

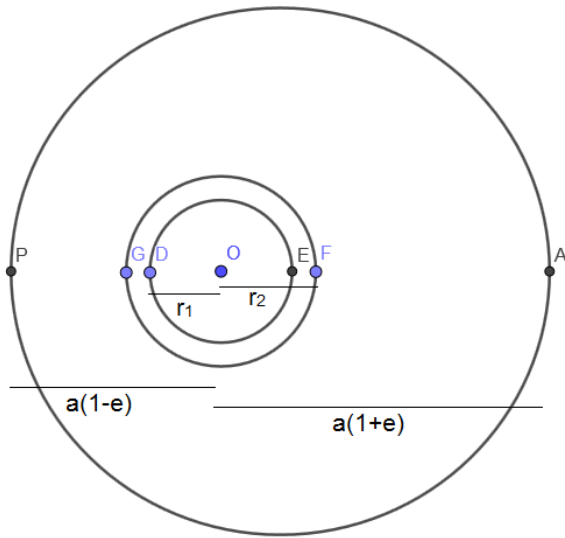
Задача 4. Планета около двойна звезда. Отношението на масите на компонентите в двойна звездна система е $M_2/M_1 = 0.7$ и разстоянието между тях не се променя. Планета обикаля около двойната звезда по външна орбита в орбиталната равнина на компонентите. От планетата редовно се наблюдават затъмнения на двете звезди една от друга. Главната компонента е по-гореща и по-голяма.

- А) Ярко оранжев и много любознателен жител на планетата прави измервания на двойната система. Главната компонента има един и същ ъглов размер, гледана от периастрий на планетата, когато вторичната транзитира пред нея, и гледана от апоастрий на планетата, когато тя затъмнява вторичната. Когато вторичната компонента транзитира пред главната, вторичната е с 10% по-голяма на ъглов размер, гледана от периастрий, отколкото гледана от апоастрий на планетата. Намерете ексцентрицитета на орбитата на планетата. [5 т.]
- Б) Ако двете звезди правят пълна обиколка една около друга за 6.35 d, а разстоянието между тях е 12.1×10^6 km, намерете през какъв период от време оранжевият астроном посреща Нова година. [4 т.]
- В) За земните наблюдатели системата е затъмнително двойна променлива звезда, а зрителният лъч от нас към нея лежи в орбиталната равнина на компонентите. Разликата между видимите звездни величини на променливата в главен и вторичен минимум е 0.33 mag. Ефективните температури на двете компоненти са $T_1 = 6030$ K и $T_2 = 4980$ K. Намерете отношението на радиусите на компонентите R_2/R_1 . [3 т.]
- Г) Каква ще е разликата в звездни величини между блясъка на двойната звезда при главното и вторичното затъмнение, за ярко оранжевия наблюдател от планетата в периастрий? [3 т.]

Справочни данни:

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2}$

Решение:



А) След като разстоянието между компонентите не се променя, те се движат по кръгови орбити около центъра на масите с радиуси r_1 и r_2 . При наблюдение на затъмнения от планетата, тя се намира на една права с двете звезди. Нека голямата полуос на орбитата на планетата около центъра на масите е a , а ексцентрицитетът е e . По време на транзитиране на вторичната компонента пред главната, гледано от периастрий (PGE на чертежа), разстоянието планета – главна компонента е $r_P + r_1$. По време на затъмнение на вторичната компонента от главната, гледано от апоастрий, (GEA на чертежа) разстоянието планета – главна компонента е $r_A - r_1$. След като ъгловите размери на главната компонента в двете положения са равни, двете разстояния са равни. Заместваме с a и e и получаваме:

$$a(1 - e) + r_1 = a(1 + e) - r_1$$

$$r_1/a = e$$

Когато вторичната компонента транзитира пред главната, гледано от периастрий (PGE на чертежа), разстоянието планета – вторична компонента е $r_P - r_2$. Когато вторичната компонента транзитира пред главната, гледано от апоастрий (DFA на чертежа), разстоянието планета – вторична компонента е $r_A - r_2$. За отношението на ъгловите размери на вторичната имаме:

$$\delta_P = 1.1 \delta_A$$

$$\frac{2R_2}{r_P - r_2} = 1.1 \left(\frac{2R_2}{r_A - r_2} \right)$$

$$\frac{r_A - r_2}{r_P - r_2} = 1.1$$

$$a(1 + e) - r_2 = 1.1(a(1 - e) - r_2)$$

$$r_2/a = (1 - 21e)$$

Разделяме почленно двата израза и получаваме

$$r_1/r_2 = e/(1 - 21e)$$

Заместваме с отношението на масите, тъй като

$$r_1/r_2 = M_2/M_1$$

$$\frac{e}{1 - 21e} = 0.7$$

Решаваме и получаваме $e = 0.0446$

Б) От III закон на Кеплер за двете звезди намираме масата на системата:

$$\frac{(r_1 + r_2)^3}{P_{12}^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

Получаваме $M_1 + M_2 = 1.75 M_{sol}$

$$M_1 = 1.03 M_{sol}$$

$$M_2 = 0.72 M_{sol}$$

Пресмятаме голямата полуос на планетата от

$$r_1 = (0.7/1.7)(r_1 + r_2)$$

$$a = r_1/e$$

Получаваме $a = 0.747 \text{ AU}$

От III закон на Кеплер за планетата намираме орбиталния ѝ период P :

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

Получаваме $P = 176 \text{ d}$

В) Нека температурите на двете компоненти да са $T_1 = 6030 \text{ K}$ и $T_2 = 4980 \text{ K}$. Ако гледано от Земята разликата в звездните величини е 0.33 mag , можем да напишем закона на Погсън, използвайки светлинните потоци E_{T1} и E_{T2} , които двете компоненти биха създавали поотделно, и радиусите им R_1 и R_2 :

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{E_{T1} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right) + E_{T2}}{E_{T1}} = 0.33$$

Тъй като двете компоненти са на равно разстояние от нас, отношението на потоците е равно на отношението на светимостите им L_1 и L_2 .

$$\left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right) + \frac{L_2}{L_1} = 10^{-0.4 \times 0.33}$$

От Закона на Стефан-Болцман

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4$$

Заместваме и решаваме за отношението на радиусите R_2/R_1 :

$$\left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 10^{-0.4 \times 0.33}$$

Получаваме $R_2/R_1 = 0.70$

Г) За разликата в звездните величини на двете затъмнения, гледани от периастрий можем да напишем подобен израз, с разликата, че този път отношението на ъгловите размери не е равно на отношението на радиусите и частта от видимата площ на главната компонента, която се наблюдава, е $\left(1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right)$

$$\Delta m_p = -2.5 \lg \frac{(L_1/(r_p + r_1)^2) \left(1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right) + (L_2/(r_p - r_2)^2)}{(L_1/(r_p - r_1)^2)}$$

$$\Delta m_p = -2.5 \lg \frac{(r_p - r_1)^2}{(r_p + r_1)^2} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{r_p + r_1}{r_p - r_2}\right]\right)^2\right) + \frac{L_2}{L_1} \frac{(r_p - r_1)^2}{(r_p - r_2)^2}$$

$$\Delta m_p = -2.5 \lg \left[\frac{(r_p - r_1)^2}{(r_p + r_1)^2} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{r_p + r_1}{r_p - r_2}\right]\right)^2\right) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \frac{(r_p - r_1)^2}{(r_p - r_2)^2} \right]$$

Получаваме $\Delta m_p = 0.64 \text{ mag}$