

МАТЕМАТИЧЕСКИ ФОРМУЛИ

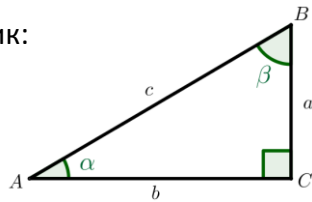
I. Ъгли и триъгълници

Тригонометрични функции и тъждества

В правоъгълен триъгълник:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$$



Функциите имат периодичност 2π .

Тъждества:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

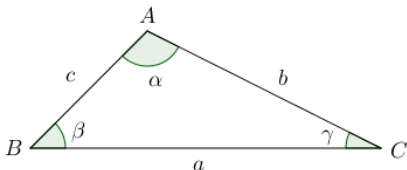
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Синусова теорема



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

(R – радиус на описаната окръжност)

Косинусова теорема

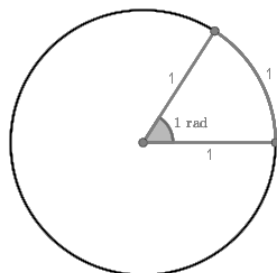
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

(и аналогично за страните a и b)

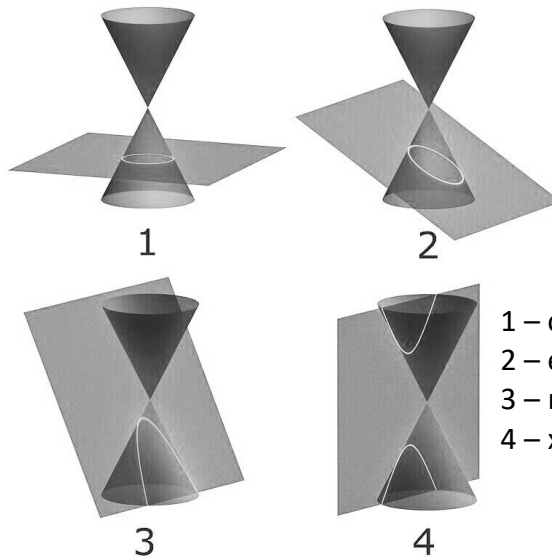
II. Конични сечения

Радан

Ъгълът, под който се вижда дъга с размер радиуса на окръжността:

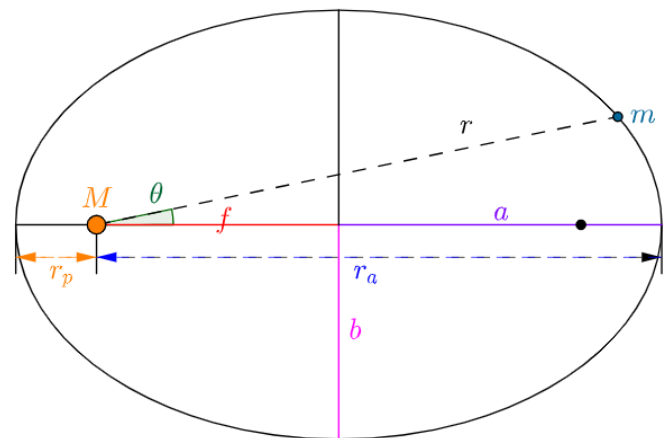
$$1 \text{ rad} = 180/\pi^\circ$$


Видове конични сечения



- 1 – окръжност ($e = 0$)
- 2 – елипса ($0 < e < 1$)
- 3 – парабола ($e = 1$)
- 4 – хипербола ($e > 1$)

Свойства на елипсата



На чертежа:

a – голяма полуос

b – малка полуос

f – фокусно разстояние

e – ексцентрицитет

$$e = \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

r_p, r_a – разстояния в перицентър и апоцентър

$$r_p = a(1 - e) \quad r_a = a(1 + e)$$

Уравнение за радиус-вектора:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

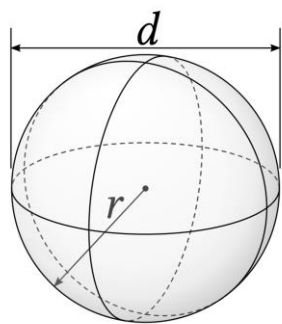
За всяка точка от елипса сборът от разстоянията до двата фокуса е $2a$.

Площ на елипса:

$$S = \pi ab$$

III. Триизмерни тела

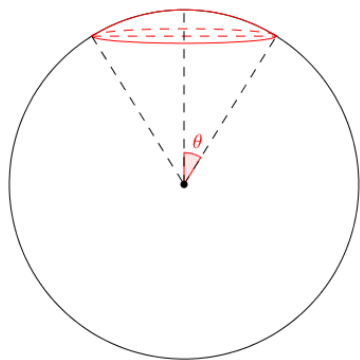
Повърхнина и обем на някои тела



сфера с
радиус r

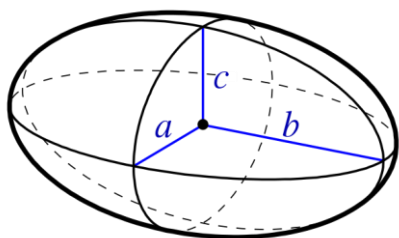
Площ на сфера: $S = 4\pi R^2$

Обем на сфера: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



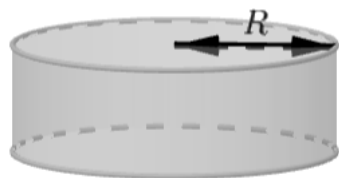
сферична шапка,
обхващаща ъгъл θ

Площ на сферична шапка: $S = 2\pi R^2(1 - \cos \theta)$



елипсоид с
оси a, b, c

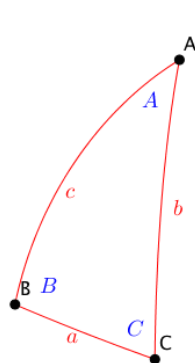
Обем на елипсоид: $V = \frac{4}{3}\pi abc$



цилиндър с
радиус R
и височина h

Обем на цилиндър: $V = \pi R^2 h$

Сферична тригонометрия



Синусова теорема:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Косинусова теорема:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Ъглова площ на сф. триъгълник

$$\sigma[\text{sr}] = A + B + C - \pi$$

IV. Логаритми

Дефиниции

$\log_b x$ – „логаритъм от x с основа b ”

Логаритъмът дава степента, на която b трябва да се повдигне, за да получим x . Например $\log_3 9 = 2$.

Логаритъм с основа 10 се записва накратко с $\lg x$. Например $\lg 1000 = 3$.

Логаритъм с основа e се записва накратко с $\ln x$.

($e \approx 2.718$ е Неперовото число, дефинирано като стойността на израза $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, когато n клони към безкрайност)

Тъждества

$$b^{\log_b(x)} = x$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b(x^d) = d \log_b x$$

$$\log_b(\sqrt[d]{x}) = \frac{\log_b x}{d}$$

Правило за смяна на основата (от b на d):

$$\log_b a = \frac{\log_d a}{\log_d b}$$

V. Приближения

Биномно приближение за $|x| \ll 1$:

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

За $|x| \ll 1$:

$$e^x \approx 1+x;$$
$$\ln(1+x) \approx x.$$

За малки ъгли (при x в радиани):

$$\sin x \approx x;$$
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2};$$
$$\tan x \approx x.$$

VI. Производни*

Производни на някои функции

При a, n – ненулеви константи:

$$\frac{d}{dx}(a) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x$$
$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Правила при диференциране

За функции $f(x), g(x)$:

$$\frac{d}{dx}(af) = a \frac{d}{dx}(f)$$
$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{d}{dx}(f) \pm \frac{d}{dx}(g)$$
$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{d}{dx}(g) + g \frac{d}{dx}(f)$$

Производна на функцията от функция $h(g(x))$:

$$\frac{d}{dx}(h(g(x))) = \frac{dh(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

* материал извън програмата на олимпиадата

ФИЗИЧНИ КОНСТАНТИ

Гравитационна константа:

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Скорост на светлината:

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Константа на Стефан-Болцман:

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Константа на Вин:

$$b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}$$

Число на Авогадро:

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Газова константа:

$$R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Константа на Болцман:

$$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Маса на протона:

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Маса на електрона:

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Константа на Хъбъл:

$$H = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

СПРАВОЧНИ ДАННИ

Разстояния

Астрономическа единица:

$$1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$

Светлинна година:

$$1 \text{ ly} = 9.461 \times 10^{15} \text{ m}$$

Парсек:

$$1 \text{ pc} = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} \text{ AU} \approx 206265 \text{ AU} \\ \Rightarrow 1 \text{ pc} = 3.26 \text{ ly} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$$

Данни за Земята

Среден радиус – 6371 km

Екваториален радиус – 6378 km

Полярен радиус – 6357 km

Маса – $5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$

Звездно денонощие – 23 h 56 m 04 s

Атмосфера – 78% N₂, 21% O₂

Период на прецесия около оста – 26000 yr

Голяма полуос – 1 AU

Ексцентрицитет – 0.017

Звездна година – 365.2564 d

Тропическа година – 365.2422 d

Перихелий ≈ 04.01 ; Афелий ≈ 04.07

Данни за Луната

Радиус – 1738 km

Маса – $7.348 \times 10^{22} \text{ kg}$ ($\approx \frac{1}{81} M_E$)

Голяма полуос – 384400 km

Ексцентрицитет – 0.055

Сидеричен период – 27.32 d

Синодичен период – 29.53 d

Орб. наклон спрямо еклиптиката – 5°9'

Период на прецесия на орбитата – 18.6 yr

Визуална зв. величина (пълнолуние) – -12.7^m

Визуална зв. величина (в четвърт) – -10.5^m

Данни за Слънцето

Радиус – 696000 km

Маса – $1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$

Светимост – $3.86 \times 10^{26} \text{ W}$

Ефективна температура – 5800 K

Визуална зв. величина – -26.78^m

Абсолютна болометрична
звездна величина – $+4.72^m$

Поток в целия спектър на разстояние 1 AU
(слънчева константа) – 1370 W/m^2

Поток във видимата област на спектъра на
разстояние 1 AU – 600 W/m^2