

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
КОМИСИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXIV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

IV кръг, 22 юли 2021 г., Варна, теоретичен тур

Старша възраст – решения

Задача 1. Окултации от Луната. По цялата небесна сфера с невъоръжено око се виждат около $N_0 = 6000$ звезди. При някои от тях се наблюдават покрития (окултации) от Луната.

- А) Колко видими с просто око звезди могат да бъдат покрити от Луната за наблюдатели някъде по Земята:
 - в момента;
 - в рамките на следващия месец;
 - в рамките на следващите 100 години;
 - в рамките на следващите 26000 години? [7 т.]

Считайте звездите за разпределени равномерно по небесната сфера.

Астрономите Златомир Желев и Константин Кръстев участват в сливенско-бургаска наблюдателна експедиция в северното полукуълбо. Остават три дни до пълнолуние. По периферията на лунния диск астрономите забелязват две звезди, отстоящи една от друга на ъглово разстояние $\beta = 15.5'$. Тези звезди са на еклиптиката, като през цялата нощ височината на едната звезда над хоризонта е равна на височината на другата звезда над хоризонта. Започва окултация на една от звездите от Луната.

- Б) През кой месец и на каква географска ширина се правят наблюденията? [4 т.]
- В) Каква ще е продължителността на окултацията на тази звезда? [4 т.]

Лунната орбита да се приеме за кръгова.

Указание: Ъгловата площ на сфера е 4π стерадиана (sr), като $1 \text{ sr} \Leftrightarrow 1 \text{ rad}^2$.

Справочни данни:

Период на смяна на фазите на Луната – $T_S = 29.53 \text{ d}$

Орбитален период на Луната – $T_L = 27.32 \text{ d}$

Наклон на лунната орбита спрямо еклиптиката – $i = 5.15^\circ$

Радиус на лунната орбита – $r_L = 384400 \text{ km}$

Радиус на Луната – $R_L = 1738 \text{ km}$

Радиус на Земята – $R_E = 6371 \text{ km}$

Решение.

а) 1. Денонощният хоризонтален паралакс на Луната е $p = \frac{R_E}{r_L} = 0.95^\circ = 57'$. Поради паралакса, центърът на лунния диск, гледано от Земята спрямо далечните звезди, може да лежи в рамките на кръг с радиус p . Пространството, което лунният диск може да закрие по небесната сфера, тогава е кръг с радиус $p + \rho_L$, където $\rho_L = \frac{R_L}{r_L} = 15.5'$ е ъгловият радиус на Луната. Съответстващата площ е

$$S = \pi(p + \rho_L)^2 = \pi \left(\frac{R_E + R_L}{r_L} \right)^2.$$

Ъгловата площ на цялата небесна сфера е $S_0 = 4\pi \text{ rad}^2 = 4\pi \left(\frac{180}{\pi} \right)^2 \text{ deg}^2$. Броят звезди е

$$N = \frac{S}{S_0} N_0 = \left(\frac{R_L + R_E}{r_L} \right)^2 \frac{N_0}{4} = \mathbf{0.67}.$$

2. За един месец Луната прави пълен кръг по небесната сфера, тоест достъпните за окултация звезди лежат в „лента“ с ширина $2(p + \rho_L)$ около големия кръг на лунната орбита. Това съответства на площ $S = 2\pi \cdot 2(p + \rho_L)$. Броят звезди е

$$N = (p + \rho_L)N_0 = \left(\frac{R_E + R_L}{r_L}\right)N_0 = 127.$$

3. Лунната орбита прецесира спрямо еклиптиката с период 18.6 уг $\ll$ 100 уг. Поради това за окултация са достъпни звезди в лента около еклиптиката с ширина $2(i + p + \rho_L)$. Броят звезди е

$$N = (i + p + \rho_L)N_0 = 666.$$

4. В този случай числото насочва към прецесията на оста на Земята. Тя обаче не оказва никакво влияние върху отговора. В резултат на прецесията се променят екваториалните координати на звездите, но спрямо еклиптиката звездите са фиксирани. Така че

$$N = (i + p + \rho_L)N_0 = 666.$$

Крайните числени резултати са дадени с твърде висока точност за по-лесна проверка.

б) Ще покажем, че за да се изпълнява търсеното, трябва деклинацията на звездите да е еднаква и да се намираме на географски полюс. Двете звезди лежат върху голям кръг¹ по небесната сфера, който участва в денонощното движение (в случая еклиптиката, но това не е от значение). Да вземем момента, в който възлите на големия кръг спрямо небесния екватор съвпадат с точките изток и запад. Тогава двете звезди, за да имат еднаква височина, трябва също да отстоят симетрично на небесния меридиан по азимут.

Да разгледаме денонощния паралел на една от звездите. За всяка точка от паралела, симетричната ѝ точка по азимут и височина спрямо небесния меридиан принадлежи на същия паралел. Виждаме, че в избрания момент (а съответно и винаги) двете звезди трябва да лежат на един денонощен паралел.

Ако този денонощен паралел е наклонен спрямо хоризонта, звездите няма как да имат еднаква височина през цялото денонощие. Съответно трябва небесният екватор да съвпада с хоризонта, тоест да се намираме на полюс.

Тъй като сме в северното полукукло, географската ширина е $\varphi = +90^\circ$.

Двете звезди са на еклиптиката и на един денонощен паралел, като ъгловото отстояние между тях е много малко. Това е възможно, само когато те се намират близо до точката на лятно слънцестоене. Луната също е близо до тази точка. Да остават три дни по пълнолуние означава, че Слънцето отстои на ъгъл

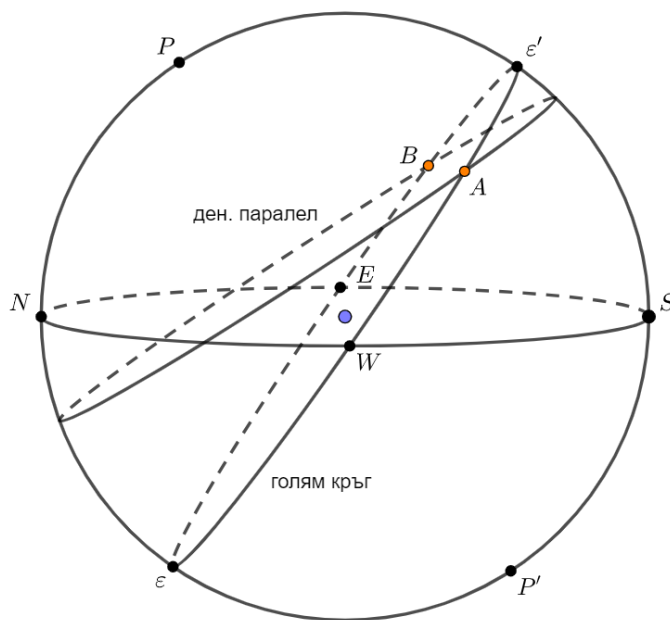
$$\frac{3 \text{ d}}{T_s} \cdot 360^\circ = 36.6^\circ$$

от противоположната на Луната точка (от чертеж на лунната орбита). Тоест Слънцето е отклонено с

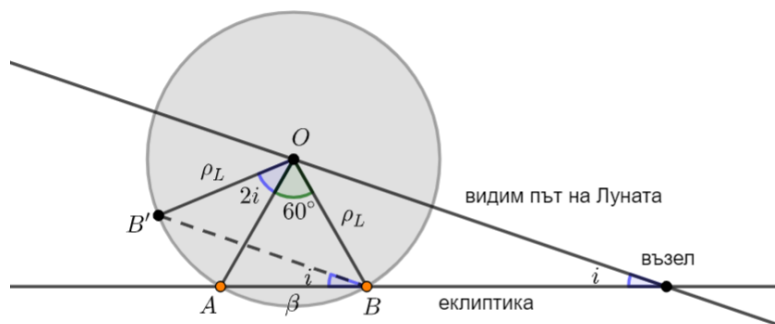
$$\frac{36.6^\circ}{360^\circ} \cdot 365.25 \text{ d} = 37.1 \text{ d}$$

път „напред“ по еклиптиката от точката на зимно слънцестоене. Наблюденията се правят през **януари** (и видимо на наблюдателите им е много студено).

в) Прилагаме чертеж на Луната по видимия ѝ път, както и на двете звезди. На чертежа Луната може да е от двете страни на звездите A, B, възелът може да е от двете страни на звездите и може да е



Видимият път на Луната не съвпада с лунната орбита поради паралактичното отместване. Обаче тъй като наблюденията се правят от полюс, за характерната продължителност на окултация (~ 1 h) това паралактично отместване не се променя значително по големина и посока (важно, тъй като ефектът е от сравним порядък с ъгловите размери в задачата). Ъгълът между видимия път на Луната и еклиптиката тогава може да се вземе за $i = 5.15^\circ$.


$$\Delta t = \frac{\rho_L \sin(30^\circ \pm i)}{\pi} T_L = \mathbf{33 \text{ min}, 24 \text{ min.}}$$

Стефан Иванов

¹ Приемаме, че този кръг не е меридиан. Ако беше, можем да достигнем случая $\varphi = 0^\circ$ и $\delta_A = -\delta_B$, в който също височините остават същите с времето.

– За коментар за паралакса – *1m.*

Задача 2. Звездата на смъртта и GRB. Във филма „Междувездни войни“ (1977 г.) фантастична бойна станция, наречена „Звездата на смъртта“, унищожава планетата Олдерон, като насочва към нея мощен зелен лазерен лъч.

- А) Приемете, че масата на Олдерон е 0.9 земни маси, а радиусът ѝ е 6250 km. За да се унищожи Олдерон, лазерното оръдие на „Звездата на смъртта“ стреля в продължение на около 0.3 s. Оценете по порядък броя фотони в секунда, които лазерното оръдие изстрелва. Дължината на вълната на монохроматичната зелена светлина е 550 nm. [4 т.]

Разбира се, построяването на толкова мощно оръжие е практически невъзможно. Но има явления в космоса, които са със сходна мощност и насоченост на потока. Такива са гама-избухванията (Gamma Ray Burst – GRB). При тях се наблюдава кратък и много силен проблясък в най-високоенергетичните електромагнитни вълни – гама-лъчите, което е последвано от по-дълго „послесветене“ в целия останал електромагнитен спектър, включително в оптичния диапазон. Източникът изстрелва материя по конусовидни струи, наречени джетове. Там се образуват гама-лъчите, а при взаимодействието на част от гама-лъчите с междувездния газ се поражда мощното послесветене.

- Б) Гама-избухванията биват два основни вида: кратки (около 30% от всички) и дълги (около 70%). Кратките GRB са с продължителност под 2 s (средна продължителност 0.2 s), а дългите са с продължителност над 2 s (средна продължителност 30 s). Кратките GRB се пораждат при сливане на двойка неутронни звезди, докато дългите се пораждат при свръхмощна свръхнова с колапс на ядрото на масивна звезда. Обяснете количествено (с пресмятания) защо кратките GRB трябва да са породени от сливания на неутронни звезди, а не от масивна звезда. [3 т.]
- В) Гама-избухването GRB 030329 е едно от по-близките засечени GRB – наблюдавано е в галактика с червено отместване $z = 0.169$. Около 1 час след избухването оптичното послесветене е със звездна величина $V = 12.6$. От какво разстояние GRB 030329 е било с видим блясък колкото Сириус, гледан от Земята? Сравнете това разстояние с разстоянията до близките галактики. [4 т.]
- Г) Представете си, че има планета-двойник на Олдерон на 1 AU от GRB 030329, в конуса на избухването. Оценете за какво време планетата ще бъде унищожена от избухването. Ъгълът на върха на конуса на GRB 030329 е 2° . Известно е, че значителна част от енергията на GRB се отделя в послесветене. [4 т.]

Справочни данни:

Маса на Слънцето – $M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Маса на Земята – $M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Абсолютна визуална звездна величина на Слънцето – $M_{V\text{sol}} = 4.84 \text{ mag}$

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Константа на Планк – $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$

Решение.

а) От съображения за размерности гравитационната потенциална енергия на сферично тяло с маса M и радиус R трябва да има вида

$$E_P = -k \frac{GM^2}{R},$$

тъй като всеки слой на тялото получава гравитационна потенциална енергия от вътрешните слоеве. За тяло с константна плътност $k = 3/5$, но тъй като задачата е за оценка на порядък, всяка стойност на k в интервала 0.1 – 1.0 дава приемлив резултат.

Ако времето за унищожаване на връзките е $t = 0.3 \text{ s}$, необходимата мощност за разрушаване до потенциална енергия 0 е

$$P = -\frac{E_p}{t} = \frac{kGM^2}{Rt}.$$

Енергията на фотон при дължина на вълната λ е

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}.$$

Тогава броят фотони в секунда от лазерното оръдие на Звездата на смъртта ще бъде:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{kGM^2\lambda}{hcRt} = 1.7 \times 10^{51} \text{ s}^{-1}.$$

Или, на порядък, 10^{51} фотона в секунда.

б) Кратките GRB са със средна продължителност $t_s = 0.2 \text{ s}$. Следователно зоната, от която идват гама-лъчите, е изключително малка на размер. Тя не може да бъде по-голяма от $ct_s = 60000 \text{ km}$, тъй като за зона с по-голям размер сигналът ще пътува през самата зона по-дълго от 0.2 секунди.

в) От червеното отместване пресмятаме скоростта на отдалечаване на галактиката-домакин на избухването, а със закона на Хъбъл получаваме разстоянието до нея:

$$z = v_R c, \\ v_R = Hr.$$

Използвайки $H = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, получаваме разстояние $r = 724 \text{ Mpc}$. Можем да намерим абсолютната звездна величина на послесветенето по формулата

$$V - M_V = 5 \lg(r [\text{pc}]) - 5.$$

Получаваме $M_V = -26.70$ – значително по-мощно от последвалото лъчение от свръхновата. По същата формула намираме разстоянието, на което звездната величина на послесветенето е била равна на тази на Сириус, гледан от Земята ($V_{\text{Sirius}} = -1.5$). Получаваме $r_{-1.5} = 1.1 \text{ Mpc}$ – малко повече от разстоянието до галактиките Андромеда и М33.

г) По закона на Погсън оценяваме светимостта на послесветенето.

$$\frac{L_V}{L_{\text{sol}}} = 10^{-0.4(M_V - M_{V\text{sol}})} \approx 4 \times 10^{12}.$$

Това е груба и занижена оценка, тъй като послесветенето е налично във всички диапазони, от рентген до радио, докато Слънцето е относително мощно във V филтър.

Значителна част от енергията в (единия) конус на избухването се отделя в послесветене. В първо приближение нека приемем, че е 50%. С тези две съображения можем да направим консервативната оценка, че мощността на заредените частици в конуса на избухването, от които се формират гама-лъчите, е поне $10^{14} L_{\text{sol}}$.

При ъгъл на колимация 2° сечението на конуса на разстояние 1 AU от източника е кръг с радиус $S = \pi \left(2 \frac{\pi}{180}\right)^2 \text{ AU}^2$, а сечението на Олдерон би било πR^2 . Мощността, която Олдерон ще поема на разстояние 1 ly от източника ще бъде

$$L \approx \frac{\pi R^2}{S} \times 10^{14} L_{\text{sol}}.$$

Времето за разрушаване можем да оценим със съображенията от подусловие **а)**:

$$L = -\frac{E_p}{t} = \frac{kGM^2}{Rt}, \\ t = \frac{kGM^2}{RL} = \frac{kGM^2 S}{\pi R^3 L_{\text{sol}}} 10^{-14} \approx 1 \text{ ms}.$$

За време от порядъка на 1 милисекунда планетата няма да може да произлъчи значително количество енергия и ще бъде разрушена.

Александър Куртенков

Задача 3. Космическа засада. Космическа станция с маса $m = 1000 \text{ kg}$ се движи около Слънцето по кръгова орбита в равнината на еклиптиката, в същата посока, в която се движат и планетите. В даден момент дежурният астроном на станцията Гео Калфов наблюдава Марс и Церера, които са едновременно в максимална източна елонгация, а Слънцето е в съзвездието Скорпион. Гео веднага и без затруднение изчислява, че в този момент ъгълът на елонгация на Марс от Слънцето, който се наблюдава от Церера, е $\alpha = 25.0^\circ$.

- А) Намерете радиуса на орбитата на станцията. В кое съзвездие дежурният астроном Гео ще вижда Марс от борда на станцията? [3 т.]

В същия момент, за много кратък интервал от време в сравнение с орбиталния период на станцията, тя попада под обстрела на страховит звезден унищожител, пилотиран от върховния лидер на Първия ред, Виктор Герасимов. Снарядите на унищожителя са с малка маса $m_A = 0.2 \text{ kg}$, пренебрежима спрямо масата на станцията, но с огромна скорост $v_A = c/15$, където c е скоростта на светлината. Те се движат в равнината на еклиптиката. При обстрела те не могат да проникнат свръхздравия материал, изобретен от ракетния конструктор Маргулан Исмолдаев, и остават в корпуса на станцията, а дежурният астроном остава невредим.

Да предположим, че станцията се удрия само от един снаряд. В резултат тя преминава на нова елиптична орбита, като първоначално движението ѝ е в посока към определена звезда. След време станцията достига афелий, при което от нея се наблюдава окултация на същата звезда от Слънцето.

- Б) От кое съзвездие е звездата? [5 т.]

Сега да предположим, че в периода на обстрел в станцията се врязва повече от един снаряд. Според информацията, съобщена от Гео, в този случай станцията пресича орбитата на Юпитер със скорост $v_J = 22 \text{ km/s}$.

- В) Тогава какъв трябва да е минималният брой снаряди в корпуса на станцията? [4 т.]
- Г) Ако освен информацията за скоростта е известно също, че при своето движение станцията пресича орбитата на Юпитер под ъгъл $\theta = 60^\circ$, какъв е минималният възможен брой снаряди в корпуса на станцията? [3 т.]

Справочни данни:

Маса на Слънцето – $M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Радиус на орбитата на Марс – $r_M = 1.52 \text{ AU}$

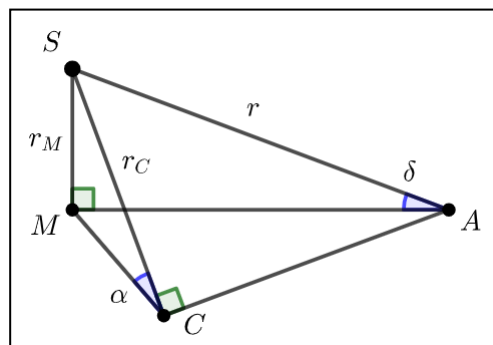
Радиус на орбитата на Церера – $r_C = 2.77 \text{ AU}$

Радиус на орбитата на Юпитер – $r_J = 5.20 \text{ AU}$

Решение.

а) На схемата са показани Слънцето S , Марс M , Церера C и станцията A при геометрията от условието. Движението около Слънцето става обратно на часовниковата стрелка.

Има вариант задачата да се реши с многократно прилагане на синусова теорема и косинусова теорема – намираме последователно $\angle SMC$, $\angle AMC$, $\angle CAM$, MC , AM , AS , $\angle MAS$. Това обаче е ненужно и отговорът може да бъде получен без радиуса на орбитата на Церера. Забелязваме, че от точки C и M отсечката AS се вижда под един и същ ъгъл, тоест четириъгълникът $CASM$ е вписан. Съответно SM се вижда под един и същ ъгъл от C и A , тоест на чертежа $\delta = \alpha$. Затова радиусът на орбитата на станцията е



$$r = \frac{r_M}{\sin \delta} = 3.60 \text{ AU}.$$

Марс е в направлението, в което ще се наблюдава Слънцето след завъртане на станцията с ъгъл δ . Когато Земята се завърта с такъв ъгъл по орбитата си, това съответства на $\left(\frac{\delta}{360^\circ}\right) T_E = 25.4 \text{ d}$. От Земята – Скорпион 23.11-29.11, Змиеносец 30.11-17.12, Стрелец 18.12-18.01. Съответно в нашия случай Марс е в **Стрелец**¹.

б) Скоростта по началната орбита е

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}} = 15.7 \text{ km/s.}$$

Точката на обстрел A е пресечна между старата и новата орбита на станцията. Съгласно условието векторът на скоростта след обстрел е успореден на апсидната линия на новата елиптична орбита. Това е възможно единствено когато A се явява пресечна точка на елипсата с малката ѝ полуос. Геометрично свойство на елипсата е, че такава точка се намира на разстояние a от фокусите, където a е голямата полуос на елипсата. Затова голямата полуос на новата елиптична орбита е $a = r = 3.60 \text{ AU}$. Скоростта точно след обстрел по новата орбита е

$$v = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}} = v_0,$$

тоест се променя само посоката, а не и големината.

Ударът със снаряда е абсолютно нееластичен, но масата му е пренебрежимо малка. Може да приемем, че след удара векторът на импулса на станцията също не променя големината си. Но този вектор ще е сбор от съответните вектори за снаряда и станцията, с големина съответно

$$p_0 = mv_0 = 1.57 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s},$$

$$p_A = m_A v_A = 4.00 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

Промяната в импулса при удара става по показания начин.

За фиксирани големина p и p_A са възможни два начина за удар, запазващ големината на импулса на станцията (пресечни точки на две окръжности), но само този на диаграмата отговаря напълно на условието. Ако векторът на импулса на станцията сключва остър ъгъл с радиус-вектора, станцията първо ще достигне перихелий по новата си орбита, и чак след това афелий (от чертеж). Обратно, при тъп ъгъл се достига първо афелий и после перихелий. Но и при двата варианта именно втората по ред екстремална точка е тази, при която ще има окултация. Ъгълът на отклонение на станцията е

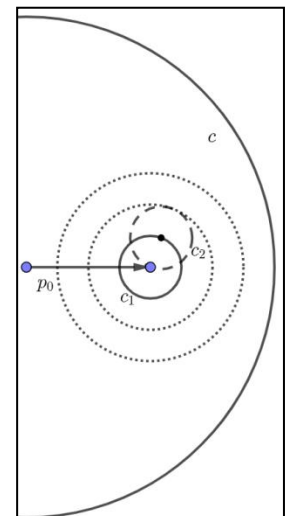
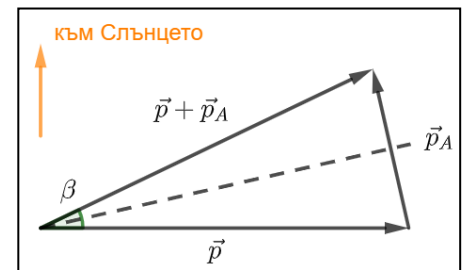
$$\beta = 2 \arcsin\left(\frac{p_A}{2p_0}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{m_A v_A}{2m} \sqrt{\frac{r}{GM_\odot}}\right) = 14.6^\circ.$$

Направлението към звездата съответства на $\left(\frac{90^\circ - \beta}{360^\circ}\right) T_E = 76.5 \text{ d}$ назад от Скорпион, тоест звездата е от **Лъв**.

в) Записваме закона за запазване на енергията, за да намерим необходимата скорост v след обстрел:

$$\frac{v_f^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r_f} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r}, \quad v = 25.2 \text{ km/s.}$$

Това съответства на импулс с големина $p_1 = mv = 2.52 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s}$. За да бъде получен такъв импулс, е нужна промяна в началния вектор на импулса чрез удари. Трябва върхът на вектора да попадне върху окръжност c с радиус p_1 . Ще разгледаме какви импулси на станцията са позволени след даден брой удари. Ударите внасят промени с еднаква големина p_A . След първия удар достъпните



състояния лежат върху окръжността c_1 , имаща радиус p_A . При втория удар на всяка от „стартовите“ точки върху c_1 може да се припише аналогична c_2 . Достъпните състояния са обединението на всички такива c_2 , което е кръг с радиус $2p_A$ около върха на началния вектор на импулса. Аналогично, след N удара достъпните състояния лежат в кръг с радиус Np_A .

Сега е видно, че импулс с големина p_1 може да бъде получен, когато въпросният кръг за първи път застъпи окръжността c . Това става за най-малкото N , при което

$$p_0 + Np_A \geq p_1.$$

$$\text{Така } N = 3.$$

Но на този етап не е очевидно, че орбитата на Юпитер наистина ще се пресича от станцията. Законът за запазване на енергията не е единственото условие върху формата на орбитите и може да се окаже, че сме го записали за точка, която по начало няма как да принадлежи на орбитата на станцията. За проверката трябва да забележим, че $v > \sqrt{2}v_0$, тоест орбитата е хиперболична. А незатворена орбита със сигурност пресича орбитата на Юпитер.

г) Съображенията от предишната подточка важат и тук – отново е нужно върхът на вектора на импулса на станцията след обстрел да лежи върху c . Но в новата ситуация има и допълнително условие поради необходимостта да се запази моментът на импулса, тоест произведението на тангенциалната компонента на импулса p_τ и разстоянието до Слънцето:

$$p_{\tau J} r_J = p_{\tau 1} r \Rightarrow p_J r_J \cos \theta = p_{\tau 1} r$$

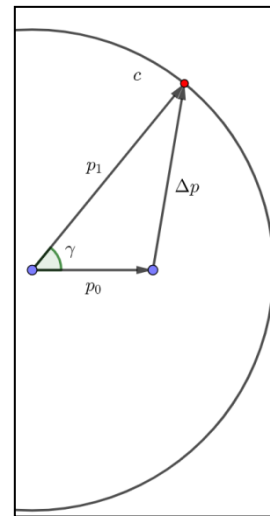
Нужен ще ни е ъгълът на отклонение γ на $\vec{p}_1$ от направлението на $\vec{p}_0$. За него имаме

$$\cos \gamma = \frac{p_{\tau 1}}{p_1} = \frac{p_J r_J}{p_1 r} \cos \theta = \frac{v_J r_J}{v r} \cos \theta, \quad \cos \gamma = 0.63.$$

Разстоянието от върха на вектора $\vec{p}_1$ до върха на $\vec{p}_0$ е

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \gamma} = 1.96 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

Пресмятаме $\Delta p/p_A = 4.89$. Затога $N = 5$.



Стефан Иванов

¹ Отговор „Змиеносец“ да се приема само при коментар, че в такъв случай Марс е точно на границата със Стрелец.

Критерии за оценяване (общо 15т.):

а) – За правилно намерен радиус на орбитата r – 2т.

– За съзвездieto на Марс – 1т.

б) – За доказателство, че големината на скоростта се запазва – 2т.

– За намиране на големината на ъгъла на отклонение – 2т.

– За съзвездieto на звездата (вкл. проверка за посока на β) – 1т.

в) – За намиране на скоростта след обстрел v – 1т.

– За намиране на N чрез геометрична аргументация – 2т. (0т. без аргументация)

– За проверка дали орбитата на Юпитер се пресича – 1т.

г) – За закон на запазване на момента на импулса – 1т.

– За правилна стойност на N – 2т.

Задача 4. Наблизо и надалеч.

- А) Изчислете периода на прецесия на земната ос T_p с точност до 100 години. [3 т.]

Две звезди с пренебрежимо собствено движение се наблюдават на голямо ъглово разстояние една от друга. В момента те се намират в една и съща небесна полусфера. Известно е, че след определен период от време двете звезди ще разменят сегашните си екваториални координати. Също е известно, че едната звезда ще се окаже на небесния екватор след време $t_1 = 9900$ уг, а последният път, когато другата е била на небесния екватор, е бил преди време $t_2 = 3000$ уг.

- Б) Намерете ъгловото разстояние между звездите η . [5 т.]

Две звезди A и B се наблюдават на малко ъглово отстояние една от друга в посока към пролетната равноденствена точка. Известно е, че наблюдавана от дадена географска ширина, звездата A , след време $t'_1 = 30$ уг, ще кулминира на височината, на която сега кулминира звездата B . Също така, звездата B , преди време $t'_2 = 35$ уг, е кулминирала на височината, на която сега кулминира звездата A .

- В) След колко време Δt двете звезди ще кулминират на една и съща височина над хоризонта? Краткопериодичните ефекти ($T < 20$ уг) да се приемат за пренебрежими. [3 т.]

Собственото движение по ректасцензия на звездата A е $\mu_{\alpha A} = +7.52''/\text{уг}$. Разстоянията до звездите са съответно $r_A = 1.71$ рс, $r_B = 6.49$ рс. В някакъв момент звездата A кулминира с $\tau = 2.00$ с по-рано от звездата B .

- Г) Възможно ли е след точно половин година A да кулминира по същото истинско местно звездно време, по което в момента кулминира B ? [4 т.]

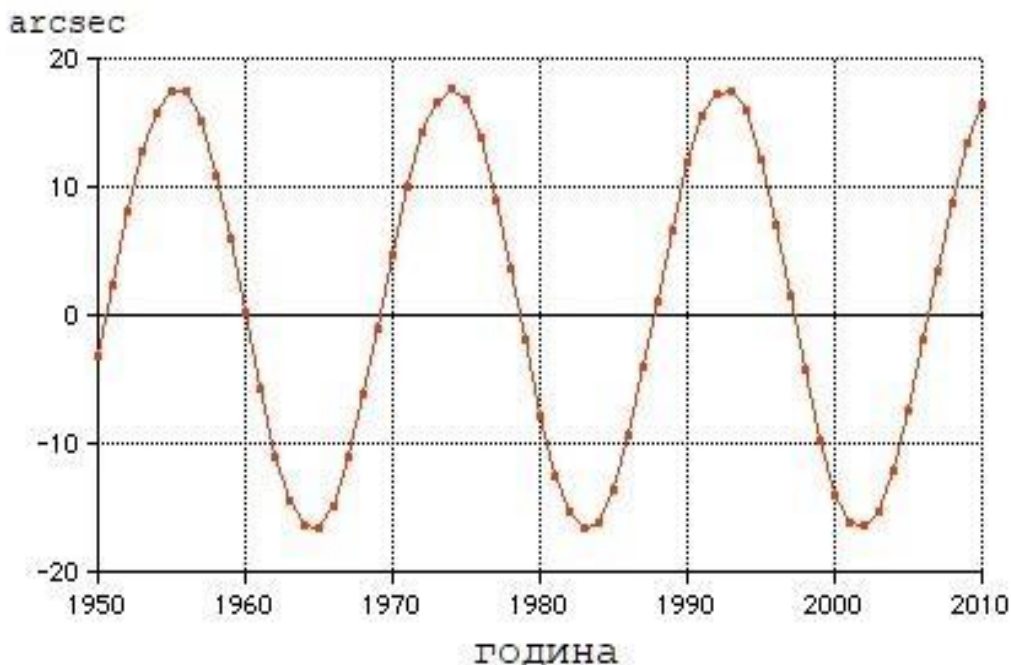
Указание: Истинското местно звездно време се определя относно моментното положение на пролетната равноденствена точка, за дадена точка от земната повърхност. Екваториалните координати не се влияят от аберацията на светлината.

Справочни данни:

Средна тропическа година – $T_t = 365.24219$ d

Средна звездна година – $T_s = 365.25636$ d

Наклон на земната ос – $\varepsilon = 23.5^\circ$



Решение.

а) Звездната година T_s е периодът между две преминавания на Слънцето през едно и също положение спрямо звездите. Тропическата година T_t е периодът между две преминавания на Слънцето през пролетната равноденствена точка. Причината T_t да е по-кратка от T_s е, че пролетната равноденствена точка се движи по еклиптиката в направление, противоположно на движението на Слънцето по еклиптиката. Движението на точката е резултат от прецесията на земната ос, и има същата периодичност T_p . Така тропическата година може да се разглежда като синодичен период на T_s и T_p (съответстващи на движения в обратни направления):

$$\frac{1}{T_t} = \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_p},$$

$$T_p = \frac{T_s T_t}{T_s - T_t} = 25800 \text{ yr.}$$

б) Първо е нужно да добием геометрична представа за влиянието на прецесията върху екуatorialните координати. На чертежа са показани небесният екватор QQ' и еклиптиката $\epsilon\epsilon'$, заедно с равноденствените точки γ и Ω . Имайки предвид посоката на движение на Слънцето по еклиптиката, може да укажем и посоката на движение на равноденствените точки. При това движение небесният екватор и небесната ос се преместват спрямо фиксираните звезди, и екуatorialните координати на тези звезди се променят.

За удобство може да не разглеждаме движението на екватора с ъглова скорост $\omega_p = 2\pi/T_p$ спрямо звездите, а да „задържим“ екватора на едно място на чертежа, наблюдавайки как звездите се движат спрямо него с ъглова скорост ω_p в обратната посока. Траекториите, които звездите описват, са малки кръгове, успоредни на еклиптиката, и по тях може да се изследва промяната на екуatorialните координати с времето.

Всеки набор екуatorialни координати (α, δ) принадлежи на конкретен малък кръг. За да може едната звезда (A) да придобие координатите на другата (B) в кой да е момент, непременно трябва A се намира върху малкия кръг на B . И за да може да има размяна на координатите, двете звезди трябва да отстоят на 180° по този малък кръг.

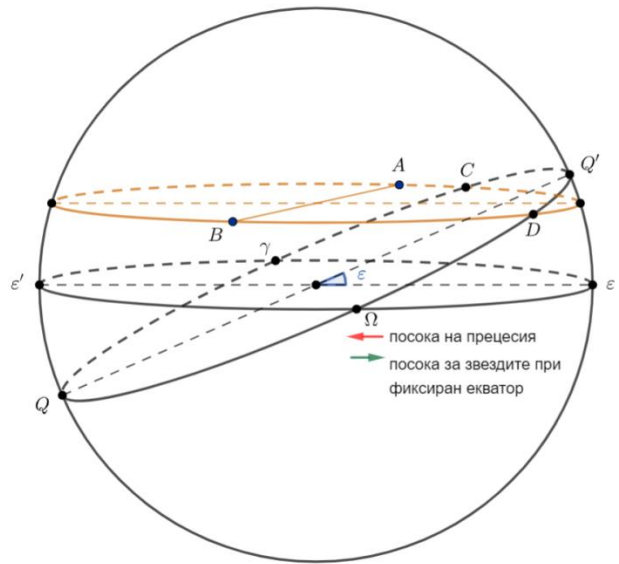
Малкият кръг под въпрос по условие пресича небесния екватор. Това става в две точки, които означаваме с C и D . Знаем, че дъгата $\widehat{ACDB}$ има мярка 180° . От друга страна,

$$\frac{\widehat{AC} + \widehat{DB}}{2\pi} = \frac{t_1 + t_2}{T_p} = \frac{1}{2},$$

тоест $\widehat{AC} + \widehat{DB} = 180^\circ$ и остава $\widehat{CD} = 0^\circ$. Затова малкият кръг на A и B пресича небесния екватор на еклиптична ширина $\beta = \pm\epsilon = \pm 23.5^\circ$. Отчитайки, че двете звезди са на 180° по кръга,

$$\eta = 180^\circ - 2\epsilon = 133^\circ.$$

в) По условие няма да отчитаме нутацията по ширина и полодията (паралаксът така или иначе няма значение, тъй като паралактичната елипса има малка ос 0 около еклиптиката). Височината на кулминация за фиксирана ширина се определя единствено от деклинацията на звездата. Промените в деклинацията се определят от собственото движение по деклинация и прецесията. Нека разликата в деклинациите на A и B е $\Delta\delta \equiv \delta_B - \delta_A$, а собствените движения по деклинация са съответно $\mu_{\delta A}$ и $\mu_{\delta B}$. Условието твърди, че след време t_1' деклинацията на A ще нарасне с $\Delta\delta$ и че преди време t_2' деклинацията на B е била с $\Delta\delta$ по-малка.



Имайки предвид, че A и B са около точката γ , скоростта на промяна в екваториалните координати поради прецесията се разлага на компоненти $+\omega_p \cos \varepsilon$ по ректасцензия и $+\omega_p \sin \varepsilon$ по деклинация. Записваме съответните уравнения:

$$(\omega_p \sin \varepsilon + \mu_{\delta A})t'_1 = \Delta\delta, \quad (\omega_p \sin \varepsilon + \mu_{\delta B})(-t'_2) = -\Delta\delta.$$

Двете звезди ще кулминират на еднаква височина, когато деклинацията им се изравни. Това става след време Δt , за което

$$(\mu_{\delta A} - \mu_{\delta B})\Delta t = \Delta\delta.$$

От заместване на първите две уравнения в третото намираме

$$\left(\frac{\Delta\delta}{t'_1} - \frac{\Delta\delta}{t'_2}\right)\Delta t = \Delta\delta,$$

което е формула за синодичен период $\left(\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{t'_1} - \frac{1}{t'_2}\right)$. Получаваме

$$\Delta t = \frac{t'_1 t'_2}{t'_2 - t'_1} = 210 \text{ yr.}$$

г) Разлика в кулминациите от 2 секунди съответства на разлика в моментните ректасцензии на звездите от

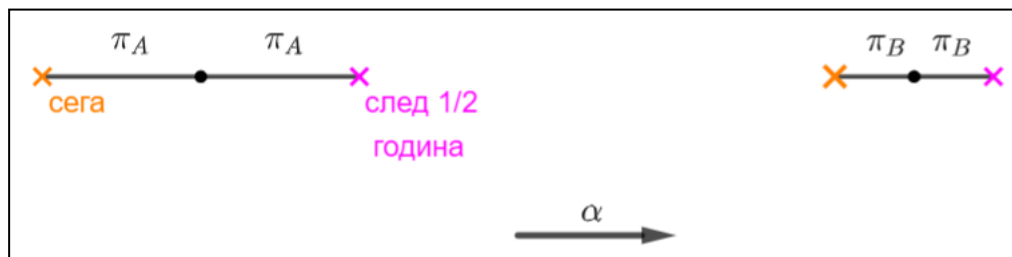
$$\Delta\alpha = 2.0055^s = 30.08'',$$

където сме отчели разликата между звездно и слънчево денонощие.

Ще проверим дали подходящо наслагване на всички налични ефекти за време $T_E/2$ може да промени ректасцензията на A с $\Delta\alpha$. На първо място имаме промяна в ректасцензията поради прецесия, с големина $\frac{\omega_p T_E}{2} \cos \varepsilon = 23.03''$. Имаме и промяна от собственото движение на A , с големина $\frac{\mu_{\alpha A} T_E}{2} = 3.76''$.

Още един ефект, който ще отчетем, е нутацията по дължина. Във връзка с нея в рамките на една година може да има значителна промяна в положението на пролетната равноденствена точка и съответно в измерената ректасцензия. За да намерим максималната възможна промяна в рамките на половин година, измерваме по графиката на нутацията максималния наклон, получавайки стойност $\nu = 5.40''/\text{yr}$. За половин година може да „спечелим“ ректасцензия до $\frac{\nu T_E}{2} = 2.70''$.

Паралаксите на звездите също допринасят към промяната в ректасцензията. На схемата са показани оптималните начални положения по паралактичните елипси, така че за 6 месеца да се „спечели“ най-много ректасцензия. Отстоянието между A след 6 месеца и B в момента тогава ще намалява с $\Delta\pi = 2\pi_A = 1.17''$.



На този етап общо се събира промяна

$$(\omega_p \cos \varepsilon + \mu_{\alpha A} + \nu) \frac{T_E}{2} + 2\pi_A = 30.66'' > \Delta\alpha.$$

Отговорът е **да**; няма нужда да се отчитат по-малки влияния като компонентата на полудията по дължина ($< 0.5''$).

Стефан Иванов

Критерии за оценяване (общо 15т.):

а) – За разбиране на смисъла на звездната и тропическата година – **1т.**
– За намиране на периода на прецесия – **2т.**

б) – За правилен геометричен модел на прецесията – **1т.**
– За разпознаване, че звездите отстоят на 180° по малък кръг – **1т.**
– За намиране на еклиптичната ширина – **2т. (1т. без обосновка)**
– За верен отговор – **1т.**

в) – За вярно записани уравнения на движение – **2т. (1т. без прецесия)**
– За верен отговор – **1т.**

г) – За правилно отчетена прецесия – **1т.**
– За правилно отчетена нутация – **1т.**
– За правилно отчетен паралакс – **1т.**
– За правилен отговор – **1т.**