$ (защото за него $90^\circ - \varphi = 24^\circ 10'$). Следователно, от негова гледна точка Капела не залязва.

В долна кулминация Капела се намира над точно в посока север. Ъгловото отстояние между звездата и северния небесен полюс е $90^\circ - \delta$. Понеже височината на полюса над хоризонта е равна на географската ширина на наблюдателя φ_2 , то в долна кулминация височината на Капела е:

$$h_{\min} = \varphi_2 - (90^\circ - \delta) = \mathbf{21^\circ 40'}.$$

г) Ако едно лунно затъмнение се наблюдава в местна полунощ, то Луната тогава е в горна кулминация за съответния наблюдател. В случая Луната би била в горна кулминация и за двамата наблюдатели, защото те са на един меридиан. Астрономът, който евентуално би могъл да не вижда затъмнението е този, който се намира на по-северната географска ширина. Трябва да проверим дали за него при определени условия Луната може да се окаже неизгряващо светило, т.е. дори в горна кулминация да е под хоризонта.

По време на лунно затъмнение, Луната се намира в точка от еклиптиката, която е противоположна на точката, в която се намира в този момент Слънцето. Това означава, че за да не се вижда Луната, трябва Слънцето да е над хоризонта в долна кулминация.

Географската ширина на по-северния астроном е близка до тази на северната полярна окръжност, но все пак е по-малка. Това означава, че той непременно би виждал лунното затъмнение, наблюдавано от другия, който се намира на юг.

Наклонът на лунната орбита е даден, но не е нужен за решаване на задачата :).

Никола Каравасилев

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

а) – За съобразяване на това, че единият астроном вижда Капела на юг от зенита, а другият я вижда на север – **1 т.**

– За съобразяване, че зенитното отстояние на Капела е равно на модула на разликата между нейната деклинация и географските ширини – **1 т.**

– За намиране на двете географски ширини – **1т.**

– За изразяване на разстоянието между обсерваториите и верен числен отговор – **1 т.**

б) – За съобразяване на звездното време – **0.5 т.**

– За намиране на броя дни, изминали след последното есенно равноденствие – **1 т.**

– За правилно пресмятане на разликата между звездното и слънчевото време – **1 т.**

– За пресмятане на слънчевото време – **0.5 т.**

в) – За доказателство за това, че Капела е незалязваща за астронома, намиращ се на по-северна географска ширина – **2 т.**

- За правилно изразяване на височината на Капела в долна кулминация и верен числен отговор – **2 т.**
- г) – За правилни разсъждения относно това, че по време на лунно затъмнение Луната се намира в точка от еклиптиката – **1 т.**
- За съобразяване на това, че никоя точка от еклиптиката не може да е незалязваща за наблюдател на тази географска ширина – **2 т.**
- За правилен извод, че затъмнението непременно трябва да се вижда и от двамата астрономи – **1 т.**

Задача 2. Тройна звезда. Една звездна система се състои от три звезди, които се движат около общия център на масите. Те имат еднакви радиуси, но различни температури. Зрителният лъч от земния наблюдател лежи точно в орбиталната равнина на звездите, т.е. те могат да се закриват плътно една друга при наблюдение от Земята. Нека да означим звездите с A , B и C . Известно е, че когато звездата A закрива напълно звездата B , сумарната звездна величина на системата е $m_1 = 4^m.87$. Когато A закрива плътно C , системата има звездна величина $m_2 = 4^m.76$. Когато се наблюдават и трите компоненти, системата има блясък $m = 4^m.51$.

- А) Намерете звездната величина на системата m_3 , в момент, когато звездата B закрива плътно звездата A . **[10 т.]**
- Б) Определете индивидуалните звездни величини на трите звезди m_A , m_B и m_C . **[5 т.]**

Решение.

а) Нека да означим осветеностите, които се създават от трите звезди с E_A , E_B и E_C , а общата осветеност с E . Когато звездата A закрива изцяло B , то осветеността създавана от системата е:

$$E_1 = E_A + E_C.$$

Във втория случай, когато C е напълно закрита от A , осветеността е

$$E_2 = E_A + E_B.$$

А когато виждаме всички звезди, те създават осветеност

$$E = E_A + E_B + E_C.$$

В случая, за който се пита в това подусловие, осветеността е

$$E_3 = E_B + E_C.$$

Нека въведем следните означения:

$$X = \frac{E_B}{E_A} \quad \text{и} \quad Y = \frac{E_C}{E_A}.$$

Използвайки X и Y , можем да запишем осветеностите така:

$$E_1 = (Y + 1)E_A, \quad E_2 = (X + 1)E_A, \quad E = (1 + X + Y)E_A, \quad E_3 = (X + Y)E_A.$$

Използвайки закона на Погсън:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{1 + X + Y}{Y + 1} = 10^{0.4(m_1 - m)} = 1.393 \equiv a.$$

$$\frac{E}{E_2} = \frac{1 + X + Y}{X + 1} = 10^{0.4(m_2 - m)} = 1.259 \equiv b.$$

След изразяване на някое от двете неизвестни от едното уравнение и заместването му в другото, получаваме:

$$X = \frac{b(a - 1)}{a + b - ab} \approx 0.551, \quad Y = \frac{a(b - 1)}{a + b - ab} \approx 0.402.$$

Отново записвайки закона на Погсън:

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{X + Y}{X + 1} = 10^{0.4(m_2 - m_3)},$$

откъдето:

$$m_3 = m_2 - 2.5 \lg \left(\frac{X + Y}{X + 1} \right) \approx 5^{\text{m}}.29.$$

б) От закона на Погсън имаме, че

$$\frac{E}{E_A} = 1 + X + Y = 10^{0.4(m_A - m)}.$$

Оттук следва, че

$$m_A = m + 2.5 \lg(X + Y + 1) \approx 5^{\text{m}}.24.$$

Също така, можем да използваме, че

$$X = \frac{E_B}{E_A} = 10^{0.4(m_A - m_B)} \text{ и } Y = \frac{E_C}{E_A} = 10^{0.4(m_A - m_C)}.$$

Получаваме

$$\begin{aligned} m_B &= m_A - 2.5 \lg X \approx 5^{\text{m}}.88, \\ m_C &= m_A - 2.5 \lg Y \approx 6^{\text{m}}.23. \end{aligned}$$

Никола Каравасилев

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

- а) – За правилна математическа постановка за намиране на звездната величина – 4 т.**
 – За правилни преобразования и получен краен израз – 4 т.
 – За правилна числена стойност – 2 т.

- б) – За правилно математическо изразяване на търсените звездни величини и верни крайни буквени изрази – 3.5 т.**
 – За верни числени отговори – 1.5 т.

Задача 3. Галактика с фонова звезда. Линията на калция CaII K (с лабораторна дължина на вълната 3968.5 Å) се наблюдава в спектъра на спирална галактика на дължина 4103.2 Å. Приемете, че радиусът на галактиката е 24 крс, а ъгълът между оста ѝ и зрителния лъч е 0°.

- **А)** Колко дъгови секунди е ъгловият размер на галактиката? [4 т.]
- **Б)** Как бихме могли да изчислим масата на галактиката, ако разполагаме с достатъчно мощна техника, с която да извършим наблюденията в рамките на една нощ? Коментирайте качествено. [4 т.]

Звезда от нашата галактика се проектира върху най-източната по небето точка от диска на галактиката. Собственото движение на звездата има компоненти $\mu_\alpha \cos \delta = -62.7 \text{ mas/уг}$ и $\mu_\delta = -41.5 \text{ mas/уг}$. Годишният паралакс на звездата е 13.2 mas. Линията на калция в нейния спектър се наблюдава на дължина на вълната 3969.1 Å.

- **В)** За колко години звездата ще пресече видимия диск на галактиката? [4 т.]
- **Г)** Какво физическо разстояние (в хелиоцентрична система) ще измине звездата, докато пресича видимия диск на галактиката? [3 т.]

Справочни данни:

Константа на Хъбъл – $H = 70 \text{ (km/s)/Mpc}$

Скорост на светлината – $3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ au}$

$1 \text{ au} = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$

Решение.

а) Червеното отместване на галактиката е

$$z = \frac{\Delta\lambda_G}{\lambda_0} = \frac{v_{RG}}{c}.$$

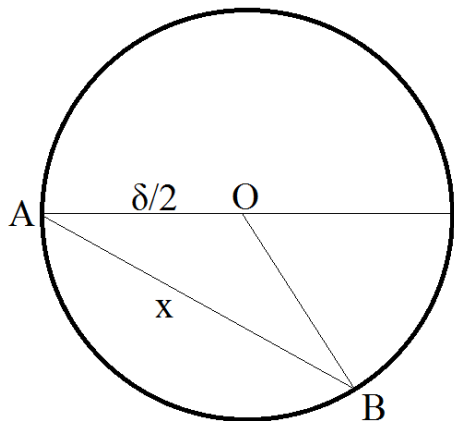
Пресмятаме и получаваме $z = 0.03394$, съответстващо на скорост на отдалечаване на галактиката $v_{RG} = 10180 \text{ km/s}$. От закона на Хъбъл получаваме разстоянието до галактиката:

$$r_G = \frac{v_{RG}}{H_0} = 145.5 \text{ Mpc}.$$

Ъгловият размер на галактиката с радиус R е

$$\delta = \frac{2R}{r_G} = \mathbf{68.0''}.$$

б) Тъй като наклонът на галактиката е 0° , радиалната компонента на скоростта на въртене около оста е 0 и не може да бъде използвана за пресмятане на масата на галактиката. За да се пресметне масата гравитационно, трябва да регистрираме движение на обекти в гравитационното поле на галактиката, чиито орбити не са в равнината на диска. Такива могат да бъдат **кълбовидни купове**, свързани с галактиката или **галактики-спътници**. С наблюдение на достатъчно на брой такива, които в даден момент имат различна ориентация и са на различни положения по орбитите си, масата на галактиката може да бъде пресметната с висока точност по статистически методи. За целта трябва да разполагаме с достатъчно мощен телескоп с високорезолуционен спектрограф, с който да получим спектри на множество кълбовидни купове или галактики-спътници и по ефекта на Доплер да измерим лъчевите им скорости. При наличие на техниката наблюденията могат да бъдат извършени в рамките на една нощ.



в) На чертежа с плътна линия е представен видимият ръб на галактиката по небето, като ъгловият радиус е $OA = \delta/2$. Тъй като компонентите на собственото движение са отрицателни, звездата се движи на югозапад и, пресичайки диска на галактиката, ще измине ъглово разстояние $AB = x$. Пресмятаме ъгъл A:

$$\tan A = \frac{|\mu_\delta|}{|\mu_\alpha \cos \delta|} = 33.5^\circ$$

От геометрични съображения

$$x = \delta \cos A = 56.7''.$$

Пресмятаме абсолютната стойност на собственото движение:

$$\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos \delta)^2 + (\mu_\delta)^2} = 75.2 \text{ mas/yr}.$$

Времето за пресичане на диска е

$$t = \frac{x}{\mu} = 754 \text{ yr.}$$

г) Разстоянието до звездата е

$$r = \frac{1}{p} = 75.76 \text{ pc.}$$

Тангенциалната ѝ скорост е

$$v_T = \mu r = 27.0 \text{ km/s.}$$

Радиалната скорост пресмятаме от ефекта на Доплер, използвайки наблюдаваната дължина на вълната за звездата:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_R}{c} \Rightarrow v_R = 45.4 \text{ km/s.}$$

Пълната пространствена скорост на звездата спрямо Слънцето е

$$v = \sqrt{v_T^2 + v_R^2} = 52.8 \text{ km/s.}$$

Търсеното разстояние е

$$s = vt = 8400 \text{ au} = 0.0407 \text{ pc.}$$

Александър Куртенов

Задача 4. Плътност на Земята. Меги и Дона са станали професионални астрономи. Като истински астрономи, те обичат приключенията, и се намират съответно на северния и южния полюс на Земята. Меги вижда, че Луната започва да залязва (най-долната точка от лунния диск докосва хоризонта) за нея точно в 0h 00m UT, и изпраща съобщение за това на Дона по Viber. От своя страна Дона нетърпеливо очаква да види изгрева на Луната, но той започва (за Дона най-горната точка от лунния диск докосва хоризонта) чак ... в 8h 46m UT. Дона ентусиазирано отговаря на Меги, че Луната е започнала да изгрява. След кратък размисъл Меги и Дона откриват, че използвайки *само* това измерване и някои справочни данни, те могат да изчислят плътността на Земята. Направете това и вие!

Не отчитайте рефракцията на светлината. Приемете, че Луната може да се види ясно дори на полюса на който в този момент е ден, а също и че нейната орбита лежи в равнината на еклиптиката. [15 т.]

Справочни данни:

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Сидеричен период на Луната – $T_{SID} = 27.3 \text{ d}$

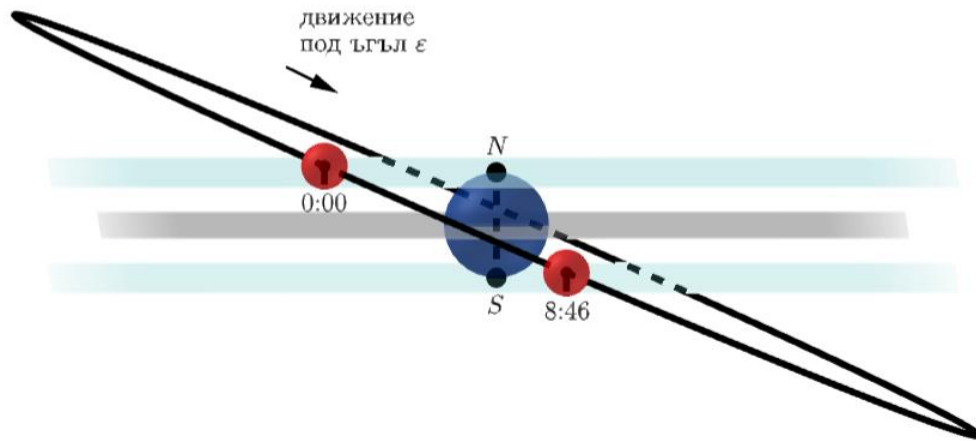
Наклон на земната ос – $\varepsilon = 23^\circ 26'$

Решение.

Между началото на залеза на северния полюс и началото на изгрева за южния полюс трябва да измине интервал от време $\Delta t = 8.77 \text{ h}$. Причината за това е значителният физически размер на Земята. Положенията в пространството на равнините на хоризонта при двата полюса се разминават. В началния момент Луната тъкмо ще докосва едната равнина за първи път, а в крайния момент тя тъкмо ще докосва другата.

По условие лунната орбита лежи в равнината на еклиптиката. Това означава, че орбитата сключва ъгъл $\varepsilon = 23^\circ 26'$ с екваториалната равнина на Земята. Тя ще сключва на практика същия ъгъл и с равнините на хоризонта при полюсите, защото земният радиус е много малък спрямо радиуса на лунната орбита.

Отделно от това, преместването на Луната по орбитата ѝ за интервала Δt е сравнително малко спрямо пълния ѝ орбитален период, така че можем да приближим, че то става по отсечка (казано по друг начин, кривината на орбитата е пренебрежима в кратки интервали от време). Геометричната постановка на задачата е показана на чертежа:



Нека отсечката на преместване на Луната има дължина l . Луната се придвижва между две хоризонтални равнини на разстояние два земни радиуса R_E една от друга, тоест компонентата на l по направление на линията NS има дължина $2R_E$. Така $l \sin \varepsilon = 2R_E$. Приемайки лунната орбита за кръгова с радиус r , можем да образуваме пропорцията

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{\Delta t}{T_{SID}}.$$

Оттук изразяваме $r = \frac{R_E}{\pi \sin \varepsilon} \frac{T_{SID}}{\Delta t}$. Ако пренебрегнем масата на Луната, третият закон на Кеплер дава следната връзка между r и масата на Земята M_E :

$$\frac{r^3}{T_{SID}^2} = \frac{GM_E}{4\pi^2}.$$

След заместване на формулата ни за r достигахме до

$$\frac{M_E}{R_E^3} = \frac{4T_{SID}}{\pi G \Delta t^3 \sin^3 \varepsilon}.$$

Но плътността на Земята се задава с $\rho_E = \frac{M_E}{\frac{4}{3}\pi R_E^3}$, откъдето

$$\rho_E = \frac{3T_{SID}}{\pi^2 G \Delta t^3 \sin^3 \varepsilon} = 5400 \text{ kg/m}^3.$$

Реалната стойност е $\rho_E = 5510 \text{ kg/m}^3$. Идеята за намиране на времето Δt между залеза и изгрева на Луната идва от известната задача IAO 2001-β5 (авт. Ева Божурова).

Никола Каравасилев, реш. Стефан Иванов