

XXVI Национална олимпиада по астрономия

IV кръг, 14.07.2023 г., Варна, теоретичен тур
Младша възраст – решения

Задача 1. Околополюсна звезда. Околополюсна звезда е наблюдавана от две различни места, пункт А (50° E, 50° N) и пункт В (70° E, 70° N). И за двете места звездата кулминира северно от зенита.

- а) За наблюдателя в точка В звездата достига горна кулминация в 6:06 UT (Универсално време) на 6 юни. Каква е ректасцензията на звездата? [5 m.]
- б) Шест часа преди горна кулминация на същата звезда за пункт В нейният азимут е с шест градуса по-голям от азимута, който тя е имала шест часа преди горната си кулминация за място А. Каква е деклинацията на звездата? [5 m.]
- в) Ако паралаксът на звездата е $0.0066''$, видимата ѝ звездна величина е 6.66 mag, температурата ѝ е 6666 K и звездата се върти около оста си с период 6.6 денонощия, то каква е скоростта на точка от екватора на звездата? Болометричната корекция на блясъка да се пренебрегне. [5 m.]

Справочни данни:

Абсолютна звездна величина на Слънцето

$$M_V = 4.75 \text{ mag}$$

Фотосферна температура на Слънцето

$$T_\odot = 5770 \text{ K}$$

Радиус на Слънцето

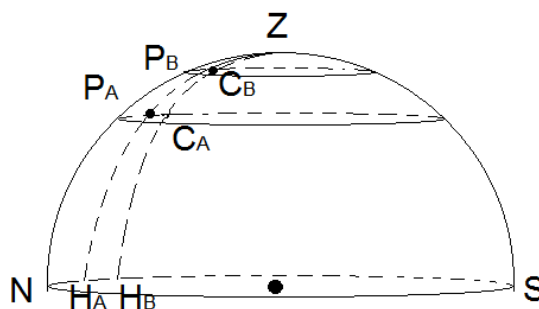
$$R_\odot = 696\,000 \text{ km}$$

Решение:

а) Тук пренебрегваме уравнението на времето. Място А (географска дължина $\lambda = 50^\circ$ E) е на $50/15 = 3.333$ h от Гриничкия меридиан в източна посока. Слънцето кулминира средно в 12 UT за Гринич, следователно ще кулминира в $12 - 3.333 = 8:40$ UT средно за 50° E. Звездата кулминира в 06:06 UT или 2 h 34 m по-рано от Слънцето. Следователно, това е разликата в звездните времена в моментите на двете кулминации (на звездата и на Слънцето). Затова ректасцензията на звездата е 2 h 34 m по-малка от ректасцензията на Слънцето на тази дата.

Датата 6 юни е 15 дни преди лятното слънцестоене, когато ректасцензията на Слънцето е 6 h. За 15 дни ректасцензията на Слънцето се променя приблизително с $15^\circ = 1$ h, т.е. ректасцензията на Слънцето е близо до 05 h 00 m. Ректасцензията на звездата е приблизително 05 h 00 m – 2 h 34 m = 02 h 26 m.

б) Звездата описва видима окръжност около полюса за 23 h 56 m, следователно за 6 h описва $1/4$ от окръжността. На голяма деклинация δ тази окръжност е приблизително планиметрична. Шест часа преди горна кулминация звездата ще бъде вдясно от северния небесен полюс, на разстояние $90^\circ - \delta$ от него. На чертежа това са дъгите $P_A C_A$ (гледано от място А) и $P_B C_B$ (гледано от място В). Положенията на звездата за двете места се проектират съответно в H_A и H_B .



Положенията на звездата C_A и C_B лежат приблизително на малките кръгове (алмукантарати), успоредни на хоризонта, минаващи през полюсите (на височина φ , равна на географската ширина). По условие $H_A H_B = 6^\circ$. Малките кръгове като ъглова дължина са еквивалентни на екватора, умножен по $\cos h$; съответно 1° на екватора се проектира като $1^\circ \cos h$ върху малкия кръг. Разстоянията от звездата до полюса $90^\circ - \delta$ се проектират като $(90^\circ - \delta) / \cos \varphi$ върху хоризонта (тъй като $h = \varphi$). Следователно можем да напишем

$$NH_B - NH_A = H_A H_B,$$

$$\frac{90^\circ - \delta}{\cos \varphi_B} - \frac{90^\circ - \delta}{\cos \varphi_A} = 6^\circ,$$

$$90^\circ - \delta = \frac{6^\circ}{\frac{1}{\cos 50^\circ} - \frac{1}{\cos 70^\circ}} = 4.4^\circ \Rightarrow \boxed{\delta = +85.6^\circ}.$$

6) Разстоянието до звездата е $r = \frac{1}{p} = 151.5$ рс. Абсолютната звездна величина намираме от

$$m - M = -5 + 5 \lg r,$$

получавайки $M = 0.76$ mag. Пренебрегвайки болометричната корекция, приемаме, че това е абсолютна болометрична звездна величина. Светимостта на звездата L намираме от

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{0.4(M_V - M)} = 39.44.$$

Радиуса на звездата намираме от закона на Стефан-Болцман:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4.$$

Получаваме $R = 4.70 R_\odot = 3\,271\,000$ km. От периода на въртене около оста P намираме скоростта на екватора:

$$v_{\text{eq}} = \frac{2\pi R}{P} = \boxed{36 \text{ km/s.}}$$

Александър Куртенов

Критерии за оценяване (15 т.):



Задача 2. Астероиди близнаци. Два астероида имат еднакви по форма орбити, лежащи в равнината на еклиптиката. За наблюдател от астероид A Слънцето има максимален видим ъглов размер, когато е с еклиптична дължина 16° . За наблюдател от астероид B то има максимален ъглов размер, когато е с еклиптична дължина 196° . Двата астероида обикалят около Слънцето в една и съща посока, като всеки от тях прави своята обиколка за 4.44 години. В момент 1 и двата астероида са на разстояние от Слънцето, равно на голямата полуос на техните орбити. Тогава за наблюдател от единия астероид елонгацията на другия астероид (видимото му ъглово отстояние от Слънцето) е равна на 58° .

а) Определете голямата полуос и ексцентрицитета на орбитите на двата астероида. [4 т.]

б) Определете разстоянието между двата астероида и относителната скорост на единия спрямо другия в момент 1. [3 т.]

За астероид B следващото преминаване през перихелия на неговата орбита ще бъде в момент 2, а за астероид A – в по-късния момент 3.

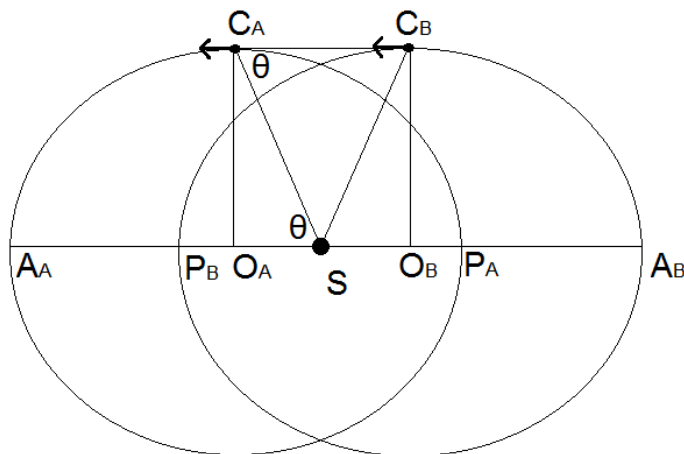
в) Колко дни след момент 1 ще бъде датата, намираща се по средата между момент 2 и момент 3? [2 т.]

В момент 2, за наблюдател на астероида, който тогава е в перихелий, Слънцето има видима ъглова скорост ω на фона на звездното небе.

- г) Колко дни след момент 2 Слънцето ще достигне до еклиптична дължина 196° за наблюдател от астероид A ? [3 m.]
- д) Каква ще бъде за наблюдател от астероид A видимата ъглова скорост на Слънцето, когато то е с еклиптична дължина 196° ? Изразете тази ъглова скорост чрез величината ω . [3 m.]

Решение:

а) Слънцето има максимален ъглов размер, гледан от всеки астероид в перихелий. Точките, в които това се случва за астероидите A и B , са срещуположни ($196^\circ - 16^\circ = 180^\circ$), следователно перихелиите на двете орбити са срещуположни.



Голямата полуос намираме от III закон на Кеплер, в мерни единици AU и yr:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \Rightarrow a = \boxed{2.70 \text{ au.}}$$

Разстоянието от Слънцето е равно на голямата полуос на орбитата, когато астероидът пресича малката ос, следователно в момент 1 двата астероида са в точки C_A и C_B на чертежа. От геометрията на елипса знаем, че $SC_A = a$, $SO_A = ea$. Следователно за елонгацията θ в момент 1 важи

$$e = \cos \theta = \frac{SO_A}{SC_A} = \boxed{0.53.}$$

б) От чертежа виждаме, че разстоянието между астероидите в момент 1 е $C_AC_B = O_AO_B = 2ea = \boxed{2.86 \text{ au.}}$ Двата астероида са на еднакво разстояние до Слънцето, по еднакви орбити, следователно скоростите им са еднакви. От чертежа те са в една и съща посока, следователно скоростта на единия спрямо другия е $\boxed{0.}$

в) В момент 2 астероид B е в точка P_B , а в момент 3 астероид A е в P_A . Площта, описана от отсечката Слънце-астероид B от точка C_B до точка P_B е S_{12} . Площта, описана от отсечката Слънце-астероид A от точка C_A до точка P_A , е S_{13} .

От чертежа забелязваме, че $S_{12} + S_{13}$ дава цялата площ на елипсата. Следователно по II закон на Кеплер $t_{12} + t_{13} = T$. Времето от момент 1 до момента по средата между 2 и 3 е

$$(t_{12} + t_{13})/2 = T/2 = 2.22 \text{ yr} = \boxed{811 \text{ d.}}$$

г) Слънцето S е на еклиптична дължина 196° , гледано от точки P_B и A_A . От чертежа описаната площ между точки C_B и P_B е

$$S_{12} = \frac{\pi ab}{4} - \frac{eab}{2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{e}{2} \right) ab.$$

Описаната площ между точки C_A и A_A е

$$S_{14} = \frac{\pi ab}{4} + \frac{eab}{2} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{e}{2}\right)ab.$$

Интервала Δt между преминаванията на астероид B през P_B и на астероид A през A_A намираме по II закон на Кеплер от разликата на тези две площи ΔS :

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta S}{\pi ab} = \frac{eab}{\pi ab} = \frac{e}{\pi}.$$

$$\Delta t = \frac{e}{\pi} = 0.749 \text{ yr} = \boxed{273 \text{ d.}}$$

г) Слънцето ще се движи с ъглова скорост ω_A , гледано от афелия в точка A_A , докато ъгловата скорост в перихелий е $\omega_P = \omega$. От закона за запазване на момента на импулса

$$m\omega r^2 = \text{const},$$

$$\omega_P r_P^2 = \omega_A r_A^2,$$

$$\omega_A = \omega_P \frac{r_P^2}{r_A^2} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \omega_P = \boxed{0.094\omega}.$$

Александър Куртенов

Критерии за оценяване (15 т.):



Задача 3. Коя е планетата? Когато вътрешната планета A се наблюдава в максимална елонгация, тя има следните геоцентрични екваториални координати: $\alpha_1 = 8^{\text{h}}4^{\text{m}}36^{\text{s}}$ и $\delta_1 = 22^\circ 58'$. По време на следващата максимална елонгация на планетата тези координати са: $\alpha_2 = 10^{\text{h}}56^{\text{m}}36^{\text{s}}$ и $\delta_2 = 6^\circ 31'$.

В момент на опозиция външната планета B има координати: $\alpha_1 = 2^{\text{h}}56^{\text{m}}57^{\text{s}}$ и $\delta_1 = 6^\circ 31'$. По време на следващата опозиция, планетата се наблюдава с координати: $\alpha_2 = 3^{\text{h}}13^{\text{m}}35^{\text{s}}$ и $\delta_2 = 17^\circ 38'$.

а) Кои са планетите A и B ? Аргументирайте своя отговор. Защо се получава разлика между истинските орбитални характеристики и изчисленията в тази задача? Приемете, че орбитите на всички планети са кръгови и лежат в една равнина. **[10 т.]**

б) Представете си, че от Земята наблюдаваме вътрешна планета в максимална елонгация. Можем ли да определим коя е тази планета, ако измерим само нейната видима ъглова скорост ω на фона на звездите в тази конфигурация? Аргументирайте своя отговор. **[5 т.]**

Планета	Голяма полуос [ау]	Орбитален период [yr]
Меркурий	0.39	0.24
Венера	0.72	0.62
Земя	1	1
Марс	1.5	1.88
Юпитер	5.2	11.9
Сатурн	9.5	29.5
Уран	19.2	84
Нептун	30.1	165

Решение:

а) Виждаме, че разликата в ректасцензиите на двете положения по небето, в които планетата е в максимална елонгация е $\Delta\alpha = 2^{\text{h}}52^{\text{m}} = 43^\circ$. По деклинация разликата е $\Delta\delta = 16^\circ27'$. Съвсем приблизително, можем да намерим ъгловото отстояние X , използвайки питагоровата теорема:

$$X^2 \approx \left(\Delta\alpha \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \right)^2 + \Delta\delta^2 = 45^\circ.$$

Допълнение: За да намерим точно ъгловото отстояние между двете точки, е необходимо да използваме сферична тригонометрия. По този начин се получава, че $X \approx 44.5^\circ$, което е достатъчно близко до полученото по приблизителния метод. □

Нека сега да намерим какво е ъгловото отстояние по небето на точките, в които Меркурий и Венера се намират, в две поредни свои максимални елонгации. Максималното възможно ъглово отстояние α_{max} между една вътрешна планета и Слънцето може да се определи от

$$\sin \alpha_{\text{max}} = \frac{r}{1 \text{ au}}, \quad \alpha_{\text{max}} = \begin{cases} 23^\circ & \text{за Меркурий,} \\ 46^\circ & \text{за Венера.} \end{cases}$$

Сега бихме могли да докажем количествено, че тази планета е Венера. Нека с T_V означим нейния орбитален период, а с T_E – този на Земята. Синодичният период на Венера е

$$T_{\text{syn}} = \frac{T_E T_V}{T_E - T_V} = 596 \text{ d.}$$

Интервалът от време между максимална източна и максимална западна елонгация на Венера би следвало да бъде

$$t = \frac{2(90^\circ - \alpha_{\text{max}})}{360^\circ} \approx 146 \text{ d.}$$

За това време Слънцето се е преместило с приблизително 144° на изток по еклиптика. От друга страна, Венера би трябвало да се е преместила с ъгъл $2\alpha_{\text{max}} = 92^\circ$ в източна посока относно Слънцето. Следователно ъгловото отстояние по небето между точките, в които Венера е била в двете поредни максимални елонгации, се очаква да е $144^\circ - 92^\circ = 52^\circ$. Получената стойност е близка до реално наблюдаваната, макар и да има някаква разлика. Повтаряме пресмятането за Меркурий и намираме твърде различен отговор. Така правим извод, че планетата е Венера.

Да преминем на външната планета. По време на опозиция външните планети се намират в (или много близо до) точка от небесната сфера, която е противоположна на точката от еклиптика, в която се намира Слънцето. Това означава, че ректасцензиите на Слънцето и планетите в тази конфигурация се различават с 12 часа. Оттук получаваме, че в двата момента на противостояние Слънцето е имало ректасцензии $14^{\text{h}}56^{\text{m}}57^{\text{s}}$ и $15^{\text{h}}13^{\text{m}}35^{\text{s}}$. Разликата им е $16^{\text{m}}38^{\text{s}}$ или около $4^\circ10'$.

Всички планети в Слънчевата система се движат в една посока по орбитите, така че за времето между противостоянията Слънцето е изминало около $360^\circ + 4^\circ10' = 364^\circ10'$ по еклиптика. Интервалът от време между тях е

$$T_{\text{syn}} = \frac{364^\circ10'}{360^\circ} T_E \approx 369.2 \text{ d,}$$

което се явява синодичният период на планетата. Ако сидеричният период на планетата е T_{sid} , то

$$\frac{1}{T_{\text{syn}}} = \frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_{\text{sid}}}.$$

Тогава $T_{\text{sid}} \approx 92.8 \text{ yr}$. По това разпознаваме, че планетата е Уран.

Получените разлики се дължат главно на следните две причини:

- Поради наклона на еклиптика към небесния екватор, ректасцензията на Слънцето не се променя равномерно с времето. Затова разликата в ректасцензиите не съответства точно на ъгловото отстояние между положенията на Слънцето в двата момента.

- Планетите всъщност се движат по елиптични орбити и по тази причина техните скорости не са постоянни с времето. Същото твърдение важи и за Земята. Поради това е възможно продължителността на синодичния период на дадена планета да варира.

б) При максимална елонгация вътрешната планета се намира на максималното възможно ъглово отстояние от Слънцето за земния наблюдател. В този момент това ъглово отстояние спира да расте и започва да намалява. Това означава, че в точно в тази конфигурация планетата е „неподвижна“ относно Слънцето от гледна точка на земния наблюдател. Следователно, видимата ъглова скорост на вътрешната планета ω на фона на далечните звезди е точно равна на ъгловата скорост, с която Слънцето се премества по еклиптика. Точната стойност е малко по-малко от $1^\circ/d$, което е и орбиталната ъглова скорост на Земята. Това обаче не зависи от радиуса на планетната орбита, т.е. измервайки ω , не можем да определим коя е тази планета. Всъщност, така можем да определим орбиталния период на Земята :).

Никола Каравасилев

Критерии за оценяване (15 т.):

- | | |
|---|-------------|
| – За намиране на ъгловото отстояние между двете положения на планетата | 2 т. |
| – За количествени разсъждения относно двете вътрешни планети | 3 т. |
| – За правилен отговор | 1 т. |
| – За ректасцензията на Слънцето в момента на противостояние | 1 т. |
| – За намиране на синодичния период | 1 т. |
| – За намиране на сидеричния период, вярна стойност и извод коя е планетата | 1 т. |
| – За обяснение на разликите между получените и истинските орбитални периоди | 1 т. |
| | |
| – За доказване, че видимата ъглова скорост на вътрешната планета е равна на слънчевата | 3 т. |
| – За извод, че използвайки само тази ъглова скорост, не можем да разпознаем коя е планетата | 2 т. |

Задача 4. Ден и нощ. През деня на мартенското равноденствие от точка, разположена на екватора, в момента на местно пладне излита самолет, който се движи точно по меридиана в посока север. Когато премине над северния полюс, самолетът продължава своя полет на юг, точно над срещуположния меридиан. По подобен начин самолетът преминава и над южния полюс. Самолетът изпълнява курса си само през деня, като при всеки залез на Слънцето той каца на земната повърхност и остава на същото място до следващия слънчев изгрев. Скоростта на самолета е такава, че той би могъл да направи една непрекъсната пълна обиколка на екватора за 48 часа.

- За следващите 72 часа опишете в максимални подробности как ще протича пътуването на самолета. Намерете времеви интервал от началото на пътешествието на самолета до всеки изгрев или залез на Слънцето, който пътниците ще наблюдават. **[7 т.]**
- Колко време след старта си самолетът ще се завърне в точката, от която е започнал своето пътуване? **[4 т.]**
- Как ще се променят отговорите на предишните два въпроса, ако самолетът излиташе от същата точка на екватора, но точно в момента на изгрева на Слънцето? Обосновайте отговора си. **[4 т.]**

Приемете, че Земята е идеална сфера. Приемете също, че височината над земната повърхност, на която лети самолетът, е пренебрежимо малка в сравнение с радиуса на Земята. Не отчитайте рефракцията в земната атмосфера.

Решение:

а) По време на равноденствие, във всяка точка от земното кълбо Слънцето изгрява точно в 6:00 и залязва точно в 18:00 по местно време. Също, терминаторът в този ден е перпендикулярен на земния екватор. Оттук следва, че за всички точки, които се намират на един и същи меридиан, Слънцето изгрява и залязва едновременно.

Самолетът излита в момента на местно пладне, т.е. в 12:00 по местно слънчево време. Това

означава, че до следващия залез на Слънцето, за меридиана, на който се намира точката на излизане, остават точно шест часа. Самолетът се движи със скорост, с която може да обиколи екватора на Земята за 48 часа. Това означава, че шест часа след като е излетял, той ще е изминал $1/4$ от меридиана, над който лети, и ще се намира над точка с географска ширина 45° . Там той за първи път трябва да кацне и да прекара нощта (още дванадесет часа) на този паралел. След като настъпи изгревът на Слънцето (в 6:00 по местно време), самолетът ще продължи своя полет към северния полюс, до който му остават още 45° по географска ширина. Полюсът ще бъде достигнат след още шест часа, т.е. в 12:00 или в момента на местно плагнe.

Съгласно условието на задачата, самолетът би трябвало продължи своето пътуване по срещуположния меридиан. При преминаването към него, обаче, местното време на самолета ще се промени с 12 часа, т.е. ще стане 0:00 или местна полунощ. Това означава, че в момента, в който самолетът достигне северния полюс, той ще трябва да кацне и да изчака шест часа, докато Слънцето изгрее за меридиана, над който той трябва да продължи да лети. Излизайки в 6:00 по местно време, самолетът ще може да лети 12 часа без прекъсване. След толкова време той ще достигне екватора (тъй като разстоянието от полюс до екватор е $1/4$ от обиколката на екватора) и тогава местното му време ще е вече 18:00. В този момент, ще настъпи залез и самолетът трябва да се приземи и да прекара нощта (още 12 часа) на земята. В 6:00, самолетът ще може да излети на юг отново. Той ще достигне южния полюс след още 12 часа.

На този полюс през март настъпва есенното равноденствие, Слънцето залязва и остава под хоризонта за шест месеца. Това означава, че в рамките на първите 72 часа (от които вече са изминали 66) след излизането си самолетът повече няма да лети и ще прекара следващата половина година на южния полюс.

б) Когато настъпи пролетното равноденствие за южното полукълбо на Земята, Слънцето ще изгрее за южния полюс. Тогава самолетът ще може да продължи своето пътуване, вече по меридиана, на който се намира точката, от която е излетял. Както установихме в предното подусловие, при тази скорост на движение, той има нужда от 12 часа за да прелети разстоянието от полюса до екватора. Това означава, че ако излети в 6:00 по местно време, самолетът ще може да достигне началната точка в 18:00, точно в момента на следващия залез на Слънцето. Ако излети в друг час, той няма да успее да достигне крайната си дестинация преди отново да се наблюдава слънчев залез, и ще трябва да се приземи. Всъщност, това ще удължи пътуването на самолета с 12 часа, колкото е продължителността на нощта по време на равноденствие. Той ще достигне началната си точка 24 часа след като е излетял от южния полюс.

в) Ако самолетът излети по време на изгрева на Слънцето, то местното време за него в този момент е 6:00. Той ще достигне северния полюс след 12 часа, т.е. в 18:00. Тогава би трябвало Слънцето да залезе, но точно в този момент самолетът ще премине на срещуположния меридиан и неговото местно време ще се промени с 12 часа, ставайки отново 6:00. Това означава, че пътниците ще наблюдават отново изгрев на Слънцето. След още 12 часа самолетът ще достигне точка на екватора, която е противоположна на тази, от която е излетял. Тогава, местното време за него ще бъде 18:00, т.е. ще се наблюдава залез и самолетът ще се приземи. На земята той ще прекара 12 часа, колкото продължава нощта. Отново в 6:00 по местно време, самолетът ще продължи пътуването си на юг. След още 12 часа (или 48 часа след като е излетял от началната си точка) той ще достигне южния полюс. Там той ще трябва да прекара следващите почти пълни 6 месеца, поради настъпването на полярна нощ. Аналогично на подусловие б), самолетът ще се върне в изходната точка 12 или 24 часа след като е излетял от южния полюс.

Никола Каравасилев

Критерии за оценяване (15 т.):

- | | |
|--|---------------|
| – За съобразяване колко време след излизане Слънцето ще залезе за самолета | 0.5 т. |
| – За разбиране, че на географска ширина 45° самолетът ще прекара 12 часа | 0.5 т. |
| – За съображение, че самолетът достига северния полюс след още 6 часа | 1 т. |
| – За разбиране, че местното време се променя с 12 часа при преминаване над полюс, и изводи | 2 т. |
| – За правилни разсъждения относно прелитането на разстоянието между двата полюса | 1 т. |

- За съобразяване на факта, че на южния полюс за самолета ще настъпи полярна нощ **2 m.**
- За съобразяване, че самолетът ще прекара почти шест месеца на южния полюс **1 m.**
- За варианта с достигане на екватора за 12 часа при излитане в 6:00 **1 m.**
- За варианта с достигане на екватора за 24 часа при излитане в друг час **2 m.**
- За съображение, че първият залез е на северния полюс **0.5 m.**
- За съображение, че местното време се променя с 12 часа след преминаване над полюса **0.5 m.**
- За разсъждения относно времето между северния и южния полюс **1 m.**
- За разсъждения, че самолетът остава на южния полюс за приблизително шест месеца **1 m.**
- За разсъждения относно времето между южния полюс и точката на излитане **1 m.**

Редакция на задачите: Ева Божурова, Стефан Иванов