

XXVI Национална олимпиада по астрономия

IV кръг, 14.07.2023 г., Варна, теоретичен тур
Старша възраст – решения

Задача 1. Хипотетичен Марс. Както е известно, около моментите на своите противостояния външните планети видимо се движат на фона на звездите в обратна на орбиталното си движение посока. Това се нарича ретроградно движение.

- Намерете при какъв най-малък ексцентрицитет e на орбитата на Марс той няма да извършва ретроградно движение в момента на велико противостояние, ако голямата полуос на орбитата му остане същата. [3 m.]
- Какви биха били най-голямата и най-малката звездната величина на Марс в противостояние в този случай? [5 m.]
- Известно е, че при настоящия ексцентрицитет на марсианската орбита, велико противостояние на Марс се наблюдава веднъж на 15 или 17 години. През колко време би се наблюдавало това явление при ексцентрицитета, пресметнат в първото подусловие? [2 m.]
- Нека си представим, че се намираме на екватора точно в момент, в който хипотетичният Марс (имащ минималния нужен ексцентрицитет на орбитата си) е във велико противостояние и наблюдаваме централно покритие (окултация) на звезда от него. Оценете продължителността на окултацията t , ако в средата ѝ Марс се наблюдава в зенита? А каква ще бъде продължителността t' на пасаж на Земята пред диска на Слънцето за марсианския наблюдател? [5 m.]

Приемете, че Земята се движи по кръгова орбита, лежаща в една равнина с орбитата на Марс.

Справочни данни:

Астрономическа единица	$1 \text{ AU} = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$
Голяма полуос на орбитата на Марс	$a_M = 1.52 \text{ AU}$
Ексцентрицитет на орбитата на Марс	$e' = 0.093$
Звездна величина на Марс във велико противостояние	$m = -2.8^m$
Радиус на Марс	$R_M = 3389 \text{ km}$
Радиус на Земята	$R_E = 6378 \text{ km}$
Радиус на Слънцето	$R_\odot = 696\,000 \text{ km}$

Решение:

а) За да не се наблюдава ретроградно движение, е нужно скоростта на Марс в противостояние V_p да бъде равна или по-голяма от скоростта, с която Земята се движи по своята орбита V_E . Тъй като се разглежда велико противостояние, то Марс трябва да преминава през перихелий в този момент. Скоростта на Земята е $V_E = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_E}}$, където $M_\odot$ е масата на Слънцето, а $r_E = 1 \text{ AU}$ е радиусът на земната орбита. Нека да означим с e търсения ексцентрицитет. Скоростта на Марс се изразява с $V_p = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_M} \frac{1+e}{1-e}}$. Приравнявайки скоростите, получаваме $\frac{a_M}{r_E} = \frac{1+e}{1-e}$. Оттук следва

$$e = \frac{a_M - r_E}{a_M + r_E} = \boxed{0.206.}$$

За да не се наблюдава ретроградно движение, ексцентрицитетът на марсианската орбита трябва да е по-голям от тази стойност.

б) Когато Марс е във велико противостояние, той се намира на разстояние от Слънцето $r_1 = a_M(1-e') = 1.38 \text{ AU}$ и разстоянието до Земята е $r_2 = r_1 - r_E = 0.38 \text{ AU}$. Означаваме с E осветеността, която Марс създава във велико противостояние. Тогава може да запишем, че

$$E \propto \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}.$$

Ако Марс се движи по хипотетичната орбита, ще бъде най-ярък в противостояние, ако се намира в перихелия на орбитата си. Тогава разстоянието между Марс и Слънцето би било $r_3 = a_M(1-e) = 1.21 \text{ AU}$, а разстоянието до Земята е $r_4 = a_M(1-e) - r_E \approx 0.21 \text{ AU}$. Ако осветеността, която се създава от Марс по време на велико противостояние, но обикаляйки по новата орбита, е $E_{\max}$, то можем да запишем, че

$$E_{\max} \propto \frac{1}{r_3^2} \cdot \frac{1}{r_4^2}.$$

Нека звездната величина, която съответства на тази осветеност, е $m_{\max}$. За да намерим точните изрази за съответните осветености, трябва да отчетем и други фактори (размер и отражателна способност на Марс). Тъй като и в двата случая планетата е една и съща, тези параметри не се променят. Следователно можем да запишем следното съотношение:

$$\frac{E_{\max}}{E} = \frac{r_1^2}{r_3^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_4^2} = 4.4.$$

Съгласно закона на Погсън

$$m_{\max} = m - 2.5 \lg \left(\frac{E_{\max}}{E} \right) = \boxed{-4.4^{\text{m}}}.$$

Ако в момента на своята опозиция Марс преминава през афелия на своята орбита, то разстоянията от него до Слънцето и до Земята са съответно $r_5 = a_M(1+e) = 1.83 \text{ AU}$ и $r_6 = a_M(1+e) - r_E = 0.83 \text{ AU}$. Ако осветеността, която Марс ще създава върху Земята в този момент, е $E_{\min}$, а звездната величина е $m_{\min}$, то

$$E_{\min} \propto \frac{1}{r_5^2} \cdot \frac{1}{r_6^2},$$

и съответно

$$\frac{E_{\min}}{E} = \frac{r_1^2}{r_5^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_6^2} = 0.52.$$

Оттук по закона на Погсън

$$m_{\min} = m - 2.5 \lg \left(\frac{E_{\min}}{E} \right) = \boxed{-0.5^{\text{m}}}.$$

в) Съгласно третия закон на Кеплер, орбиталният период на всяка планета зависи само от големата полуос на нейната орбита. Тъй като Марс запазва големата полуос на орбитата си, то и периодът, за който той обикаля около Слънцето, ще остане същият. Великите противостояния се наблюдават, когато Марс е близо до перихелия на орбитата си. Интервалът от време между две поредни такива конфигурации зависи само от орбиталните периоди на двете планети (приблизително е равен на най-малкото общо кратно). Следователно времето, което изминава между две поредни велики противостояния, няма да се промени.

г) Ако Марс има минималния нужен ексцентрицитет, при който не се наблюдава ретроградно движение, в момента на противостояние линейните скорости на двете планети са равни по големина. Това означава, че Марс не би следвало да се движи на фона на звездите, гледано от нашата планета. Но поради това, че нашата Земя се върти около оста си, за наблюдател на екватора Марс ще се движи от изток на запад (т.е. ще бъде ретрограден).

Видимият ъглов диаметър на Марс по време на великото противостояние е $\delta_M = \frac{2R_M}{r_4}$. Скоростта на точка от земния екватор е $V = \frac{2\pi R_E}{24\text{h}} = 0.46 \text{ km/s}$. Това означава, че видимата ъглова

скорост на Марс за този наблюдател е $\omega_1 = \frac{V}{r_4}$. Продължителността на окултацията е равна на времето, за което Марс ще измине един свой диаметър на фона на звездите. Това означава, че:

$$t = \frac{\delta_M}{\omega_1} = \frac{2R_M}{V} = \boxed{4.1 \text{ h.}}$$

Сега да разгледаме и пасажа на Земята. Ъгловата скорост на Слънцето за наблюдател на Марс в момента на противостое е $\omega_2 = \frac{V_E}{r_3}$. Относителната ъглова скорост на Земята спрямо Слънцето, гледано от Марс, ще бъде именно ω_2 . Това е така, защото Земята и Марс имат равни линейни скорости, което означава, че нашата планета не се движи на фона на звездите за Марс. Видимият ъглов размер на Слънцето за Марс е $\delta_\odot = \frac{2R_\odot}{r_3}$. Следователно търсената продължителност на преминаването на Земята пред диска на Слънцето е:

$$t' = \frac{\delta_\odot}{\omega_2} = \frac{2R_\odot}{V_E} = \boxed{12.9 \text{ h.}}$$

Никола Каравасилев

Критерии за оценяване (15 т.):

- За съобразяване, че линейните скорости при противостояние са равни **1 т.**
- За скоростта на Марс в перихелий **1 т.**
- За израз и вярна числена стойност за ексцентрицитета **1 т.**
- За изрази за разстоянията Марс-Земя/Марс-Слънце в трите случая и числени стойности **1.5 т.**
- За правилни съображения за осветеностите от Марс върху Земята **1.5 т.**
- За съотношения между осветеностите **1 т.**
- За приложение на закон на Погсън и изрази/стойности за търсените звездни величини **1 т.**
- За обяснение на факторите, от които зависи интервалът между велики противостояния **1 т.**
- За правилен извод, че интервалът няма да се промени **1 т.**
- За линейната скорост на точка от екватора **0.5 т.**
- За видимата ъглова скорост и ъгловия размер на Марс **1 т.**
- За израз и вярна числена стойност за търсената продължителност **1 т.**
- За изразяване на относителната ъглова скорост на Земята спрямо Слънцето от Марс **1.5 т.**
- За израз и вярна числена стойност за продължителността на пасажа **1 т.**

Задача 2. Двойственост. Запазен с достатъчно хляб и пърленки за дългата вечер, бележитият астроном Чавдар Ненов прави наблюдения на близка затъмнително двойна система с новия 1.5-метров телескоп на НАО Рожен. Компонентите на системата са сферични звезди от главната последователност и масите им са по-малки от масата на Слънцето. Времето между всеки два съседни минимума в кривата на блясъка на системата е $T = 4.42 \text{ h}$, измервано от център до център. Всички минимума имат продължителност $\Delta t = 2.05 \text{ h}$ и еднаква дълбочина $\Delta m = 0.753$ в болометрични звездни величини.

- а) Намерете общата маса на компонентите M_{tot} . Обосновайте внимателно разсъжденията си за формата на орбитата и физическите характеристики на двойната система. За звезди от главната последователност с $M \leq 1 M_\odot$ връзката маса-радиус е $M \propto R^{5/4}$. **[8 т.]**

Изследователят Християн Тодоров е на съвсем друга планета, някъде далеч от Слънчевата система. Както и за Чавдар, системата се проявява като спектрално двойна. И при двете компоненти е силен натриевият дублет (две спектрални линии на натрия с лабораторни дължини $\lambda_{01} = 589.00 \text{ nm}$ и $\lambda_{02} = 589.59 \text{ nm}$), поради което в тази област на спектъра на системата се наблюдават общо четири линии.

- б) Оценете статистическата вероятност p Християн да наблюдава системата като затъмнително двойна, но едновременно с това да не може да получи в никой момент спектър на системата, в който двете линии с най-малка дължина на вълната, измежду четирите линии, да идват от една и съща компонента. **[7 т.]**

Указание: Продължителността на минимумите се дефинира като времето между първи и последен контакт на дисковете. Дълбочината на минимумите се измерва спрямо звездната величина, която системата има точно преди първи контакт на дисковете. Не отчитайте ефекти, произтичащи от обмен на маса между компонентите.

Справочни данни:

Скорост на светлината

$$c = 300\,000 \text{ km/s}$$

Гравитационна константа

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Радиус на Слънцето

$$R_{\odot} = 696\,000 \text{ km}$$

Маса на Слънцето

$$M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Ефективна температура на Слънцето

$$T_{\odot} = 5770 \text{ K}$$

Решение:

а) Първо отбелязваме, че минимумите, съответстващи на едно и също физично разположение на компонентите, не са съседни, а са през един. Орбиталният период на системата тогава е $\tau = 2T = 8.84 \text{ h}$.

Да разсъждаваме върху елиптичната относителна орбита на едната компонента спрямо другата. Затъмненията са през точно половин период. Това означава, че апсидната линия на орбитата се разполага по зрителния лъч. Самите затъмнения имат еднаква продължителност, обаче скоростите в перицентър и апоцентър по орбитата са различни. Единствената възможност е относителната орбита да е кръгова.

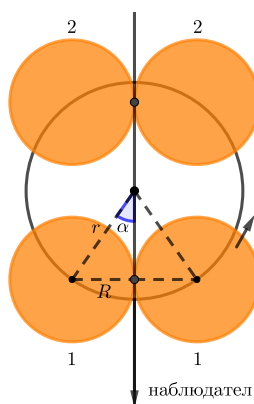
Максималната затъмнена площ на задната компонента при затъмнение винаги е еднаква. По условие сумарният поток също спада еднакво при двата класа затъмнение, тоест компонентите имат равни температури. Означаваме с S и S_0 излъчващите площи преди затъмнение и в минимум. Тогава

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{S}{S_0} \Rightarrow \frac{S}{S_0} = \frac{1}{2}.$$

Когато по-малката компонента минава пред по-голямата, тя може да закрие площ, която е най-много нейната собствена. Това е по-малко или равно от половината от общата площ. Равенство може да се достигне само ако компонентите са точно равни по размер и затъмненията са централни. И така, двете звезди са напълно еднакви и орбитите са кръгови.

Прави впечатление, че затъмнението обхваща голяма част от орбиталния период. Това предполага, че компонентите са близо една до друга, при което трябва да работим с точната геометрия на системата. Ъгълът на завъртане в рамките на затъмнение е 2α на чертежа, като

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\Delta t}{\tau}, \quad \sin \alpha = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi \Delta t}{2T}\right)} R. \quad (1)$$



Отделно от това, общата форма на третия закон на Кеплер дава

$$\frac{(2r)^3}{(2T)^2} = \frac{G(2M)}{4\pi^2}.$$

Ползваме връзката маса-радиус и заместваме (1):

$$r^3 = \frac{T^2}{4\pi^2} GM_{\odot} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{5/4},$$

$$R = \left(\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^{5/4}} \frac{T^2}{4\pi^2} \sin^3 \left(\frac{\pi \Delta t}{2T} \right) \right)^{4/7}.$$

Пресмятаме $R = 581\,000\text{ km}$ и по връзката маса-радиус $M = 0.80 M_{\odot}$. Общата маса е $M_{\text{tot}} = \boxed{1.60 M_{\odot}}$.

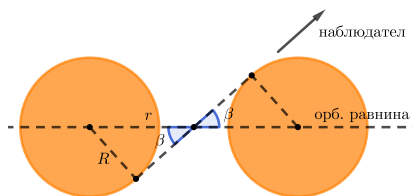
б) Разстоянието между линиите на дублета е $\Delta\lambda = \lambda_{02} - \lambda_{01} = 0.59\text{ nm}$. За да може четирите линии да се разделят две по две, трябва линиите от едната компонента да са отместени с повече от $\Delta\lambda$ спрямо тези на другата. Това се получава, когато относителната лъчевата скорост на едната компонента спрямо другата надвишава по модул

$$\Delta v \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{01}} c = 300\text{ km/s}.$$

Скоростта на едната компонента относно другата е $v = \frac{2\pi(2r)}{2T} = 345\text{ km/s}$. Нека зрителният лъч на наблюдателя е наклонен на i спрямо орбиталната равнина. Максималната относителна лъчева скорост тогава е $v \cos i$. Щом наблюдателят не може никога да раздели линиите две по две, той наблюдава системата от такова i , че $v \cos i < \Delta v$. Граничният наклон тогава се задава с

$$\delta = \arccos \left(\frac{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{01}} c}{\frac{2\pi r}{T}} \right) = \arccos \left(\frac{\Delta\lambda c T}{2\pi \lambda_{01} R} \sin \left(\frac{\pi \Delta t}{2T} \right) \right) = 29.3^\circ,$$

и диапазонът възможни ъгли е $i \in (29.3^\circ; 90^\circ)$. Сега да намерим и критерий за наблюдаемост на затъмнения. Съгласно чертежа, наклонът трябва да бъде $i < \beta$:



Видимо β е еквивалентно на α от миналия чертеж. Граничният наклон за затъмнения съответно е $\beta = \frac{\pi \Delta t}{2T} = 41.7^\circ$. Търсеният диапазон тогава става $i \in (29.3^\circ; 41.7^\circ)$. Вероятността за попадане в него е дялът от пространството в този интервал. Намираме го с формулата за сферична шапка:

$$p = \frac{2\pi(1 - \sin \delta) - 2\pi(1 - \sin \beta)}{2\pi} = \sin \beta - \sin \delta = \boxed{0.18}.$$

Стефан Иванов

Критерии за оценяване (15 т.):

- | | |
|---|--------|
| – За доказване, че орбитите са кръгови | 1.5 т. |
| – За доказване, че компонентите са еднакви | 1.5 т. |
| – За връзка между радиус на орбита и радиус на компонентите | 1.5 т. |
| – За правилно приложен III закон на Кеплер (вкл. $2T$, $2r$, $2M$) | 1.5 т. |
| – За използване на връзката маса-радиус и преобразования | 1 т. |
| – За верен числен резултат | 1 т. |
| – За намиране на орбиталната скорост | 1 т. |
| – За намиране на нужната лъчева скорост за разместване на линиите | 1 т. |
| – За граничния наклон по критерия за спектъра | 1 т. |
| – За граничния наклон по критерия за затъмнения | 2 т. |

- За формулата за сферична шапка
- За верен числен резултат

1 m.

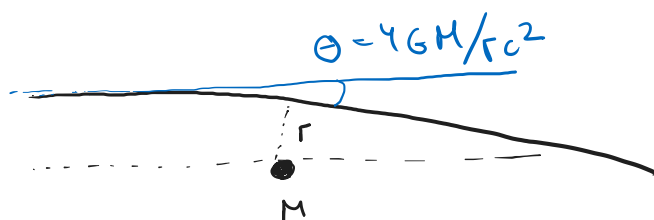
1 m.

Задача 3. Бавна звезда и бърз пулсар. Старателният спектроскопист Елена Йорданова следи звезда със значително собствено движение. Тя се отдалечава с хелиоцентрична лъчева скорост $v_r = 10 \text{ m/s}$. Преди една година лъчевата ѝ скорост е имала точно същата големината.

- а) На какво разстояние Δr ще се отдалечи звездата от Слънцето до следващата година? Не отчитайте гравитационните сили от околните тела върху звездата. [4 m.]

Съгласно общата теория на относителността, гравитацията от масивен обект отклонява пътя на светлината. За лъч светлина, преминаващ на минимално разстояние r от тяло с маса M , ъгълът на отклонение се задава с $\theta = \frac{4GM}{rc^2}$ (виж Фиг. 1). Ако наблюдателят, лещата и масивният обект са на една права, изображението на обекта представлява пръстен от светлина с радиус θ_E , наричан радиус на Айнщайн.

- б) Изразете θ_E чрез разстоянията до лещата и обекта d_L, d_S . [3 m.]



Фигура 1

Радиоастрономът Стела Бинева наблюдава далечен пулсар с период $P = 1.5 \text{ ms}$, чиято пространствена скорост е незначителна. Колежката ѝ Елена забелязва, че нейната звезда днес преминава пред пулсара на Стела. Елена иска да получи повече информация за своя обект. Спомняйки си за лекциите от университета, тя моли Стела да направи измерване на масата на звездата, използвайки ефекта на гравитационната леща.

В конкретния случай се наблюдава т.нар. гравитационна микролеща. Радиусът на Айнщайн θ_E е под разделителната способност, така че далечният обект отново бива наблюдаван като точка на небето, но пътят на светлината от него все пак се променя.

Много отпреди звездата да наближи пулсара по небето, Стела е започнала да записва момените, в които импулсите се засичат от радиотелескопа. Тогавашно тя е измервала постоянен период между импулсите. Екстраполирайки от тогавашните наблюдения, тя би очаквала, че един от импулсите, получени днес, ще пристигне в момент t_1 . Поради влиянието на звездата обаче, той всъщност пристига в момент t_2 , със закъснение $\Delta t \equiv t_2 - t_1$.

- в) Покажете, че очакваното закъснение в момента на регистриране на сигнала е $\Delta t \approx \frac{2GM}{c^3}$. Не отчитайте гравитационното забавяне на времето за сигналите от пулсара, а само геометричните ефекти. [4 m.]

С изненада Стела открила, че моментите, в които действително получава импулси, съвпадат с моментите, в които е предсказано, че ще бъдат получавани импулси, съгласно екстраполацията от началните наблюдения.

- г) Каква е масата на звездата M ? Обосновете своя отговор. [4 m.]

Указание: Лъчевата скорост на звездата е малка, поради което няма нужда тя да се отчита при пресмятанията след а). За малки ъгли α е изпълнено $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. За $|x| < 1$ и $|nx| \ll 1$ може да се използва биномното приближение,

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx.$$

Справочни данни:

Скорост на светлината

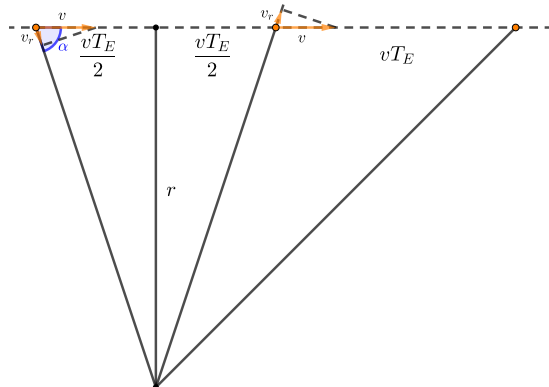
Гравитационна константа

$$c = 300\,000 \text{ km/s}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Решение:

а) При липса на сили върху звездата, траекторията ѝ ще е права линия. При това единствената геометрична постановка, при която търсеното може да се наблюдава, е когато звездата минава през най-близкото си до Слънцето положение. От едната му страна тя ще има положителна лъчева скорост v_r , а от другата ще има отрицателна лъчева скорост със същата големина $-v_r$.



Означаваме дължината на годината с T_E , пространствената скорост на звездата с v_r и минималното разстояние до звездата с r . Разстоянията от Слънцето до звездата сега и след една година са съответно $\sqrt{r^2 + \left(\frac{vT_E}{2}\right)^2}$ и $\sqrt{r^2 + \left(\frac{3vT_E}{2}\right)^2}$. Тъй като $vT_E \ll r$, може да използваме биномното приближение, записвайки разстоянията като

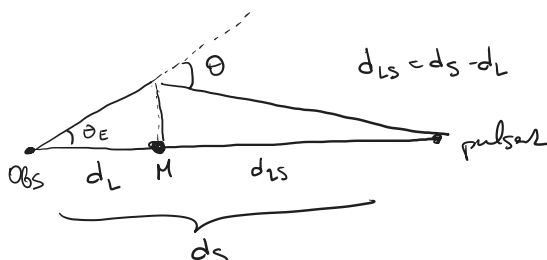
$$r \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{vT_E}{2r} \right)^2 \right), \quad r \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3vT_E}{2r} \right)^2 \right).$$

Разликата между тях представлява отдалечаването от Слънцето до следващата година, при което намираме $\Delta r = \frac{v^2 T_E^2}{r}$. Сега забелязваме от чертежа, че

$$\cos \alpha = \frac{v_r}{v} \approx \frac{vT_E/2}{r}.$$

Тогава $\Delta r = 2v_r T_E = \boxed{6.3 \times 10^8 \text{ m.}}$

б) Съставяме чертеж, в който приемаме, че лъчът се пречупва „наведнъж“ от тялото с маса M .



Използваме факта, че всички ъгли са малки. Това ни позволява да напишем

$$\theta_E = \frac{r}{d_L}, \quad d_S \theta_E = (d_S - d_L) \theta.$$

Заместяваме израза за θ от условието във второто уравнение и посредством първото намираме следната формула:

$$\theta_E = \left(\frac{4GM}{c^2} \frac{d_S - d_L}{d_S d_L} \right)^{1/2}.$$

б) Отместването в момента на наблюдение е заради удължението на пътя при наличието на лещата. Пътят, който сигналът от пулсара изминава при липсата на лещата, е $s_0 = d_S$. За сметка на това, пътят при наличието на лещата е сумата от хипотенузите на двата правоъгълни триъгълника на чертежа. Нека бележим с s_1 и s_2 съответно лявата и дясната хипотенуза. За лявата хипотенуза съответно виждаме, че $\cos \theta_E = d_L/s_1$. Тъй като ъгълът е малък, можем да ползваме биномно приближение, съответно

$$s_1 = \frac{d_L}{\cos \theta_E} \simeq \frac{d_L}{1 - \theta_E^2/2} \simeq d_L \left(1 + \frac{\theta_E^2}{2} \right).$$

За дясната хипотенуза ползваме Питагорова теорема, $s_2^2 = r^2 + d_{LS}^2$. Отново прилагаме биномно приближение и използваме факта, че $d_L \ll d_S$:

$$s_2 = (d_{LS}^2 + r^2)^{1/2} \simeq d_{LS} \left(1 + \frac{r^2}{2d_{LS}^2} \right) = d_{LS} \left(1 + \frac{\theta_E^2 d_L^2}{2d_{LS}^2} \right).$$

Накрая, пълният път при наличието на лещата се получава като

$$s = s_1 + s_2 = (d_L + d_{LS}) + \frac{d_L \theta_E^2}{2} \left(1 + \frac{d_L}{d_{LS}} \right) = d_S + \frac{\theta_E^2 d_L d_S}{2d_{LS}}.$$

Закъснението съответно се получава вследствие от удължаването на пътя и крайната скорост на светлината. Окончателният ни израз за закъснението е:

$$\Delta t = \frac{s - s_0}{c} = \frac{\theta_E^2 d_L d_S}{2c d_{LS}} = \frac{d_L d_S}{2d_{LS}} \frac{4GM}{c^3} \frac{d_S - d_L}{d_S d_L} = \boxed{\frac{2GM}{c^3}}.$$

г) Ако импулсите пристигат в очакваните моменти, то изоставането заради лещата е всъщност цяло число периоди на пулсара, т.е. $\Delta t = nP$, $n \in \mathbb{N}$. Пренареждаме формулата, за да получим израз за масата:

$$M = \frac{c^3 P}{2G} n = 3.03 \times 10^{32} \text{ kg} \times n = 150 M_\odot \times n.$$

Дори и при $n = 1$ това е изключително висока маса, от порядъка на най-масивните открити звезди. За $n \geq 2$ вече е нереалистично да има такава звезда, така че като отговор оставяме

$150 M_\odot$.

Стефан Иванов [а)] и Любомир Шойлев [б), в), г)]

Критерии за оценяване (15 т.):

- | | |
|---|--------|
| – За правилна геометрична постановка | 1 т. |
| – За изразяване на разстоянията с биномно приближение | 1 т. |
| – За съотношение между скоростите и разстоянията | 1 т. |
| – За верен числен резултат | 1 т. |
| – За правилно построение на геометрията на лещата | 1 т. |
| – За съобразяване на уравнението, свързващо θ и θ_E | 1 т. |
| – За правилно достигнат окончателен израз | 1 т. |
| – За приближен израз за s_1 | 1.5 т. |
| – За приближен израз за s_2 | 1.5 т. |
| – За довършване на доказателството за Δt | 1 т. |
| – За съображението, че $\Delta t = nT$ | 2 т. |
| – За астрофизично съображение относно масата и краен отговор | 2 т. |

Задача 4. В куба. Около Слънцето обикаля еднороден тъмен астероид с формата на куб със страна $a = 1 \text{ km}$. Периодът на околоосното му въртене е много по-малък от орбиталния му период.

- а) В даден момент трима астрономи се намират върху квадратните стени на астероида и правят нощни наблюдения. Колко най-малко общи звезди N_1 от небесната сфера могат да се наблюдават и от тримата едновременно? [1 m.]
- б) Колко най-много звезди N_2 ще могат да се наблюдават в даден момент от един наблюдател някъде на повърхността на астероида? [1 m.]
- в) В даден момент двама астрономи наблюдават от съседни стени на астероида. За всеки от тях има астролог някъде по Земята, който вижда същото разположение на звездите спрямо видимия хоризонт. Какво е разстоянието L между двамата астролози по земната повърхност? [1 m.]
- г) Двама астрономи някъде върху стените на астероида виждат дадена звезда на една и съща ненулева височина спрямо видимия хоризонт. Ако след това единият тръгне директно към другия по повърхността на куба, какво най-дълго разстояние l може да му се наложи да извърви, докато го стигне? [2 m.]

Нека оста на въртене на астероида е перпендикулярна на орбиталната му равнина и минава през средите на две срещуположни стени. Температурата на астероида варира между $T_1 = 131\text{ K}$ и $T_2 = 185\text{ K}$ при движението му по орбитата.

- д) Оценете орбиталния период на астероида T . [3 m.]

Мащабен проект, ръководен от астроинженера Петър Попов, променя орбитата на астероида, привеждайки я до кръгова с радиус $r = 1.1\text{ AU}$. По негово указание целият астероид се покрива със слънчеви панели, които събират енергия от Слънцето, като върху астероида се монтират двигатели, които могат да променят неговата ориентация в пространството по всякакъв начин.

- е) Намерете максималния и минималния светлинен поток ($\Phi_{\max}$ и $\Phi_{\min}$, във ватове), който може да попадне върху слънчевите панели. [2 m.]

За да поддържат лесно панелите, техниците Александър Желязков и Атанас Митрев са прокопали тясна шахта по един от диагоналите на куба. Атанас спи в безтегловност в центъра на шахтата, докато Александър поправя панелите на входа на шахтата. По невнимание той изпуска в шахтата заечния си ключ с маса $m = 500\text{ g}$. Ключът пада в шахтата и удря Атанас, засядайки в скафандрa му.

- ж) На какво максимално разстояние s ще се отдалечи Атанас от центъра на шахтата? Масата на Атанас е $M = 63\text{ kg}$. Втората космическа скорост от върха на еднороден куб със страна a и плътност ρ е $v' = ka\sqrt{G\rho}$, където $k = 1.543$. [5 m.]

Справочни данни:

Константа на Стефан-Болцман

Астрономическа единица

Радиус на Земята

Радиус на Слънцето

Ефективна температура на Слънцето

Брой звезди по небесната сфера (равномерно разпределени):

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$1 \text{ AU} = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$$

$$R_E = 6371 \text{ km}$$

$$R_{\odot} = 696\,000 \text{ km}$$

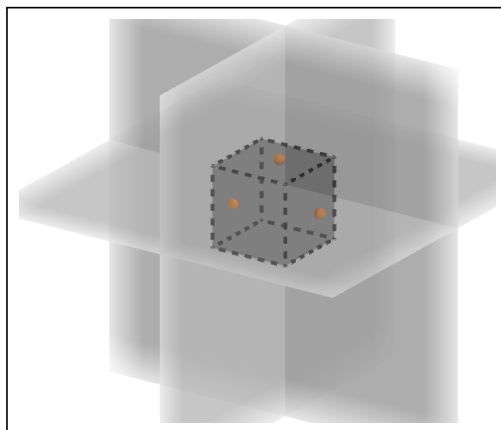
$$T_{\odot} = 5770 \text{ K}$$

$$N_0 = 6000$$

Решение:

а) Наблюденията са нощни, тоест за никой от наблюдателите Слънцето не е над видимия хоризонт. Във всеки момент Слънцето е под хоризонта за три стени, които споделят общ връх. Наблюдателите ще имат най-малко общи видими звезди, когато са разположени по един за всяка от тези стени. Тогава $1/8$ от небесната сфера е над хоризонтите и за тримата (вж. чертежа). В резултат $N_1 = \frac{1}{8}N_0 = \boxed{750}$.

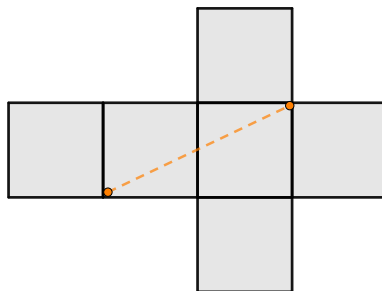
б) Най-много звезди се виждат от върховете на куба, където кубът скрива $1/8$ от пространството за наблюдателя.



Съответно $N_2 = \frac{7}{8}N_0 = \boxed{5250.}$

б) Ако впишем сфера в куба, става ясно, че хоризонтите за астрономите на куба са като хоризонтите от шест точки по Земята, всяка намираща се на 90° от съседните си. На астрономи от съседни стени съответстват астролози на разстояние $L = \frac{\pi}{2}R = \boxed{10\,000\text{ km.}}$

г) За да виждат обект на еднаква ненулева височина, двамата трябва или да са на една стена, или да са на съседни стени, като източникът да лежи на равнината през общия им ръб, която разполовява ъгъла между стените. Вторият случай ще даде максималното разстояние. За да го намерим, нека да направим разбивка на куба. Тогава максималното разстояние е по права между върховете в две съседни стени. Ако сгънем куба обратно, този факт няма да се промени. И така, отговорът е $l = \sqrt{5}a = \boxed{2.24\text{ km.}}$



г) Астероидът се върти с много по-малък период от орбиталния си. Съвместно с малкия му размер това означава, че температурата по повърхността му в даден момент е приблизително еднаква навсякъде. Промените в температурата всъщност идват от това, че орбитата на астероида има значителен ексцентрицитет e .

Астероидът приема излъчване с някаква ефективна площ S , която се явява средната площ, изложена към Слънцето с течение на едно околоосно въртене. Тъй като максималната изложена площ е $\sqrt{2}a^2$, а минималната е a^2 , може да оценим¹ $S \approx \frac{1+\sqrt{2}}{2}a^2 \approx 1.21a^2$.

Означаваме голямата полуос на орбитата с r_0 и използваме баланс между получена и преизлъчена енергия при албедо нула, съответно при афелий и перихелий:

$$\frac{L_\odot}{4\pi r_0^2(1+e)^2}S = \sigma T_1^4(6a^2), \quad \frac{L_\odot}{4\pi r_0^2(1-e)^2}S = \sigma T_2^4(6a^2).$$

След разделяне на двата изрази получаваме за ексцентритета

$$e = \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2 + T_1^2} = 0.33.$$

Сега се връщаме върху едно от уравненията за баланса и със закона на Стефан-Болцман намираме

$$r = \left(\frac{T_\odot}{T_2}\right)^2 \frac{R_\odot}{1-e} \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{12}} = 3.03\text{ AU}.$$

От третия закон на Кеплер следва $T = \boxed{5.3\text{ yr.}}$

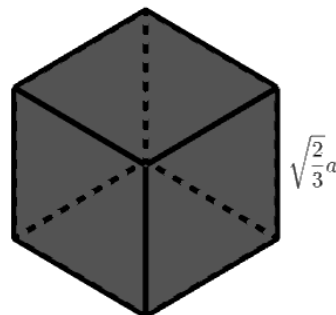
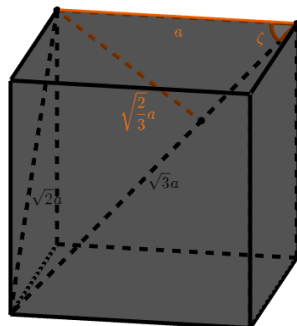
е) Минимален поток се получава, когато кубът е обърнат към Слънцето само с една стена. Тогава той е $\Phi_{\min} = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}a^2 = \boxed{1.12 \times 10^9\text{ W.}}$

Максимален поток се получава, когато един от телесните диагонали на куба е ориентиран към Слънцето. Трябва да намерим каква ефективна площ е изложена към Слънцето в тази ситуация. Съгласно симетрията, всеки от ръбовете на куба ще има еднаква дължина след проектиране

¹Точната стойност, която се получава с интегриране, е $S = \frac{4}{\pi}a^2 \approx 1.27a^2$. Периодът тогава ще бъде 5.5 yr.

перпендикулярно на телесния диагонал. Затова проекцията на куба, гледано от Слънцето, непременно трябва да има формата на правилен шестоъгълник. Да намерим дължината на ръба b за този шестоъгълник. От подобните триъгълници на чертежа имаме $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}$, тоест $b = \sqrt{\frac{2}{3}}a$.

Лицето на шестоъгълника е сбор от лицата на шест равностранни триъгълника със страна b . Лицето на всеки триъгълник е $\frac{1}{2}b^2 \sin 60^\circ$, така че това на шестоъгълника е $\sqrt{3}a^2$. Максималният поток тогава е $\Phi_{\max} = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} \sqrt{3}a^2 = 1.94 \times 10^9 \text{ W}$.



Допълнение: В това решение ние не доказахме, че разглежданите случаи са наистина оптимални. Доказателството не се изисква от участниците, но може да бъде направено с елементарна математика. Разполагаме ръбовете на куба успоредно на декартовите оси x , y и z . Въвеждаме сферични полярни координати, където полярният ъгъл θ се отчита от оста z , а азимуталният ъгъл φ се отчита от оста x . Нека слънчевата светлина идва от направление (θ, φ) , като без ограничение избираме $\theta \in [0^\circ; 90^\circ]$ и $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$. Единичният вектор на това направление се задава в декартови координати с $(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Нормалите на трите стени, върху които пада слънчева светлина, същевременно са $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Проектираната площ на всяка стена тогава ще се определя като a^2 , умножено със скаларното произведение на нормалата ѝ и вектора на слънчевата светлина. Така общата проектирана площ на куба за дадено (θ, φ) е

$$S = a^2(\sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta).$$

Започваме с минимизацията на S . Първо фиксираме θ и търсим φ , при което S е най-малко. Това означава да намерим φ , при което $\sin \varphi + \cos \varphi$ е минимално. Същият израз е $\sqrt{2}(\sin \varphi \cos 45^\circ + \cos \varphi \sin 45^\circ) = \sqrt{2} \sin(\varphi + 45^\circ)$. Минимумът е при $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 90^\circ$. Тогава $S = a^2(\sin \theta + \cos \theta)$, което се минимизира спрямо θ по същата процедура. Най-малката стойност е a^2 ; тя се постига при $\theta = 0^\circ$ или $\theta = 90^\circ$. Тази геометрия съответства на случай, в който към Слънцето е изложена само една стена.

Максимизацията е подобна. Максимимумът за фиксирано θ ще се постигне при $\varphi = 45^\circ$. Тогава $S = a^2(\sqrt{2} \sin \theta + \cos \theta)$. За да намерим оптималното θ , полагаме $\sqrt{2} \equiv \tan \alpha$, при което $S = \frac{a^2}{\cos \alpha}(\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) = \frac{a^2}{\cos \alpha} \cos(\theta - \alpha)$. Изразът е най-голям при $\theta = \alpha$. И щом $\tan \alpha = \sqrt{2}$, то $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Максималното S съответно е $\sqrt{3}a^2$. Може да се провери, че намереното θ съответства на това да гледаме куба по телесния диагонал. $\square$

ж) Да означим гравитационната потенциална енергия (ГПЕ) на гаечния ключ във върха на куба с V . По дефиницията за втората космическа скорост v' е вярно

$$\frac{mv'^2}{2} + V = 0. \quad (2)$$

Първо трябва да намерим скоростта v_0 , с която гаечният ключ пада върху техниката в центъра на куба. За да направим това, ще изразим ГПЕ V' в центъра спрямо V . Да разложим куба на 8 кубчета с ръб $a/2$. Тъй като потенциалните енергии от взаимодействието с различни маси се събират алгебрично, може да заключим че $V' = 8V''$, където V'' е потенциалната енергия във върха на кубче с ръб $a/2$. Потенциалната енергия на повърхността на обект с маса μ и радиус a има вида $\sim \frac{Gm\mu}{a}$. Ако плътността на обекта е ρ , то ГПЕ има вида $\sim G\mu\rho a^2$. От тази пропорционалност следва, че $V'' = \frac{1}{4}V$, откъдето $V' = 2V$. Сега прилагаме закон за запазване на енергията за

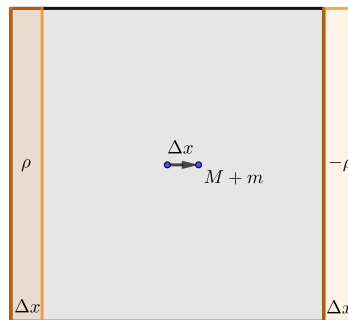
изпуснатия гаечен ключ:

$$0 + V = \frac{mv_0^2}{2} + 2V. \quad (3)$$

Сега от (2) и (3) следва, че $v_0 = v'$. Ударът на гаечния ключ с техника ще е абсолютно нееластичен. Скоростта u_0 , с която техникът стартира движението си след удара, тогава може да бъде определена със закона за запазване на импулса,

$$mv_0 = (M + m)u_0.$$

Да изследваме по-нататъшното движение. Използваме координатна система с начало в центъра на куба и оси x , y , z , които са успоредни на ръбовете. Търсим гравитационната сила, която действа на техника, когато бъде отместен по оста x на малко разстояние Δx от координатното начало. Масата, която го привлича, тогава се явява наслагване (суперпозиция) на куб с ръб a и техника в центъра му, и две квадратни плочи с дебелина Δx и ръб a , едната с плътност ρ , другата с плътност $-\rho$. Съгласно симетрията, кубът не му оказва сила, но всяка от плочите ще поражда сила върху техника, насочена към координатното начало.



Ще намерим силата от плочата ρ . Нека вземем малък елемент от плочата с площ ΔS , който е отклонен на θ от оста x , гледано от техника, намирайки се на разстояние r от него. Силата по x , която елементът поражда, се задава с

$$\frac{G(M + m)\rho\Delta x\Delta S}{r^2} \cos \theta.$$

Забелязваме, че $\frac{\Delta S}{r^2} \cos \theta$ всъщност се явява пространственият ъгъл $\Delta\Omega$, който елементът обхваща. Повтаряйки това разсъждение за всеки елемент от плочата поотделно, общата сила по x от плочата ще е $G(M + m)\rho\Delta x\Omega$, където Ω е общият пространствен ъгъл, който тя обхваща за техника. Той е $1/6$ от пространството, тоест $\Omega = \frac{2}{3}\pi$. Втората плоча създава същата по големина и посока сила. Общата сила по x от двете тогава е $\frac{4}{3}\pi G(M + m)\rho\Delta x$.

Сега същото разсъждение може да бъде повторено за отместване по y и за отместване по z . Събирайки векторно силите по трите оси, се оказва, че ако отместим техника с произволно малко разстояние $\vec{r}$ от центъра на куба, той ще изпитва въртяща сила $\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi G(M + m)\rho\vec{r}$. Това представлява квазиеластична сила с константа на еластичност $K \equiv \frac{4}{3}\pi G(M + m)\rho$. Тогава движението на техника представлява хармонична осцилация около равновесно положение в центъра на куба. При отместване s от центъра потенциалната енергия на такова движение се изразява с $\frac{1}{2}Ks^2$. И така, за да намерим s , остава да приложим закона за запазване на енергията:

$$\frac{1}{2}(M + m)u_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}Ks^2,$$

$$\frac{m^2}{M + m}v_0^2 = Ks^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2}{M + m}v'^2 = \frac{4}{3}\pi G(M + m)\rho s^2,$$

$$\left(\frac{m}{M + m}\right)^2 k^2 a^2 G \rho = \frac{4}{3}\pi G \rho s^2 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{3k^2}{4\pi}} \cdot \frac{m}{M + m} a = \boxed{5.9 \text{ m.}}$$

Стефан Иванов

Критерии за оценяване (15 т.):

– За наблюдатели по три съседни стени	0.5 т.
– За верен числен резултат	0.5 т.
– За наблюдател във връх на куба	0.5 т.
– За верен числен резултат	0.5 т.
– За наблюдатели на 90° по Земята	0.5 т.
– За верен числен резултат	0.5 т.
– За разбивка на куба	1 т.
– За положение на наблюдателите	0.5 т.
– За верен числен резултат	0.5 т.
– За оценка на ефективната проектирана площ на куба	0.5 т.
– За правилно записан топлинен баланс	1 т.
– За изразяване на ексцентрицитета	0.5 т.
– За намиране на голямата полуос	0.5 т.
– За верен резултат за периода	0.5 т.
– За верен отговор за минималния поток	0.5 т.
– За разбиране на ситуацията с максимален поток	0.5 т.
– За намиране на размерите на шестоъгълника	0.5 т.
– За верен отговор за максималния поток	0.5 т.
– За доказателство на оптималните случаи	<i>доп.</i> 1 т.
– За качествено разбиране, че се търси връзка между гравитационни потенциали	1 т.
– За намиране на скоростта на заечния ключ в центъра	1 т.
– За намиране на началната скорост след удара	0.5 т.
– За идея за суперпозиция на маси	0.5 т.
– За намиране на гравитационната сила от плоча	1 т.
– За верен числен резултат	1 т.

Редакция на задачите: Стефан Иванов, Захари Дончев