

ѲТ. НАБЛИЗО И НАДАЛЕЧ.

Условие.

- А) Изчислете периода на прецесия на земната ос T_p с точност до 100 години. [3 т.]

Две звезди с пренебрежимо собствено движение се наблюдават на голямо ъглово разстояние една от друга. В момента те се намират в едно и също небесно полукълбо. След определен период от време двете звезди ще разменят сегашните си екваториални координати. Също е известно, че едната звезда ще се окаже на небесния екватор след време $t_1 = 9900$ уг, а другата е била на небесния екватор последно преди време $t_2 = 3000$ уг.

- Б) Намерете ъгловото разстояние между звездите η . [5 т.]

Две звезди A и B се наблюдават на малко ъглово отстояние една от друга в направление на пролетната равноденствена точка. Известно е, че от дадена географска ширина A ще кулминира на височината, на която сега кулминира B , след време $t'_1 = 30$ уг. Също така, B е кулминирала на височината, на която сега кулминира A , преди време $t'_2 = 35$ уг.

- В) След колко време Δt двете звезди ще кулминират на една и съща височина?

Краткопериодичните ефекти ($T < 20$ уг) са пренебрежими. [3 т.]

Собственото движение по ректасцензия на A е $\mu_{\alpha A} = +7.52''/\text{уг}$. Разстоянията до звездите са съответно $r_A = 1.71$ рс, $r_B = 6.49$ рс. В някакъв момент звездата A кулминира с $\tau = 2.00$ s по-рано от звездата B .

- Г) Възможно ли е след точно половин година A да кулминира по същото видимо звездно време, по което в момента кулминира B ? [4 т.]

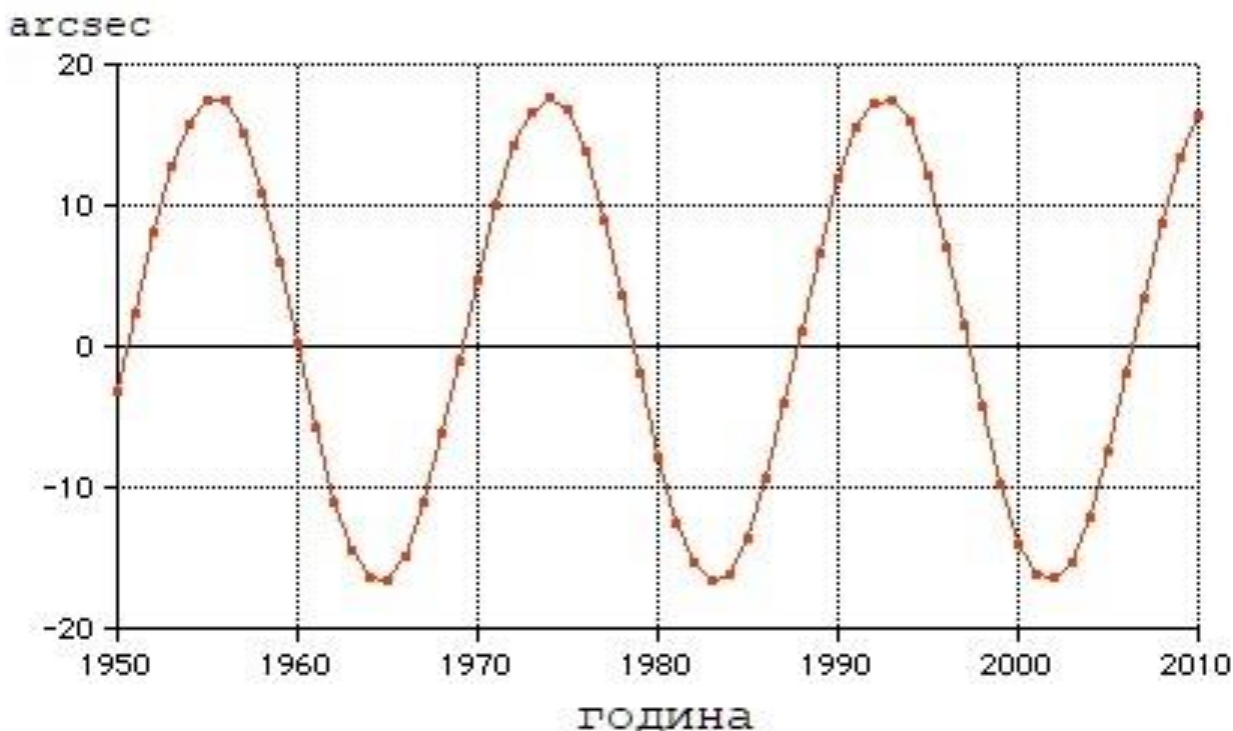
Указание: Видимото звездно време се определя спрямо моментното положение на пролетната равноденствена точка. Екваториалните координати не се влияят от аберацията на светлината.

Средна тропическа година – $T_t = 365.24219$ d

Средна звездна година – $T_s = 365.25636$ d

Наклон на земната ос – $\varepsilon = 23.5^\circ$

Нутация на земната ос по дължина (по направление на прецесията)



Решение.

а) Звездната година T_s е периодът между две преминавания на Слънцето през едно и също положение спрямо звездите. Тропическата година T_t е периодът между две преминавания на Слънцето през пролетната равноденствена точка. Причината T_t да е по-кратка от T_s е, че пролетната равноденствена точка се движи по еклиптиката в направление, противоположно на движението на Слънцето по еклиптиката. Движението на точката е резултат от прецесията на земната ос, и има същата периодичност T_p . Така тропическата година може да се разглежда като синодичен период на T_s и T_p (съответстващи на движения в обратни направления):

$$\frac{1}{T_t} = \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_p},$$

$$T_p = \frac{T_s T_t}{T_s - T_t} = 25800 \text{ yr.}$$

б) Първо е нужно да добием геометрична представа за влиянието на прецесията върху екваториалните координати. На чертежа са показани небесният екватор QQ' и еклиптиката $\epsilon\epsilon'$, заедно с равноденствените точки γ и Ω . Имайки предвид посоката на движение на Слънцето по еклиптиката, може да укажем и посоката на движение на равноденствените точки. При това движение небесният екватор и небесната ос се преместват спрямо фиксираните звезди, и екваториалните координати на тези звезди се променят.

За удобство може да не разглеждаме движението на екватора с ъглова скорост $\omega_p = 2\pi/T_p$ спрямо звездите, а да „задържим“ екватора на едно място на чертежа, наблюдавайки как звездите се движат спрямо него с ъглова скорост ω_p в обратната посока. Траекториите, които звездите описват, са малки кръгове, успоредни на еклиптиката, и по тях може да се изследва промяната на екваториалните координати с времето.

Всеки набор екваториални координати (α, δ) принадлежи на конкретен малък кръг. За да може едната звезда (A) да придобие координатите на другата (B) в кой да е момент, непременно трябва A се намира върху малкия кръг на B . И за да може да има размяна на координатите, двете звезди трябва да отстоят на 180° по този малък кръг.

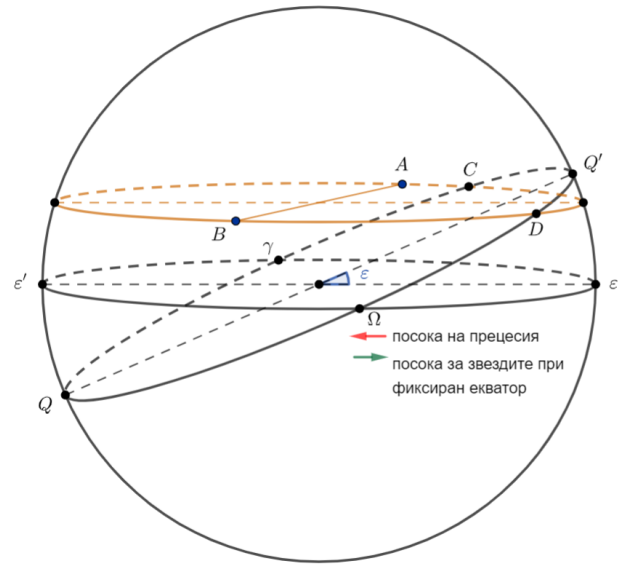
Малкият кръг под въпрос по условие пресича небесния екватор. Това става в две точки, които означаваме с C и D . Знаем, че дъгата $\widehat{ACDB}$ има мярка 180° . От друга страна,

$$\frac{\widehat{AC} + \widehat{DB}}{2\pi} = \frac{t_1 + t_2}{T_p} = \frac{1}{2},$$

тоест $\widehat{AC} + \widehat{DB} = 180^\circ$ и остава $\widehat{CD} = 0^\circ$. Затова малкият кръг на A и B пресича небесния екватор на еклиптична ширина $\beta = \pm\epsilon = \pm 23.5^\circ$. Отчитайки, че двете звезди са на 180° по кръга,

$$\eta = 180^\circ - 2\epsilon = 133^\circ.$$

в) По условие няма да отчитаме нутацията по ширина и полодията (паралаксът така или иначе няма значение, тъй като паралактичната елипса има малка ос 0 около еклиптиката). Височината на кулминация за фиксирана ширина се определя единствено от деклинацията на звездата. Промените в деклинацията се определят от собственото движение по деклинация и прецесията. Нека разликата в деклинациите на A и B е $\Delta\delta \equiv \delta_B - \delta_A$, а собствените движения по деклинация са съответно $\mu_{\delta A}$ и $\mu_{\delta B}$. Условието твърди, че след време t_1' деклинацията на A ще нарасне с $\Delta\delta$ и че преди време t_2' деклинацията на B е била с $\Delta\delta$ по-малка.



Имайки предвид, че A и B са около точката γ , скоростта на промяна в екваториалните координати поради прецесията се разлага на компоненти $+\omega_p \cos \varepsilon$ по ректасцензия и $+\omega_p \sin \varepsilon$ по деклинация. Записваме съответните уравнения:

$$(\omega_p \sin \varepsilon + \mu_{\delta A})t'_1 = \Delta\delta, \quad (\omega_p \sin \varepsilon + \mu_{\delta B})(-t'_2) = -\Delta\delta.$$

Двете звезди ще кулминират на еднаква височина, когато деклинацията им се изравни. Това става след време Δt , за което

$$(\mu_{\delta A} - \mu_{\delta B})\Delta t = \Delta\delta.$$

От заместване на първите две уравнения в третото намираме

$$\left(\frac{\Delta\delta}{t'_1} - \frac{\Delta\delta}{t'_2}\right)\Delta t = \Delta\delta,$$

което е формула за синодичен период $\left(\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{t'_1} - \frac{1}{t'_2}\right)$. Получаваме

$$\Delta t = \frac{t'_1 t'_2}{t'_2 - t'_1} = \mathbf{210 \text{ yr.}}$$

г) Разлика в кулминациите от 2 секунди съответства на разлика в моментните ректасцензии на звездите от

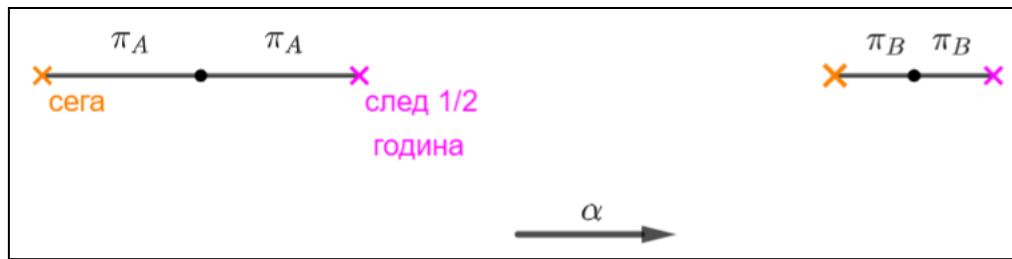
$$\Delta\alpha = 2.0055^s = 30.08'',$$

където сме отчели разликата между звездно и слънчево денонощие.

Ще проверим дали подходящо наслагване на всички налични ефекти за време $T_E/2$ може да промени ректасцензията на A с $\Delta\alpha$. На първо място имаме промяна в ректасцензията поради прецесия, с големина $\frac{\omega_p T_E}{2} \cos \varepsilon = 23.03''$. Имаме и промяна от собственото движение на A , с големина $\frac{\mu_{\alpha A} T_E}{2} = 3.76''$.

Още един ефект, който ще отчетем, е нутацията по дължина. Във връзка с нея в рамките на една година може да има значителна промяна в положението на пролетната равноденствена точка и съответно в измерената ректасцензия. За да намерим максималната възможна промяна в рамките на половин година, измерваме по графиката на нутацията максималния наклон, получавайки стойност $\nu = 5.40''/\text{yr}$. За половин година може да „спечелим“ ректасцензия до $\frac{\nu T_E}{2} = 2.70''$.

Паралаксите на звездите също допринасят към промяната в ректасцензията. На схемата са показани оптималните начални положения по паралактичните елипси, така че за 6 месеца да се „спечели“ най-много ректасцензия. Отстоянието между звездите тогава ще намалява с $\Delta\pi = 2(\pi_A - \pi_B) = 0.86''$.



На този етап общо се събира промяна

$$(\omega_p \cos \varepsilon + \mu_{\alpha A} + \nu) \frac{T_E}{2} + 2(\pi_A - \pi_B) = 30.35'' > \Delta\alpha.$$

Отговорът е да; няма нужда да се отчитат по-малки влияния като компонентата на полюдията по дължина ($< 0.5''$).

Коментар.

1. Проверено е, че за точност 100 години в **а)** са необходими справочни данни за T_s и T_t с дадената тук точност, или по-висока.
 2. Числата в последната подточка са избрани така, че правилният отговор да не може да се получи без отчитане на нутация, дори и при изпускане на множителя $\cos \varepsilon$. Стойността на ω_p може да бъде избрана различно, напр. спрямо 25800 уг или 26000 уг, но това води до твърде малки отклонения.
 3. Точкуването не е пропорционално на усилието за решаване – стремял съм се първите няколко точки да се печелят лесно, а последните трудно.
-

Критерии за оценяване (общо 15т.):

а) – За разбиране на смисъла на звездната и тропическата година – **1т.**

– За намиране на периода на прецесия – **2т.**

б) – За правилен геометричен модел на прецесията – **1т.**

– За разпознаване, че звездите отстоят на 180° по малък кръг – **1т.**

– За намиране на еклиптичната ширина – **2т. (1т. без обосновка)**

– За верен отговор – **1т.**

в) – За вярно записани уравнения на движение – **2т. (1т. без прецесия)**

– За верен отговор – **1т.**

г) – За правилно отчетена прецесия – **1т.**

– За правилно отчетена нутация – **1т.**

– За правилно отчетен паралакс – **1т.**

– За правилен отговор – **1т.**