

XXVI Национална олимпиада по астрономия

IV кръг, 14.07.2023 г., Варна, теоретичен тур
Старша възраст

Задача 1. Хипотетичен Марс. Както е известно, около моментите на своите противостояния външните планети видимо се движат на фона на звездите в обратна на орбиталното си движение посока. Това се нарича ретроградно движение.

- Намерете при какъв най-малък ексцентрицитет e на орбитата на Марс той няма да извършва ретроградно движение в момента на велико противостояние, ако голямата полуос на орбитата му остане същата. [3 m.]
- Какви биха били най-голямата и най-малката звездната величина на Марс в противостояние в този случай? [5 m.]
- Известно е, че при настоящия ексцентрицитет на марсианската орбита, велико противостояние на Марс се наблюдава веднъж на 15 или 17 години. През колко време би се наблюдавало това явление при ексцентрицитета, пресметнат в първото подусловие? [2 m.]
- Нека си представим, че се намираме на екватора точно в момент, в който хипотетичният Марс (имащ минималния нужен ексцентрицитет на орбитата си) е във велико противостояние и наблюдаваме централно покритие (окултация) на звезда от него. Оценете продължителността на окултацията t , ако в средата ѝ Марс се наблюдава в зенита? А каква ще бъде продължителността t' на пасаж на Земята пред диска на Слънцето за марсианския наблюдател? [5 m.]

Приемете, че Земята се движи по кръгова орбита, лежаща в една равнина с орбитата на Марс.

Справочни данни:

Астрономическа единица	$1 \text{ AU} = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$
Голяма полуос на орбитата на Марс	$a_M = 1.52 \text{ AU}$
Ексцентрицитет на орбитата на Марс	$e' = 0.093$
Звездна величина на Марс във велико противостояние	$m = -2.8^m$
Радиус на Марс	$R_M = 3389 \text{ km}$
Радиус на Земята	$R_E = 6378 \text{ km}$
Радиус на Слънцето	$R_\odot = 696\,000 \text{ km}$

Задача 2. Двойственост. Запасен с достатъчно хляб и пърленки за дългата вечер, бележитият астроном Чавдар Ненов прави наблюдения на близка затъмнително двойна система с новия 1.5-метров телескоп на НАО Рожен. Компонентите на системата са сферични звезди от главната последователност и масите им са по-малки от масата на Слънцето. Времето между всеки два съседни минимума в кривата на блясъка на системата е $T = 4.42 \text{ h}$, измервано от център до център. Всички минимума имат продължителност $\Delta t = 2.05 \text{ h}$ и еднаква дълбочина $\Delta m = 0.753$ в болометрични звездни величини.

- Намерете общата маса на компонентите M_{tot} . Обосновете внимателно разсъжденията си за формата на орбитата и физическите характеристики на двойната система. За звезди от главната последователност с $M \leq 1 M_\odot$ връзката маса-радиус е $M \propto R^{5/4}$. [8 m.]

Изследователят Християн Тодоров е на съвсем друга планета, някъде далеч от Слънчевата система. Както и за Чавдар, системата се проявява като спектрално двойна. И при двете компоненти е силен натриевият дублет (две спектрални линии на натрия с лабораторни дължини $\lambda_{01} = 589.00 \text{ nm}$ и $\lambda_{02} = 589.59 \text{ nm}$), поради което в тази област на спектъра на системата се

наблюдават общо четири линии.

- б) Оценете статистическата вероятност p Християн да наблюдава системата като затъмнително двойна, но едновременно с това да не може да получи в никой момент спектър на системата, в който двете линии с най-малка дължина на вълната, измежду четирите линии, да идват от една и съща компонента. [7 m.]

Указание: Продължителността на минимумите се дефинира като времето между първи и последен контакт на дисковете. Дълбочината на минимумите се измерва спрямо звездната величина, която системата има точно преди първи контакт на дисковете. Не отчитайте ефекти, произтичащи от обмен на маса между компонентите.

Справочни данни:

Скорост на светлината

$$c = 300\,000 \text{ km/s}$$

Гравитационна константа

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Радиус на Слънцето

$$R_{\odot} = 696\,000 \text{ km}$$

Маса на Слънцето

$$M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Ефективна температура на Слънцето

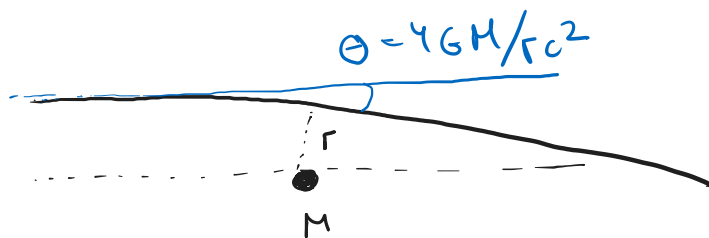
$$T_{\odot} = 5770 \text{ K}$$

Задача 3. Бавна звезда и бърз пулсар. Старателният спектроскопист Елена Йорданова следи звезда със значително собствено движение. Тя се отдалечава с хелиоцентрична лъчева скорост $v_r = 10 \text{ m/s}$. Преди една година лъчевата ѝ скорост е имала точно същата големина.

- а) На какво разстояние Δr ще се отдалечи звездата от Слънцето до следващата година? Не отчитайте гравитационните сили от околните тела върху звездата. [4 m.]

Съгласно общата теория на относителността, гравитацията от масивен обект отклонява пътя на светлината. За лъч светлина, преминаващ на минимално разстояние r от тяло с маса M , ъгълът на отклонение се задава с $\theta = \frac{4GM}{rc^2}$ (виж Фиг. 1). Ако наблюдателят, лещата и масивният обект са на една права, изображението на обекта представлява пръстен от светлина с радиус θ_E , наричан радиус на Айнщайн.

- б) Изразете θ_E чрез разстоянията до лещата и обекта d_L, d_S . [3 m.]



Фигура 1

Радиоастрономът Стела Бинева наблюдава далечен пулсар с период $P = 1.5 \text{ ms}$, чиято пространствена скорост е незначителна. Колежката ѝ Елена забелязва, че нейната звезда днес преминава пред пулсара на Стела. Елена иска да получи повече информация за своя обект. Спомняйки си за лекциите от университета, тя моли Стела да направи измерване на масата на звездата, използвайки ефекта на гравитационната леща.

В конкретния случай се наблюдава т.нар. гравитационна микролеца. Радиусът на Айнщайн θ_E е под разделителната способност, така че далечният обект отново бива наблюдаван като точка на небето, но пътят на светлината от него все пак се променя.

Много отпреди звездата да наближи пулсара по небето, Стела е започнала да записва момените, в които импулсите се засичат от радиотелескопа. Тогава тя е измервала постоянен период между импулсите. Екстраполирайки от тогавашните наблюдения, тя би очаквала, че един от импулсите, получени днес, ще пристигне в момент t_1 . Поради влиянието на звездата обаче, той всъщност пристига в момент t_2 , със закъснение $\Delta t \equiv t_2 - t_1$.

- в) Покажете, че очакваното закъснение в момента на регистриране на сигнала е $\Delta t \approx \frac{2GM}{c^3}$. Не отчитайте гравитационното забавяне на времето за сигналите от пулсара, а само геометричните ефекти. [4 m.]

С изненада Стела открила, че моментите, в които действително получава импулси, съвпадат с моментите, в които е предсказано, че ще бъдат получавани импулси, съгласно екстраполацията от началните наблюдения.

- г) Каква е масата на звездата M ? Обосновете своя отговор. [4 m.]

Указание: Лъчевата скорост на звездата е малка, поради което няма нужда тя да се отчита при пресмятанията след а). За малки ъгли α е изпълнено $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. За $|x| < 1$ и $|nx| \ll 1$ може да се използва биномното приближение,

$$(1+x)^n \approx 1+nx.$$

Справочни данни:

Скорост на светлината

$$c = 300\,000 \text{ km/s}$$

Гравитационна константа

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Задача 4. В куба. Около Слънцето обикаля еднороден тъмен астероид с формата на куб със страна $a = 1 \text{ km}$. Периодът на околоосното му въртене е много по-малък от орбиталния му период.

- а) В даден момент трима астрономи се намират върху квадратните стени на астероида и правят нощни наблюдения. Колко най-малко общи звезди N_1 от небесната сфера могат да се наблюдават и от тримата едновременно? [1 m.]
- б) Колко най-много звезди N_2 ще могат да се наблюдават в даден момент от един наблюдател някъде на повърхността на астероида? [1 m.]
- в) В даден момент двама астрономи наблюдават от съседни стени на астероида. За всеки от тях има астролог някъде по Земята, който вижда същото разположение на звездите спрямо видимия хоризонт. Какво е разстоянието L между двамата астролози по земната повърхност? [1 m.]
- г) Двама астрономи някъде върху стените на астероида виждат дадена звезда на една и съща ненулева височина спрямо видимия хоризонт. Ако след това единият тръгне директно към другия по повърхността на куба, какво най-дълго разстояние l може да му се наложи да извърви, докато го стигне? [2 m.]

Нека оста на въртене на астероида е перпендикулярна на орбиталната му равнина и минава през средите на две срещуположни стени. Температурата на астероида варира между $T_1 = 131 \text{ K}$ и $T_2 = 185 \text{ K}$ при движението му по орбитата.

- д) Оценете орбиталния период на астероида T . [3 m.]

Мащабен проект, ръководен от астроинженера Петър Попов, променя орбитата на астероида, привеждайки я до кръгова с радиус $r = 1.1 \text{ AU}$. По негово указание целият астероид се покрива със слънчеви панели, които събират енергия от Слънцето, като върху астероида се монтират двигатели, които могат да променят неговата ориентация в пространството по всякакъв начин.

- е) Намерете максималния и минималния светлинен поток ($\Phi_{\max}$ и $\Phi_{\min}$, във ватове), който може да попадне върху слънчевите панели. [2 m.]

За да поддържат лесно панелите, техниците Александър Желязков и Атанас Митрев са прокопали тясна шахта по един от диагоналите на куба. Атанас спи в безтегловност в центъра на шахтата, докато Александър поправя панелите на входа на шахтата. По невнимание той изпуска в шахтата гаечния си ключ с маса $m = 500 \text{ g}$. Ключът пада в шахтата и удря Атанас, засядайки в скафандъра му.

- ж) На какво максимално разстояние s ще се отдалечи Атанас от центъра на шахтата? Масата на Атанас е $M = 63 \text{ kg}$. Втората космическа скорост от върха на еднороден куб със страна a и плътност ρ е $v' = ka\sqrt{G\rho}$, където $k = 1.543$. [5 m.]

Справочни данни:

Константа на Стефан-Болцман

Астрономическа единица

Радиус на Земята

Радиус на Слънцето

Ефективна температура на Слънцето

Брой звезди по небесната сфера (равномерно разпределени):

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$1 \text{ AU} = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$$

$$R_E = 6371 \text{ km}$$

$$R_{\odot} = 696\,000 \text{ km}$$

$$T_{\odot} = 5770 \text{ K}$$

$$N_0 = 6000$$