

ВТ. КОСМИЧЕСКА ЗАСАДА.

Условие. Космическа станция с маса $m = 1000 \text{ kg}$ се движи по кръгова орбита в равнината на еклиптиката. Посоката на обикаляне около Слънцето съвпада с тази на планетите. В даден момент за станцията Марс и Церера са едновременно в максимална източна елонгация, а Слънцето е в съзвездие Скорпион. Тогава ъгълът на елонгация на Марс, гледано от Церера, е $\alpha = 25.0^\circ$.

- А) Намерете радиуса на орбитата на станцията. В кое съзвездие е Марс, гледано от станцията? [3 т.]

В този момент, за много кратко време спрямо орбиталния период, станцията попада под обстрела на страховит звезден унищожител, пилотиран от върховния лидер на Първия ред, Виктор Герасимов. Снарядите на унищожителя имат малка маса $m_A = 0.2 \text{ kg}$, пренебрежима спрямо масата на станцията, но имат огромна скорост $v_A = c/15$. Снарядите се движат в равнината на еклиптиката, като при обстрела те остават в корпуса на станцията.

Да предположим, че станцията се удря само от един снаряд. В резултат станцията преминава на нова елиптична орбита, като първоначално движението ѝ е в посока към определена звезда. След време станцията достига афелий, при което се наблюдава окултация на същата звезда от Слънцето.

- Б) От кое съзвездие е звездата? [5 т.]

Сега да предположим, че в периода на обстрел в станцията се врязва повече от един снаряд. Известно е, че по новата си орбита станцията пресича орбитата на Юпитер със скорост $v_J = 22 \text{ km/s}$.

- В) При тези условия, какъв е минималният брой снаряди в корпуса на станцията? [4 т.]
- Г) Ако също се знае, че орбитата на Юпитер се пресича под ъгъл $\theta = 60^\circ$, какъв е минималният възможен брой снаряди в корпуса на станцията? [3 т.]

Маса на Слънцето – $M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2}$

Радиус на орбитата на Марс – $r_M = 1.52 \text{ AU}$

Радиус на орбитата на Церера – $r_C = 2.77 \text{ AU}$

Радиус на орбитата на Юпитер – $r_J = 5.20 \text{ AU}$

Решение.

а) На схемата са показани Слънцето S , Марс M , Церера C и станцията A при геометрията от условието. Движението около Слънцето става обратно на часовниковата стрелка.

Има вариант задачата да се реши с многократно прилагане на синусова теорема и косинусова теорема – намираме последователно $\angle SMC$, $\angle AMC$, $\angle CAM$, MC , AM , AS , $\angle MAS$. Това обаче е ненужно и отговорът може да бъде получен без радиуса на орбитата на Церера. Забелязваме, че от точки C и M отсечката AS се вижда под един и същ ъгъл, тоест четириъгълникът $CASM$ е вписан. Съответно SM се вижда под един и същ ъгъл от C и A , тоест на чертежа $\delta = \alpha$. Затова радиусът на орбитата на станцията е

$$r = \frac{r_M}{\sin \delta} = 3.60 \text{ AU.}$$

Марс е в направлението, в което ще се наблюдава Слънцето след завъртане на станцията с ъгъл δ . Когато Земята се завърта с такъв ъгъл по орбитата си, това съответства на $\left(\frac{\delta}{360^\circ}\right) T_E = 25.4 \text{ d}$. От Земята – Скорпион 23.11-29.11, Змиеносец 30.11-17.12, Стрелец 18.12-18.01. Съответно в нашия случай Марс е в **Стрелец**¹.

б) Скоростта по началната орбита е

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}} = 15.7 \text{ km/s.}$$

Точката на обстрел A е пресечна между старата и новата орбита на станцията. Съгласно условието векторът на скоростта след обстрел е успореден на апсидната линия на новата елиптична орбита. Това е възможно единствено когато A се явява пресечна точка на елипсата с малката ѝ полуос. Геометрично свойство на елипсата е, че такава точка се намира на разстояние a от фокусите, където a е голямата полуос на елипсата. Затова голямата полуос на новата елиптична орбита е $a = r = 3.60 \text{ AU}$. Скоростта точно след обстрел по новата орбита е

$$v = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}} = v_0,$$

тоест се променя само посоката, а не и големината.

Ударът със снаряда е абсолютно нееластичен, но масата му е пренебрежимо малка. Може да приемем, че след удара векторът на импулса на станцията също не променя големината си. Но този вектор ще е сбор от съответните вектори за снаряда и станцията, с големина съответно

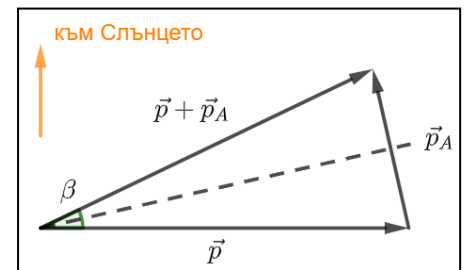
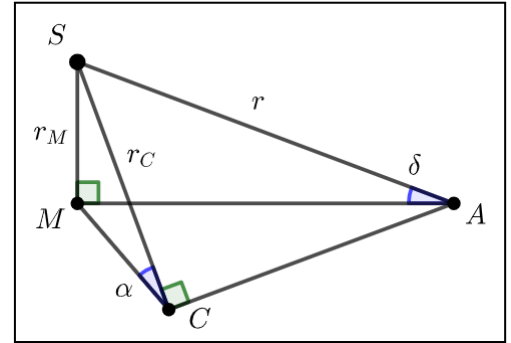
$$p_0 = mv_0 = 1.57 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s},$$

$$p_A = m_A v_A = 4.00 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

Промяната в импулса при удара става по показания начин.

За фиксирани големина p и p_A са възможни два начина за удар, запазващ големината на импулса на станцията (пресечни точки на две окръжности), но само този на диаграмата отговаря напълно на условието. Ако векторът на импулса на станцията сключва остър ъгъл с радиус-вектора, станцията първо ще достигне перихелий по новата си орбита, и чак след това афелий (от чертеж). Обратно, при тъп ъгъл се достига първо афелий и после перихелий. Но и при двата варианта именно втората по ред екстремална точка е тази, при която ще има окултация. Ъгълът на отклонение на станцията е

$$\beta = 2 \arcsin \left(\frac{p_A}{2p_0} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{m_A v_A}{2m} \sqrt{\frac{r}{GM_\odot}} \right) = 14.6^\circ.$$



Направлението към звездата съответства на $\left(\frac{90^\circ - \beta}{360^\circ}\right) T_E = 76.5 \text{ d}$ назад от Скорпион, тоест звездата е от **Лъв**.

в) Записваме закона за запазване на енергията, за да намерим необходимата скорост v след обстрел:

$$\frac{v_J^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r_J} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r}, \quad v = 25.2 \text{ km/s}.$$

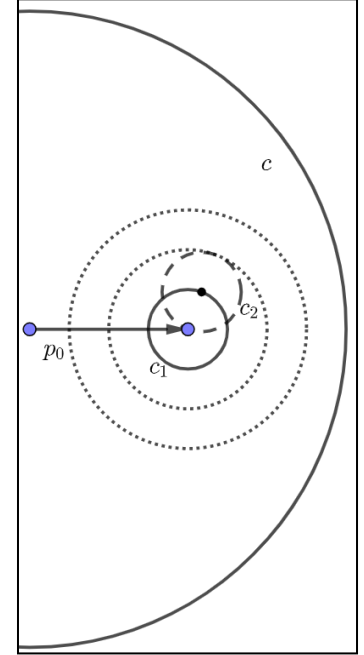
Това съответства на импулс с големина $p_1 = mv = 2.52 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s}$. За да бъде получен такъв импулс, е нужна промяна в началния вектор на импулса чрез удари. Трябва върхът на вектора да попадне върху окръжност c с радиус p_1 . Ще разгледаме какви импулси на станцията са позволени след даден брой удари. Ударите внасят промени с еднаква големина p_A . След първия удар достъпните състояния лежат върху окръжността c_1 , имаща радиус p_A . При втория удар на всяка от „стартовите“ точки върху c_1 може да се припише аналогична c_2 . Достъпните състояния са обединението на всички такива c_2 , което е кръг с радиус $2p_A$ около върха на началния вектор на импулса. Аналогично, след N удара достъпните състояния лежат в кръг с радиус Np_A .

Сега е видно, че импулс с големина p_1 може да бъде получен, когато въпросният кръг за първи път застъпи окръжността c . Това става за най-малкото N , при което

$$p_0 + Np_A \geq p_1.$$

Така **$N = 3$** .

Но на този етап не е очевидно, че орбитата на Юпитер наистина ще се пресича от станцията. Законът за запазване на енергията не е единственото условие върху формата на орбитите и може да се окаже, че сме го записали за точка, която по начало няма как да принадлежи на орбитата на станцията. За проверката трябва да забележим, че $v > \sqrt{2}v_0$, тоест орбитата е хиперболична. А незатворена орбита със сигурност пресича орбитата на Юпитер.



г) Съображенията от предишната подточка важат и тук – отново е нужно върхът на вектора на импулса на станцията след обстрел да лежи върху c . Но в новата ситуация има и допълнително условие поради необходимостта да се запази моментът на импулса, тоест произведението на тангенциалната компонента на импулса p_τ и разстоянието до Слънцето:

$$p_{\tau J} r_J = p_{\tau 1} r \Rightarrow p_J r_J \cos \theta = p_{\tau 1} r$$

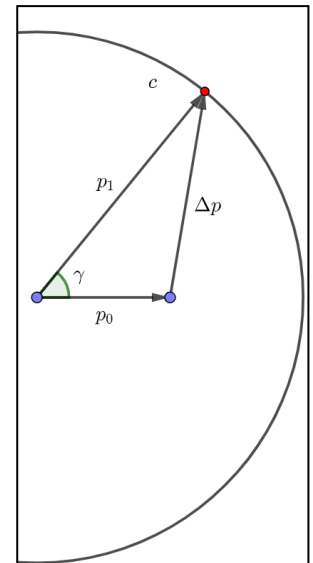
Нужен ще ни е ъгълът на отклонение γ на $\vec{p}_1$ от направлението на $\vec{p}_0$. За него имаме

$$\cos \gamma = \frac{p_{\tau 1}}{p_1} = \frac{p_J r_J}{p_1 r} \cos \theta = \frac{v_J r_J}{vr} \cos \theta, \quad \cos \gamma = 0.63.$$

Разстоянието от върха на вектора $\vec{p}_1$ до върха на $\vec{p}_0$ е

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \gamma} = 1.96 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

Пресмятаме $\Delta p/p_A = 4.89$. Затова **$N = 5$** .



¹ Отговор „Змиеносец“ да се приема само при коментар, че в такъв случай Марс е точно на границата със Стрелец.

Критерии за оценяване (общо 15т.):

а) – За правилно намерен радиус на орбитата r – 2т.

– За съзвездieto на Марс – 1т.

б) – За доказателство, че големината на скоростта се запазва – 2т.

– За намиране на големината на ъгъла на отклонение – 2т.

– За съзвездieto на звездата (вкл. проверка за посока на β) – 1т.

в) – За намиране на скоростта след обстрел v – 1т.

– За намиране на N чрез геометрична аргументация – 2т. (0т. без аргументация)

– За проверка дали орбитата на Юпитер се пресича – 1т.

г) – За закон на запазване на момента на импулса – 1т.

– За правилна стойност на N – 2т.
