

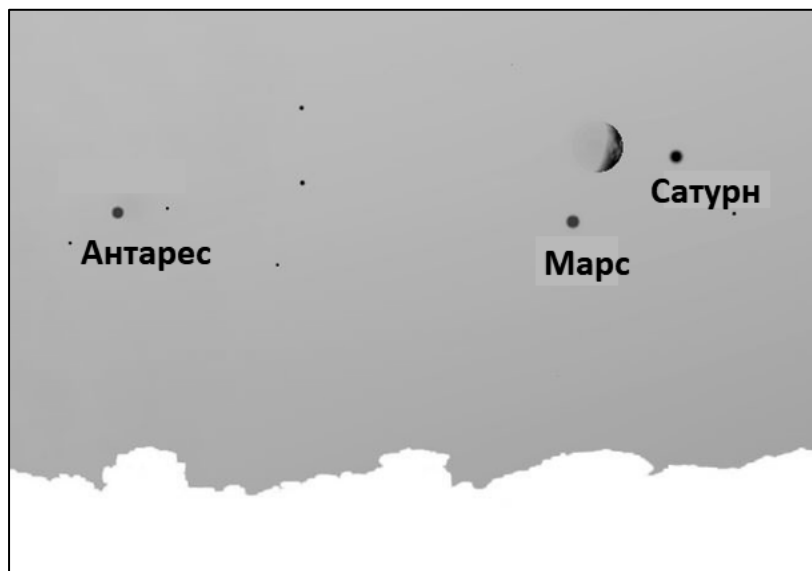
IV кръг, 22 юли 2021 г., Варна, теоретичен тур

Младша възраст – решения

Задача 1. Марс, Сатурн и Луната. Представеното изображение показва как са разположени планетите Марс и Сатурн за наблюдател в северното полукукло на Земята. Също така, означено е и положението на Луната. В лявата част на кадъра се вижда ярката звезда Антарес от съзвездиято Скорпион. На долната снимка е показано увеличено изображение на Луната в същия момент.

- А) Приблизително през кой месец се е наблюдавала тази небесна сцена? Имайте предвид, че Луната е показана в такава фаза, в каквата действително е била на съответната дата, но нейният видим ъглов размер не е точно в мащаб. [4 т.]
- Б) Колко време след този момент Марс е бил в противоположение? А Сатурн? [5 т.]
- В) Определете стойността на лъчевата скорост на Марс относно Земята в момента, изобразен на схемата. Препоръчително е да направите това графично. [6 т.]

Приемете, че Земята, Марс и Сатурн се движат по кръгови орбити, които лежат в една и съща равнина.



Справочни данни:

Радиус на орбитата на Марс – 1.52 au
Радиус на орбитата на Сатурн – 9.6 au
Орбитален период на Земята – 365.25 d
 $1 \text{ au} = 150 \times 10^6 \text{ km}$

Решение:

а) На снимката ясно се вижда западната част на съзвездиято Скорпион. Така можем да направим извод, че Луната и двете планети са във Везни.

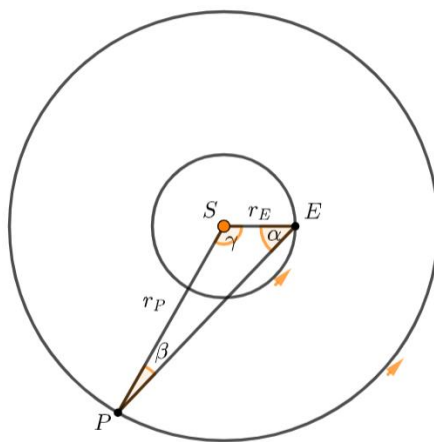
Използвайки увеличеното изображение на Луната, измерваме, че фазата на Луната е около $\varphi \approx 30\%$ (това е отношението на дебелината на огрътата част на лунния диск към диаметъра му). Ако α е ъгловото отстояние между Луната и Слънцето, то

$$\varphi = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Така намираме, че $\alpha \approx 66^\circ$.

Понеже изображението се отнася за наблюдател в северното полукълбо на Земята, а Луната е огръта отдясно, то можем да заключим, че Луната е в растяща фаза. Това означава, че Слънцето е на около 66° западно от Луната. Тъй като тя е във Везни, то Слънцето би следвало да се намира в Лъв. Това означава, че месецът най-вероятно е **август**. *Точната дата, за която се отнася конфигурацията, е 31 август 2014 г., но това разбира се, не може да се очаква от учениците.*

б) За да пресметнем търсеното време, първо трябва да намерим големината на ъгъла между Земята и съответната планета, с връх Слънцето. За целта, ще използваме долния чертеж, където въпросният ъгъл е $\angle PSE \equiv \gamma$, а с т. P сме означили положението на която и да е от двете планети Марс или Сатурн:



По синусовата теорема намираме:

$$\frac{\sin \beta}{r_E} = \frac{\sin \alpha}{r_P},$$

$$\sin \beta = \frac{r_E}{r_P} \sin \alpha.$$

Оттук следва, че за всяка планета търсеният централен ъгъл е:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Използвайки дадените ни стойности на орбиталните радиуси за Марс и Сатурн (съответстващи на отсечката PS на чертежа) и това, че ъгловото отстояние между тези планети и Слънцето е приблизително същото като между Луната и Слънцето, пресмятаме, че централният ъгъл е 77° за Марс и 109° за Сатурн:

Нека с P да означим сидеричния период на някоя от двете планети, а с T_3 орбиталния период на Земята. Следователно, ако r орбиталният радиус на планетата, то съгласно третия закон на Кеплер:

$$r [\text{au}]^3 = P [\text{yr}]^2.$$

Оттук намираме, че орбиталните периоди на Марс и на Сатурн са съответно 1.87 години и 29.75 години.

За синодичния T_{SYN} период на една външна планета (каквито са Марс и Сатурн), можем да запишем следното равенство:

$$\frac{1}{T_{SYN}} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{P} \Rightarrow T_{SYN} = \frac{PT_3}{P - T_3}.$$

Пресмятаме, че синодичните периоди на Марс и на Сатурн са съответно 783 дни и 378 дни. Получихме, че Сатурн и Марс се наблюдават на 66° източно от Слънцето. Това означава, че предходната конфигурация, в която те са се намирали, е източна елонгация, и им предстои да преминат през съединение. Нека да преминем в отправна система, в която Земята е неподвижна. В нея, планетите имат орбитален период, равен на техния синодичен. Това означава, че докато настъпи следващото противостоене, всяка една от тях трябва да измине ъгъл по орбитата си, равен на $360^\circ - \angle PSE$.

Времето, което остава до настъпването на следващото противостоене на всяка една от планетите е:

$$t = \frac{360^\circ - \gamma}{360^\circ} T_{SYN}.$$

След пресмятане намираме, че за Марс този времеви интервал е **615 дни**, а за Сатурн – **264 дни**.

в) Нека първо да намерим големините на орбиталните скорости на Земята V_3 и на Марс V_M . За земната скорост можем да запишем

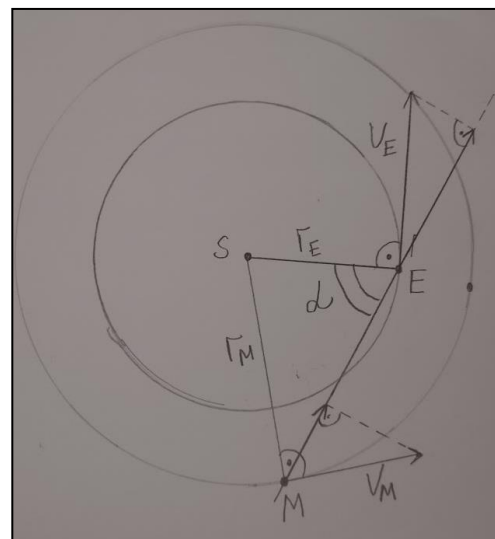
$$V_3 = \frac{2\pi \cdot 1 \text{ au}}{T_3} \approx 29.9 \text{ km/s}.$$

По същия начин намираме и скоростта на Марс

$$V_M = \frac{2\pi \cdot r_M}{T_M} \approx 24.2 \text{ km/s}.$$

Сега за да намерим лъчевата скорост на Марс, постъпваме по следния начин:

- 1. На милиметровата хартия начертаваме двете орбити в мащаб 1:1.52 (ако земната орбита има радиус 5 см, то марсианската би следвало да има 7.6 см);
- 2. Избираме една точка (т. Е) от земната орбита, в която да се намира нашата планета в този момент и избираме посоката в която планетите се движат по своите орбити;
- 3. Начертаваме права, която свързва избраното положение на Земята със Слънцето;
- 4. Начертаваме лъч, с начало Земята, сключващ ъгъл 66° с отсечката Земя-Слънце. Там където този лъч пресича марсианската орбита, е положението на Марс;
- 5. За да получим търсената лъчева скорост графично, трябва да нанесем орбиталните скорости в един мащаб, например $1 \text{ km/s} = 2 \text{ mm}$. Те са допирателни към планетните орбити. В избрания мащаб векторът, показващ земната скорост има дължина 60 mm, а този съответстващ на марсианската, е около 48 mm.
- 6. След като сме нанесли двата вектор на схемата, трябва да ги проектираме върху отсечката, която свързва двете планети. Това правим, като спуснем перпендикуляр към тази права от края на всеки един вектор. Измерваме техните дължини в указания мащаб и получаваме за Земята 27 km/s, а за Марс – 14.8 km/s;
- 7. Търсената лъчева скорост е разликата между тях: **+12.2 km/s**.



Това подусловие може да се реши и изцяло аналитично, чрез използване на тригонометрични зависимости. Ако е решението е правилно и е достигнат верен резултат, следва да се присъдят максималният брой точки.

Никола Каравасилев

Критерии за оценяване (общо 15т.):

а) – За съобразяване на съзвездие в което са Луната, Марс и Сатурн – **1т.**

– За намиране на ъгловото отстояние между Луната и Слънцето – **1.5т.**

Това може да бъде направено и без да се използва дадената в официалното решение формула, съобразявайки приблизителната фаза на Луната. Ако полученият от ученика резултат е правдоподобен, то не следва да се отнемат точки.

– За съобразяване на това в каква посока Луната се намира относно Слънцето – **0.5m.**

– За съобразяване на съзвездие, в което се намира Слънцето, и съответно месеца – **1m.**

Това подусловие се изпълнява на ръка и поради това е възможно получената от ученика стойност на ъгловото отстояние между Луната и Слънцето да се различава малко от авторската.

б) За правилна геометрична постановка за намиране на ъгъла Марс-Слънце-Земя – 1.5m.

За правилни математически преобразования и верен резултат – 1m.

За намиране на синодичните периоди – 0.5m.

За съобразяване на дъгата от орбитата, която двете планети трябва да изминат до следващото си противостояние – 1m.

За правилен израз за търсеното време и правилен числен резултат – 1m.

в) За намиране на скоростите на Земята и Марс – 1m.

За правилна геометрична постановка, чрез която може да се намери лъчевата скорост – 2m.

За правилно направени геометрични построения и прецизни измервания – 2m.

За правилно получена числена стойност – 1m.

Поради това, че решението на задачата се изпълнява графично, е напълно възможно получените от ученика стойности малко да се различават от авторските.

Задача 2. Междувъздушна мисия. В бъдещето е изпратена роботизирана мисия до кафявото джудже DENIS 0255-4700 на разстояние 4.97 pc от Земята. Масата на DENIS 0255-4700 е около 45 Юпитерови маси, радиусът му е един Юпитеров радиус, температурата му е 1300 K. Мисията се състои от много лек летателен апарат, ускорен до постоянна скорост 45000 km/s, с малка управляема камера на борда, която наблюдава в инфрачервен филтър J.

- А) Колко години преди летателният апарат да достигне DENIS 0255-4700 камерата му ще регистрира кафявото джудже и Слънцето (наблюдавано в обратна посока) като обекти с еднаква яркост? Звездната величина в J на DENIS 0255-4700 при наблюдение от Земята е $J_D = 13.2$, а на Слънцето – $J_S = -27.93$. **[5 т.]**
- Б) С приближаването си към крайната цел камерата на борда на апарата засича транзити на планета пред диска на кафявото джудже веднъж на всеки 13.7 d. Определете видимата звездна величина на кафявото джудже, гледано от планетата, във филтър J. Направете обосновано предположение за видимата визуална звездна величина на кафявото джудже, гледано от планетата. Сравнете гледката от планетата със Слънцето, гледано от Земята. **[6 т.]**
- В) При транзитите, които камерата регистрира докато апаратът е относително далече от кафявото джудже, изменението на неговия блясък е с амплитуда 0.015 mag. Ако масата на планетата е 2.0 земни маси, пресметнете средната ѝ плътност. Какви предположения можете да направите за химичния състав на планетата? **[4 т.]**

Справочни данни:

Маса на Слънцето – 1.99×10^{30} kg

Маса на Земята – 5.97×10^{24} kg

Маса на Юпитер – 1/1047 слънчеви маси

Среден радиус на Юпитер – 69 900 km

Фотосферна температура на Слънцето – 5770 K

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Решение:

а) Намираме абсолютните звездни величини на Слънцето и на кафявото джудже във филтър J, използвайки формулата

$$J - M_J = 5 \lg(r [\text{pc}]) - 5.$$

Получаваме $M_{J\text{sol}} = 3.64$, $M_{J\text{DENIS}} = 14.72$. Намираме отношението на светимостите във филтър J от закона на Погсън:

$$\frac{L_{J\text{DENIS}}}{L_{J\text{sol}}} = 10^{0.4(M_{J\text{DENIS}} - M_{J\text{sol}})} = \frac{1}{27040}.$$

Тъй като за светимостта L , светлинния поток E и разстоянието r важи

$$E = \frac{L}{4\pi r^2},$$

а осветеностите E_J са равни, можем да пресметнем отношението на разстоянията от апарата до кафявото джудже и до Слънцето така:

$$\frac{r_{\text{DENIS}}}{r_{\text{sol}}} = \sqrt{\frac{L_{\text{DENIS}}}{L_{\text{sol}}}} = \frac{1}{164}.$$

Следователно в търсения момент разстоянието от апарата до кафявото джудже е 1/165-та част от разстоянието от Земята до кафявото джудже. Времето за изминаване на това разстояние със скорост $v = 0.15c$ е:

$$t = \frac{1}{165} \frac{r}{(0.15c)}.$$

Получаваме $t = 0.655 \text{ yr} = 239 \text{ d}$ преди достигане на кафявото джудже.

б) Наблюдаваният период на транзитите е $P = 13.7 \text{ d}$, но той не съответства на истинския орбитален период поради крайната скорост на светлината. Между два последователни пасажа апаратът се е доближил до кафявото джудже с разстояние vP , което се изминава от светлината за време $\Delta t = (v/c)P$. Лъчите, засечени при първия пасаж, са излъчени Δt по-рано, следователно това е разликата между наблюдавания и истинския период:

$$P_0 = P + \Delta t = P \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 15.755 \text{ d}.$$

Радиуса R на орбитата на планетата около кафявото джудже намираме от III Закон на Кеплер:

$$\frac{R^3}{P_0^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow 6.445 \times 10^6 \text{ km}.$$

Намираме видимата звездна величина в J, използвайки отново формулата за абсолютна звездна величина:

$$J - M_J = 5 \lg(r[\text{pc}]) - 5.$$

Използвайки абсолютна звездна величина $M_{J\text{DENIS}} = 14.72$, получаваме $J = -23.68$, което е сравнимо със Слънцето, гледано от Земята, но по-слабо.

Сега ще направим предположение и за визуалната звездна величина на джуджето. За да го аргументираме, ще намерим първо болометричната звездна величина на джуджето M_{DENIS} . Използвайки радиуса R и температурата T , можем да пресметнем светимостта L на кафявото джудже в слънчеви светимости:

$$\frac{L_{\text{DENIS}}}{L_{\text{sol}}} = \left(\frac{R_{\text{DENIS}}}{R_{\text{sol}}}\right)^2 \left(\frac{T_{\text{DENIS}}}{T_{\text{sol}}}\right)^4 = \frac{1}{38500}.$$

От закона на Погсън намираме болометричната звездна величина на кафявото джудже:

$$M_{\text{DENIS}} = M_{\text{sol}} - 2.5 \lg \frac{L_{\text{DENIS}}}{L_{\text{sol}}}.$$

Получава се 16.21, което е по-слабо от абсолютната звездна величина 14.72 в J. Това показва, че в инфрачервения диапазон кафявото джудже излъчва относително повече спрямо Вега, отколкото в

целия спектър. Тогава е ясно, че във видимия диапазон кафявото джудже излъчва много по-малко, отколкото в J . Добра оценка за визуалната абсолютна звездна величина би била $M_{V\text{DENIS}} \sim 20 \text{ mag}$, т.е. около $V \sim -18 \text{ mag}$, гледано от планетата – все още изключително ярко по небето на планетата. Това небе, ако има атмосфера, ще изглежда червено.

в) При транзити от планета с радиус R_P ще остане непокрита част от диска на кафявото джудже $1 - \left(\frac{R_P}{R_{\text{DENIS}}}\right)^2$, което ще е и отношението на светлинните потоци в транзит и извън транзит. Затова

$$\Delta m = -2.5 \lg \left(1 - \left(\frac{R_P}{R_{\text{DENIS}}} \right)^2 \right) \Rightarrow \frac{R_P}{R_{\text{DENIS}}} = 0.117 \Rightarrow R_P = 8180 \text{ km}.$$

Плътноста пресмятаме от

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R_P^3} = 5.21 \text{ g/cm}^3.$$

Това е сравнително висока плътност, следователно планетата е от земен тип. Може да се предположи, че е съставена главно от метали, с известни количества силиций и, евентуално, въглерод.

Александър Куртенков

Задача 3. Австралийско време. Романтическият австралиеца, който познавате от II и III кръг на олимпиадата, тази година е на пустинно пътешествие със своята приятелка. За да планират добре пътуването си към красивата скала Улуру, те носят със себе си купища техника, а също и часовници, които автоматично се пренастройват към часовата зона на мястото. Границите на лятното часово време в Австралия са последната неделя на март и последната неделя на октомври. Лятно часово време се ползва в щатите Нов Южен Уелс (NSW), Южна Австралия (SA), Виктория (Vic).

- А) В някакъв момент от пътуването на австралиеца му се случва следното – прави една крачка и показанието на часовника му се увеличава с 30 минути. След още една крачка показанието на часовника му се увеличава с още 30 минути. И след още една крачка – още 30 минути. Какви са координатите на пътешествениците? На коя дата става това? [4 т.]

Сега двамата са на друго място в австралийската пустиня – Оазисът на кенгуруто, на географска ширина $\varphi = 28^\circ \text{ S}$.

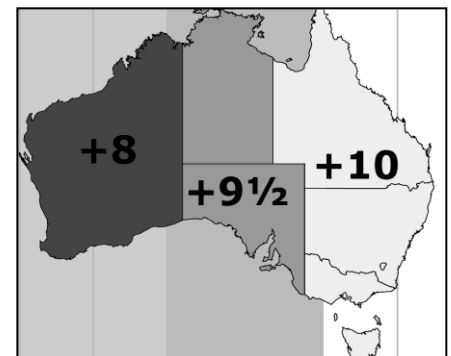
- Б) За тях има две дати (отдалечени една от друга с няколко месеца), в които Слънцето кулминира на една и съща височина и по едно и също гражданско време. Намерете ги. [3 т.]

Австралийката се отправя във фиксирана посока към ново място в пустинята, а приятелят ѝ остава при Оазиса.

- В) От тези два пункта те и двамата виждат през годината кулминацията на Слънцето на една и съща височина и по едно и също гражданско време. Колко километра е изминала австралийката? [4 т.]

По-късно двамата са заедно и на ново място – Долината на емуто, на географски координати $\varphi = 25^\circ \text{ S}$, $\lambda = 139^\circ \text{ E}$.

- Г) На колко километра трябва австралиеца и неговата приятелка да се придвижат на юг, така че от новото място да могат на някаква дата от годината да видят Слънцето да кулминира на същата височина и по същото гражданско време, както се случва в Долината на емуто на 17.02? [4 т.]



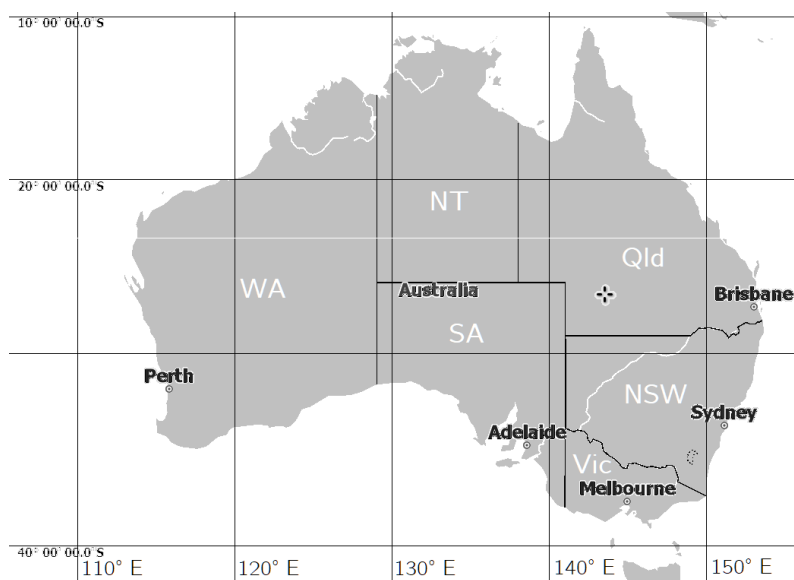
Австралия – часови зони

Справочни данни:

Радиус на Земята – $R_E = 6371$ km

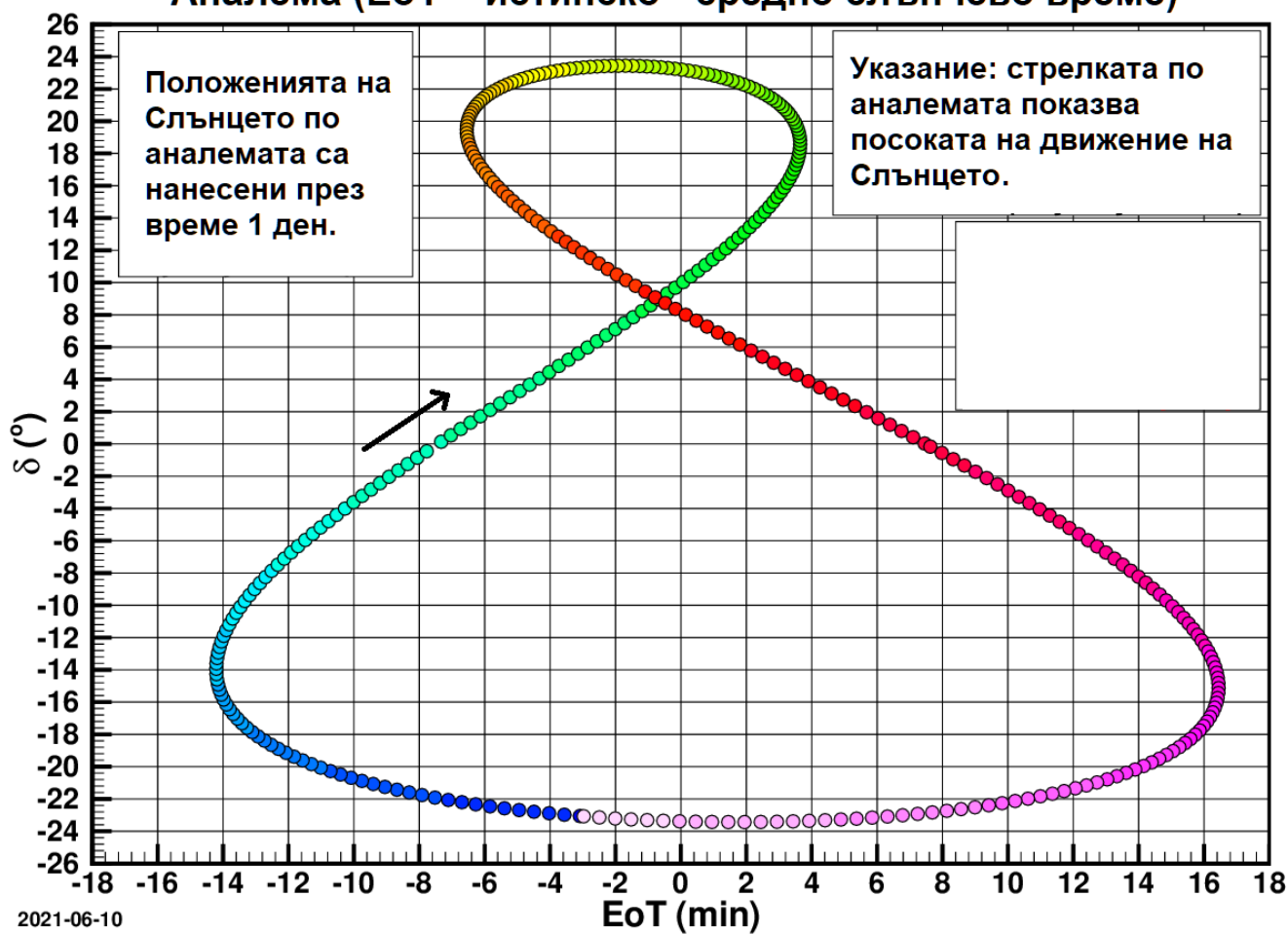
Дата на мартенското равноденствие през 2021 г. – 20.03

Дата на септемврийското равноденствие през 2021 г. – 22.09



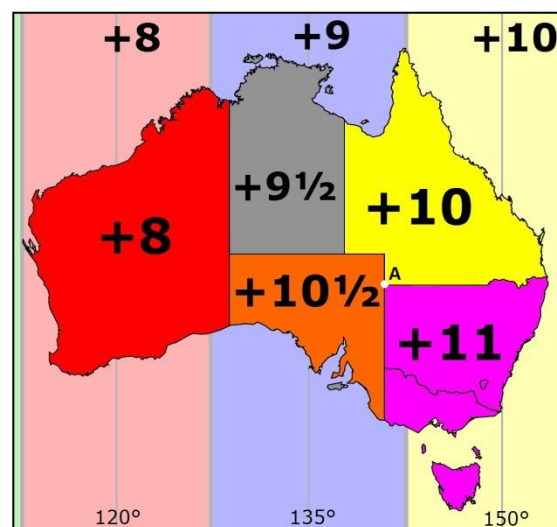
Австралия – паралели и меридиани

Аналема (ЕоТ = истинско - средно слънчево време)



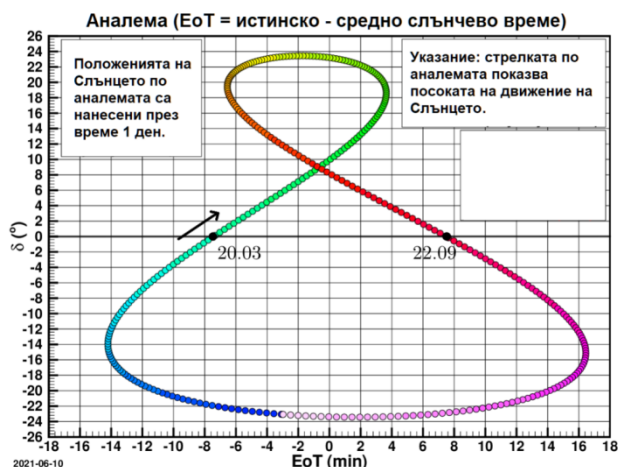
Решение.

а) За улеснение на работата, може отделно да нарисуваме часовите зони в Австралия през лятото. Търсеното може да се осъществи само в точка А. Започваме в щата SA и стъпваме в Qld. След това Австралия преминава на лятно часово време. Стъпваме обратно в SA. После стъпваме в NSW. При това се получават общо три нараствания на показанието на часовника с 30 минути. На картата с паралели и меридиани намираме, че координатите на точка А са $\varphi = 29^\circ \text{ S}$, $\lambda = 141^\circ \text{ E}$.



Тъй като сме в южното полукълбо, лятното часово време започва в последната неделя на октомври. Трябва да намерим на коя дата е това през 2021 г. Денят на теоретичния тур е 22 юли, четвъртък. Следващата неделя е 25 юли. Датата 25 август е след 31 дни, което е 4 пълни седмици и още 3 дни. Аналогично, до 25 септември има 3 „допълнителни“ дни, до 25 октомври – още 2. До 25 октомври има 8 „допълнителни дни“, тоест 25 октомври е понеделник. Последната неделя на месеца, което е отговорът на задачата, е **31 октомври**.

б) За да се изпълнява търсеното, в двата дни трябва отклонението от уравнението на времето да е еднакво, а също и деклинацията на Слънцето да е еднаква. Положенията на Слънцето за двата дни трябва да лежат върху една и съща точка по аналемата. Това трябва да е точката на самопресичане на аналемата. За да намерим съответстващите на тази точка дати, е нужно да имаме ориентир за датата. Пресичаме линията на нулева деклинация с аналемата. Пресечните точки съответстват на датите на равноденствие, 20.03 и 22.09, както е показано:



Имайки предвид посоката по аналемата, отброяваме, че датите при самопресичането са **12.04** и **29.08**.

в) Първо, за да може кулминациите да се наблюдават на същата височина, трябва австралийката да се намира върху началния паралел¹. Преместването ѝ е в една посока, тоест то е по паралела само на изток или само на запад.

Нека за австралиеца Слънцето кулминира в конкретен час по универсално време (и съответно, час по гражданско време). За австралийката Слънцето ще кулминира в друг час по универсално време UT, зависещ от разликата в географските дължини между наблюдателите. Времовата разлика Δt в моментите на кулминация по UT се задава чрез

$$\Delta t = \frac{\Delta \lambda}{360^\circ} \times 24 \text{ h.}$$

За да може кулминациите да са по едно и също гражданско време, трябва тази разлика да е равна на разликата $\Delta t'$ в часовите пояси за двамата. Тъй като Δt е фиксирана² за две точки, а по условие равенството $\Delta t = \Delta t'$ важи през цялата година, трябва двамата да се намират в часови пояси, чиято разлика не се променя през годината. Паралелът $\varphi = 28^\circ \text{ S}$ преминава през часовите зони UT+8, UT+9.5/+10.5 и UT+10. Единствените възможни часови зони са UT+8 и UT+10, разделени от 2 часа. При това австралийците трябва да отстоят на $\Delta \lambda = (2/24) \cdot 360^\circ = 30^\circ$ един от друг по паралела.

Радиусът на паралела е $R_E \cos \varphi$, така че изминатото разстояние е

$$l_1 = \frac{\Delta \lambda}{360^\circ} 2\pi R_E \cos \varphi = \mathbf{3000 \text{ km} (2950 \text{ km})}.$$

г) Първо нанасяме положението A на Слънцето по аналемата на 17.02. На по-южното място при търсената дата трябва гражданското време на кулминация да е същото. Изглежда, че това налага уравнието на времето за въпросната дата да е същото като на 17.02. Пресичаме аналемата с вертикална линия през A и измерваме, че втората пресечна точка B отговаря на деклинация, която е с 4.0° по-ниска от тази на A . За да може тогава за австралиеца Слънцето да кулминира на същата височина като от Долината на емутата, той трябва да се премести на юг с 4.0° , което компенсира за разликата в деклинациите.

На пръв поглед това е завършено решение. Но не е така. Ако австралиеца се премести с 4.0° на юг, той ще премине от щат с часова зона UT+10 в щат с часова зона UT+10.5 (трябва да се спазва ЛЧВ³). При това гражданското време на кулминация в описаната по-горе точка на преместване няма да е същото като в началната точка, а ще е с 30 минути по-късно.

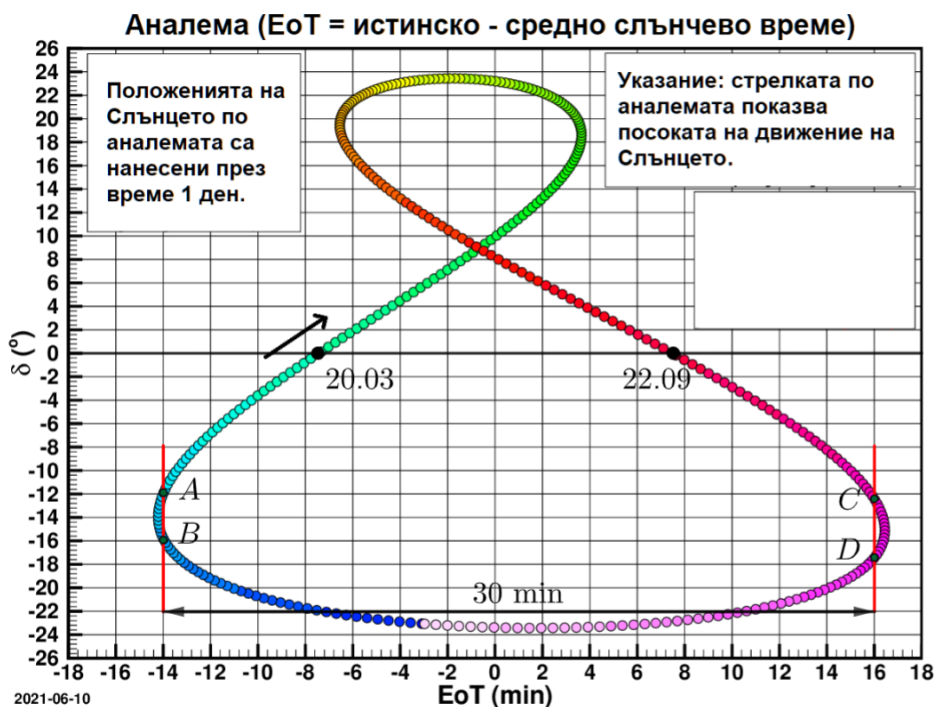
Няма вариант, в който при пътуването на юг оставаме в началната си часова зона – за да можеше това да стане, вертикалната линия през A трябваше да пресича аналемата за втори път при по-малка разлика в деклинациите, отколкото градусната разлика от началната точка до границата между Qld и SA.

Затова целим друго – в крайната точка на австралиеца уравнието на времето за търсената дата да е с 30 минути напред спрямо това на 17.02. Това означава на търсената дата истинското Слънце да кулминира с 30 минути по-рано спрямо 17.02. Ако тогава сме в лятно часово време (което ще проверим после), това ще се компенсира с 30-те минути разлика в часовите зони, давайки едно и също гражданско време на кулминация.

Построяваме вертикална линия на 30 минути напред от тази за A . Тя пресича аналемата в две точки, C и D . Австралиеца се движи на юг. Тогава за да има еднаква височина на кулминациите, австралиеца трябва да се премести с толкова градуса, колкото е разликата в деклинациите между A и C/D . При C отместването е твърде малко и часовият пояс не се променя, така че разглеждаме варианта с D . Разликата в деклинациите е 5.5° . Такова преместване по земното кълбо отговаря на

$$l_2 = \frac{5.5^\circ}{360^\circ} 2\pi R_E = 600 \text{ km.}$$

Остана да проверим, че когато Слънцето е в D , работим по ЛЧВ. Точката съответства на 10 ноември, така че това е изпълнено.



Стефан Иванов

¹ С пренебрежимо малко отместване на север или юг поради това, че между моментите на кулминация за наблюдателите Слънцето променя деклинацията си.

² Ако не отчитаме пренебрежимия ефект, че истинското слънчево денонощие променя стойността си през годината. Тук под „пренебрежим“ се има предвид, че той ще влияе малко на отговора за изминатото разстояние.

³ В противен случай при по-нататъшното решение бихме искали преместване по аналемата 30 минути в другата посока, което е невъзможно.

Критерии за оценяване (общо 15т.):

а) – За разпознаване на точката, където се случва описаното – 1т.

– За намиране на координатите – 1т.

– За намиране на датата – 2т. (1т. при ± 1 d)

б) – За разпознаване на мястото по аналемата – 1т.

– За ориентир по време върху аналемата – 1т.

– За верен отговор – 1т.

в) – За вярно формулирано условие за географските дължини – 1т.

– За конкретизиране на точните часови зони, в които се намират наблюдателите – 1т.

– За намиране на изминатото разстояние – 2т.

г) – За разбиране на основния метод (разлика в декл. = разлика в ширини, разсъждения за равенства при уравнение на времето) – 1т.

– За разбиране на 30-те минути разлика по аналемата, построения и отговор – 2т.

– За проверка дали в крайната точка се спазва ЛЧВ – 1т.

Задача 4. Планета около двойна звезда. Отношението на масите на компонентите в двойна звездна система е $M_2/M_1 = 0.7$ и разстоянието между тях не се променя. Планета обикаля около двойната звезда по външна орбита в орбиталната равнина на компонентите. От планетата редовно се наблюдават затъмнения на двете звезди една от друга. Главната компонента е по-гореща и по-голяма.

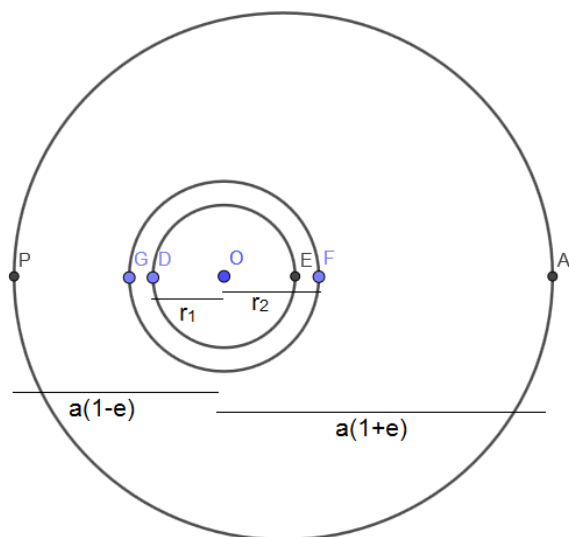
- А) Ярво оранжев и много любознателен жител на планетата прави измервания на двойната система. Главната компонента има един и същ ъглов размер, гледана от периастрий на планетата, когато вторичната транзитира пред нея, и гледана от апоастрий на планетата, когато тя затъмнява вторичната. Когато вторичната компонента транзитира пред главната, вторичната е с 10% по-голяма на ъглов размер, гледана от периастрий, отколкото гледана от апоастрий на планетата. Намерете ексцентрицитета на орбитата на планетата. [5 т.]
- Б) Ако двете звезди правят пълна обиколка една около друга за 6.35 d, а разстоянието между тях е 12.1×10^6 km, намерете през какъв период от време оранжевият астроном посреща Нова година. [4 т.]
- В) За земните наблюдатели системата е затъмнително двойна променлива звезда, а зрителният лъч от нас към нея лежи в орбиталната равнина на компонентите. Разликата между видимите звездни величини на променливата в главен и вторичен минимум е 0.33 mag. Ефективните температури на двете компоненти са $T_1 = 6030$ K и $T_2 = 4980$ K. Намерете отношението на радиусите на компонентите R_2/R_1 . [3 т.]

- Г) Каква ще е разликата в звездни величини между блясъка на двойната звезда при главното и вторичното затъмнение, за ярко оранжевия наблюдател от планетата в периастрий? [3 т.]

Справочни данни:

Гравитационна константа – $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Решение:



а) След като разстоянието между компонентите не се променя, те се движат по кръгови орбити около центъра на масите с радиуси r_1 и r_2 . При наблюдение на затъмнения от планетата, тя се намира на една права с двете звезди. Нека голямата полуос на орбитата на планетата около центъра на масите е a , а ексцентрицитетът е e . По време на транзитиране на вторичната компонента пред главната, гледано от периастрий (PGE на чертежа), разстоянието планета – главна компонента е $r_P + r_1$. По време на затъмнение на вторичната компонента от главната, гледано от апоастрий, (GEA на чертежа) разстоянието планета – главна компонента е $r_A - r_1$. След като ъгловите размери на главната компонента в двете положения са равни, двете разстояния са равни. Заместваме с a и e и получаваме:

$$a(1 - e) + r_1 = a(1 + e) - r_1,$$

$$\frac{r_1}{a} = e.$$

Когато вторичната компонента транзитира пред главната, гледано от периастрий (PGE на чертежа), разстоянието планета – вторична компонента е $r_P - r_2$. Когато вторичната компонента транзитира пред главната, гледано от апоастрий (DFA на чертежа), разстоянието планета – вторична компонента е $r_A - r_2$. За отношението на ъгловите размери на вторичната имаме:

$$\delta_P = 1.1\delta_A \Rightarrow \frac{2R_2}{r_P - r_2} = 1.1 \left(\frac{2R_2}{r_A - r_2} \right) \Rightarrow \frac{r_A - r_2}{r_P - r_2} = 1.1,$$

$$a(1 + e) - r_2 = 1.1(a(1 - e) - r_2),$$

$$\frac{r_2}{a} = 1 - 21e.$$

Разделяме почленно двата израза за r_1 и r_2 , получавайки

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{e}{1 - 21e}.$$

Но тъй като за двойната система е изпълнено

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1} = 0.7,$$

Имаме $\frac{e}{1 - 21e} = 0.7$. Решаваме и получаваме $e = \frac{7}{157} = 0.0446$.

б) Известно е, че разстоянието между звездите е $r_1 + r_2 = 12.1 \times 10^6 \text{ km}$. От III закон на Кеплер за двете звезди намираме масата на системата:

$$\frac{(r_1 + r_2)^3}{P_{12}^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} \Rightarrow M_1 + M_2 = 1.75 M_{\text{sol}}.$$

Щом като е вярно $\frac{r_2}{r_1} = \frac{M_2}{M_1}$, то $\frac{r_2+r_1}{r_1} = 1 + \frac{M_2}{M_1} = 1 + \frac{1}{0.7} = \frac{1.7}{0.7}$. Тогава

$$r_1 = \frac{0.7}{1.7}(r_1 + r_2) = 5.0 \times 10^6 \text{ km.}$$

Пресмятаме голямата полуос на планетата от израза $a = r_1/e$. Получаваме $a = 0.747 \text{ AU}$. От III закон на Кеплер за планетата намираме орбиталния ѝ период P :

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}.$$

Получаваме $P = 176 \text{ d}$.

в) Нека температурите на двете компоненти да са $T_1 = 6030 \text{ K}$ и $T_2 = 4980 \text{ K}$. Ако гледано от Земята разликата в звездните величини е 0.33 mag , можем да напишем закона на Погсън, използвайки светлинните потоци E_{T1} и E_{T2} , които двете компоненти биха създавали поотделно, и радиусите им R_1 и R_2 :

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{E_{T1} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right) + E_{T2}}{E_{T1}} = 0.33.$$

Тъй като двете компоненти са на равно разстояние от нас, отношението на потоците е равно на отношението на светимостите им L_1 и L_2 .

$$\left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right) + \frac{L_2}{L_1} = 10^{-0.4 \times 0.33}.$$

От Закона на Стефан-Болцман

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4.$$

Заместваме и решаваме за отношението на радиусите R_2/R_1 :

$$\left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 10^{-0.4 \times 0.33}.$$

Получаваме $R_2/R_1 = 0.70$.

г) За разликата в звездните величини на двете затъмнения, гледани от периастрий, можем да напишем подобен израз, с разликата, че този път отношението на ъгловите размери не е равно на отношението на радиусите и частта от видимата площ на главната компонента, която се наблюдава, е $\left(1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right)$.

$$\Delta m_p = -2.5 \lg \left(\frac{\frac{L_1}{(r_p + r_1)^2} \left(1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right) + \frac{L_2}{(r_p - r_2)^2}}{\frac{L_1}{(r_p - r_1)^2}} \right),$$

$$\Delta m_p = -2.5 \lg \left(\frac{(r_p - r_1)^2}{(r_p + r_1)^2} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{r_p + r_1}{r_p - r_2}\right]\right)^2\right) + \frac{L_2}{L_1} \frac{(r_p - r_1)^2}{(r_p - r_2)^2} \right),$$

$$\Delta m_p = -2.5 \lg \left(\frac{(r_p - r_1)^2}{(r_p + r_1)^2} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{r_p + r_1}{r_p - r_2}\right]\right)^2\right) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \frac{(r_p - r_1)^2}{(r_p - r_2)^2} \right).$$

В резултат $\Delta m_p = 0.64 \text{ mag}$.

Александър Куртенков

Редакция: Стефан Иванов.