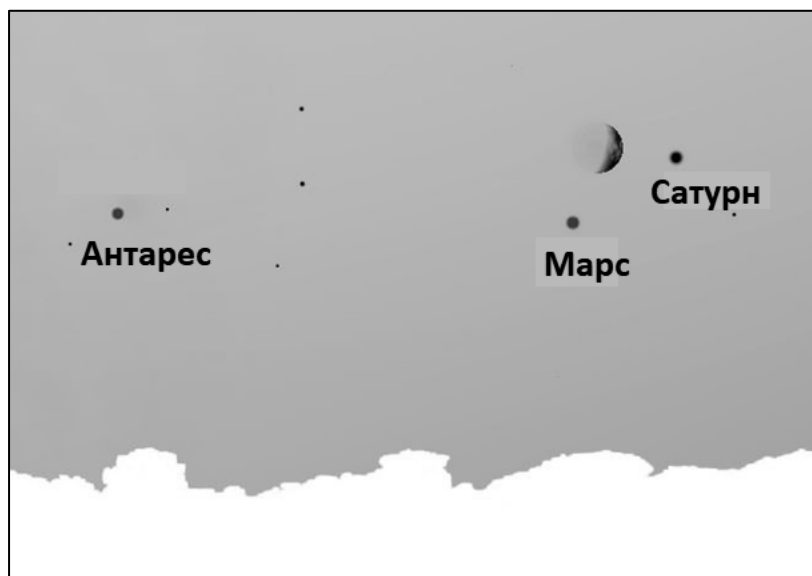


Задача 1. Марс, Сатурн и Луната. Представеното изображение показва как са разположени планетите Марс и Сатурн за наблюдател в северното полукуълбо на Земята. Също така, означено е и положението на Луната. В лявата част на кадъра се вижда ярката звезда Антарес от съзвездиято Скорпион. На долната снимка е показано увеличено изображение на Луната в същия момент.

- А) Приблизително през кой месец се е наблюдавала тази небесна сцена? Имайте предвид, че Луната е показана в такава фаза, в каквата действително е била на съответната дата, но нейният видим ъглов размер не е точно в мащаб. [4 т.]
- Б) Колко време след този момент Марс е бил в противостоене? А Сатурн? [5 т.]
- В) Определете стойността налъчевата скорост на Марс относно Земята в момента, изобразен на схемата. Препоръчително е да направите това графично. [6 т.]

Приемете, че Земята, Марс и Сатурн се движат по кръгови орбити, които лежат в една и съща равнина.



Справочни данни:

Радиус на орбитата на Марс – 1.52 au
Радиус на орбитата на Сатурн – 9.6 au
Орбитален период на Земята – 365.25 d
1 au – 150×10^6 km

Решение:

А) На снимката ясно се вижда западната част на съзвездието Скорпион. Така можем да направим извод, че Луната и двете планети са във Везни.

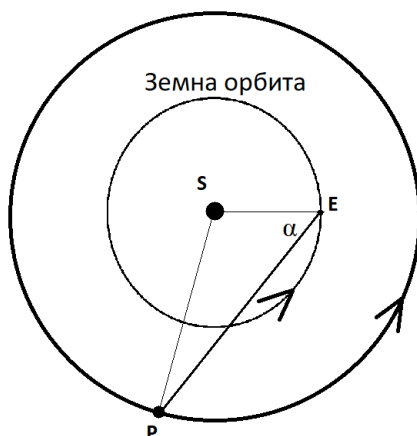
Използвайки увеличеното изображение на Луната, измерваме, че фазата на Луната е около $\varphi \approx 30\%$ (това е отношението на дебелината на огрътатата част на лунния диск към диаметъра му). Ако α е ъгловото отстояние между Луната и Слънцето, то:

$$\varphi = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Така намираме, че $\alpha \approx 66^\circ$.

Понеже изображението се отнася за наблюдател в северното полукълбо на Земята, а Луната е огръта отдясно, то можем да заключим, че Луната е в растяща фаза. Това означава, че Слънцето е на около 66° западно от Луната. Тъй като тя е във Везни, то Слънцето би следвало да се намира в Лъв. Това означава, че месецът най-вероятно е **август**. *Точната дата, за която се отнася конфигурацията е 31 август 2014 г., но това разбира се, не може да се очаква от учениците.*

Б) За да пресметнем търсеното време, първо трябва да намерим големината на ъгъла между Земята и съответната планета, с връх Слънцето. За целта, ще използваме долния чертеж, където въпросният ъгъл е **PSE**, където с т. Р сме означили положението на която и да е от двете планети Марс или Сатурн:



По синусовата теорема, намираме:

$$\frac{\sin \angle SPE}{SE} = \frac{\sin \alpha}{PS}.$$

Следователно:

$$\sin \angle SPE = \frac{SE}{PS} \cdot \sin \alpha$$

От тук следва, че за всяка планета търсеният централен ъгъл е:

$$\angle PSE = 180^\circ - \alpha - \angle SPE$$

Използвайки дадените ни стойности на орбиталните радиуси за Марс и Сатурн (съответстващи на отсечката PS на чертежа) и това, че ъгловото отстояние между тези планети и Слънцето е приблизително същото като между Луната и Слънцето, пресмятаме, че централният ъгъл е 77° за Марс и 109° за Сатурн:

Нека с P да означим сидеричния период на някоя от двете планети, а с T_3 орбиталния период на Земята. Следователно, ако r орбиталният радиус на планетата, то съгласно третия закон на Кеплер:

$$r [\text{au}]^3 = P [\text{yr}]^2.$$

Оттук намираме, че орбиталните периоди на Марс и на Сатурн са съответно 1.87 години и 29.75 години.

За синодичния T_{SYN} период на една външна планета (каквито са Марс и Сатурн), можем да запишем следното равенство:

$$\frac{1}{T_{SYN}} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{P}.$$

Следователно:

$$T_{SYN} = \frac{PT_3}{P - T_3}.$$

Пресмятаме, че синодичните периоди на Марс и на Сатурн са съответно: 783 дни и 378 дни. Получихме, че Сатурн и Марс се наблюдават на 66° източно от Слънцето. Това означава, че предходната конфигурация, в която те са се намирали е източна елонгация и им предстои да преминат през съединение. Нека да преминем в отправна система, в която Земята е неподвижна. В нея, планетите имат орбитален период, равен на техния синодичен. Това означава, че докато настъпи следващото противостоене, всяка една от тях трябва да измине ъгъл по орбитата си, равен на $360^\circ - 4PSE$.

Времето, което остава до настъпването на следващото противостоене на всяка една от планетите е:

$$t = \frac{360^\circ - 4PSE}{360^\circ} T_{SYN}.$$

След пресмятане намираме, че за Марс този времеви интервал е **615 дни**, а за Сатурн – **264 дни**.

В) Нека първо да намерим големините на орбиталните скорости на Земята V_3 и на Марс V_M . За земната скорост можем да запишем:

$$V_3 = \frac{2\pi \cdot 1 \text{ au}}{T_3}$$

$$V_3 \approx 29.9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

По същия начин намираме и скоростта на Марс:

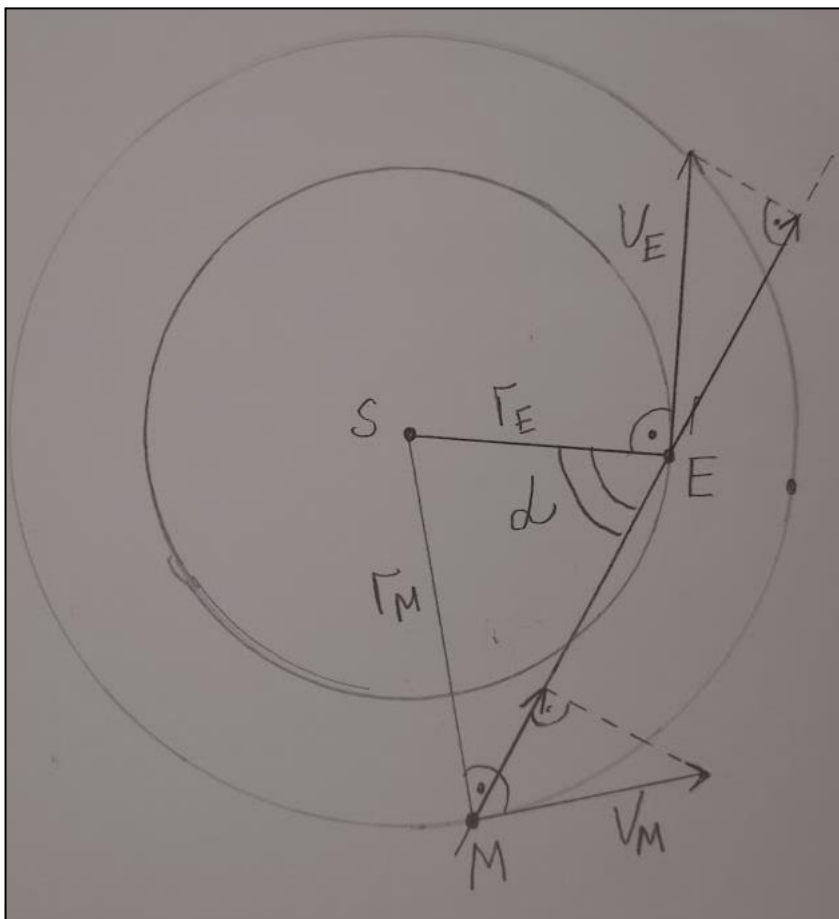
$$V_M = \frac{2\pi \cdot r_M}{T_M}$$

$$V_M \approx 24.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

За да намерим лъчевата скорост на Марс, постъпваме по следния начин:

- 1. На милиметровата хартия начертаваме двете орбити в мащаб 1:1.52 (Ако земната орбита има радиус 5 см, то марсианската би следвало да има 7.6 см);
- 2. Избираме една точка (т. Е) от земната орбита, в която да се намира нашата планета в този момент и избираме посоката в която планетите се движат по своите орбити;
- 3. Начертаваме права, която свързва избраното положение на Земята със Слънцето;
- 4. Начертаваме лъч, с начало Земята, сключващ ъгъл 66° с отсечката Земя-Слънце. Там където този лъч пресича марсианската орбита, е положението на Марс;
- 5. За да получим търсената лъчева скорост графично, трябва да нанесем орбиталните скорости в един мащаб, например $1 \text{ km/s} = 2 \text{ mm}$. Те са допирателни към техните орбити. В избрания мащаб векторът, показващ земната скорост има дължина 60 mm, а този съответстващ на марсианската е около 48 mm.
- 6. След като сме нанесли двата вектор на схемата, трябва да ги проектираме върху отсечката, която свързва двете планети. Това правим като, спуснем перпендикуляр към тази права от края на всеки един вектор. Измерваме техните дължини в указания мащаб и получаваме следните стойности: за Земята – 27 km/s, за Марс – 14.8 km/s.
- 7. Търсената лъчева скорост е разликата между тях: 12.2 km.

Това подусловие може да се реши и изцяло аналитично, чрез използване на тригонометрични зависимости. Ако е решението е правилно и е достигнат верен резултат, следва да се присъдят максималният брой точки.



Критерии за оценяване (15 т.):

А) За съобразяване на съзвездието в което са Луната, Марс и Сатурн – 1 т.

За намиране на ъгловото отстояние между Луната и Слънцето - 1.5 т.

(Това може да бъде направено и без да се използва дадената в официалното решение формула, съобразявайки приблизителната фаза на Луната. Ако полученият от ученика резултат е правдоподобен, то не следва да се отнемат точки).

За съобразяване на това в каква посока Луната се намира, относно Слънцето – 0.5 т.

За съобразяване на съзвездието, в което се намира Слънцето и съответно месеца от годината – 1 т.

Това подусловие се изпълнява на ръка и поради това е възможно получената от ученика стойност на ъгловото отстояние между Луната и Слънцето да се различава малко от авторската.

Б) За правилна геометрична постановка за намиране на ъгъла Марс-Слънце-Земя – 1.5 т.

За правилни математически преобразувания и верен резултат – 1 т.

За намиране на синодичните периоди – 0.5 т.

За съобразяване на дъгата от орбитата, която двете планети трябва да изминат до следващото си противостояние – 1 т.

За правилен израз за търсеното време и правилен числен резултат – 1 т.

В) За намиране на скоростите на Земята и Марс – 1 т.

За правилна идея за геометрична постановка, чрез която може да се намери лъчевата скорост – 2 т.

За правилно направени геометрични построения и прецизни измервания – 2 т.

За правилно получена числена стойност – 1 т.

(Поради това, че решението на задачата се изпълнява графично, е напълно възможно получените от ученика стойности малко да се различават от авторските.)