

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
КОМИСИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XXI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

IV кръг, 15 юли 2018 г., х. Бузлуджа, практически тур

Старша възраст – решения

Задача 1. Три етюда. Задачата се състои от три кратки независими части.

- А) В таблицата са представени наблюдения на астероида 1676 Kariba във филтър R . Постройте неговата крива на блясъка с юлиански дни (JD) по оста на времето. Определете периода на околоосно въртене на астероида.

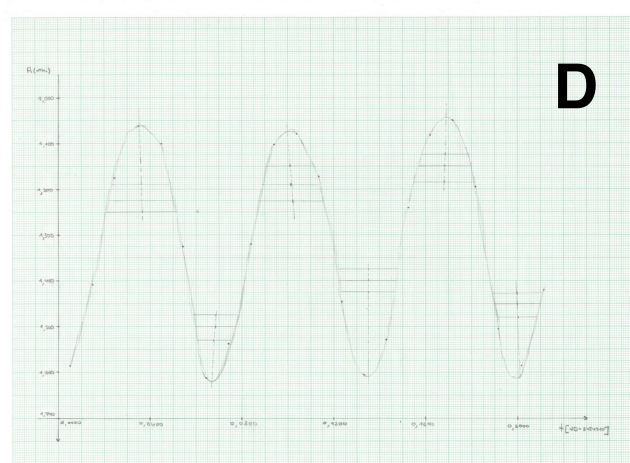
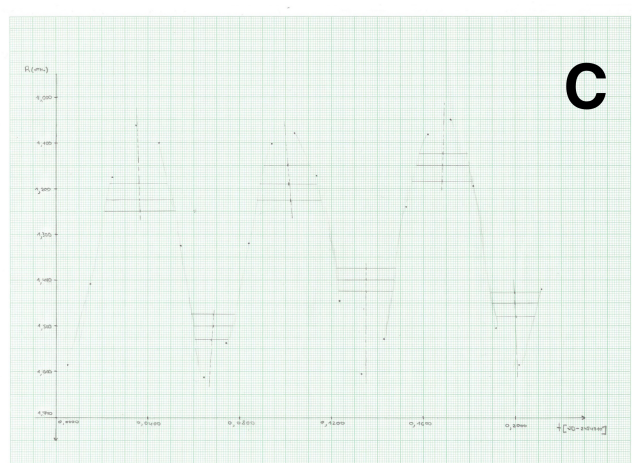
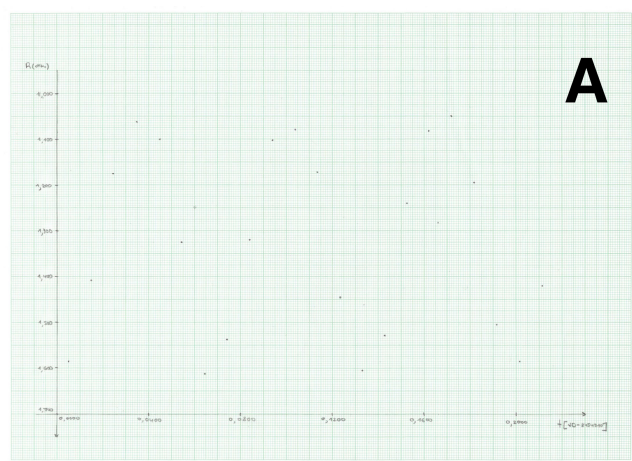
JD	R (относителна)	JD	R (относителна)
2454910.0050	1.585	2454910.1136	1.172
2454910.0148	1.408	2454910.1234	1.446
2454910.0245	1.175	2454910.1330	1.604
2454910.0347	1.062	2454910.1427	1.529
2454910.0447	1.101	2454910.1523	1.239
2454910.0544	1.324	2454910.1619	1.082
2454910.0644	1.612	2454910.1718	1.050
2454910.0742	1.537	2454910.1817	1.196
2454910.0841	1.320	2454910.1916	1.505
2454910.0939	1.103	2454910.2015	1.585
2454910.1038	1.079	2454910.2115	1.420

- Б) Снимката на стр. 10 е направена от спътник по кръгова орбита около Земята. Оценете орбиталния му период. Може да използвате приближенията за малки ъгли за ъгловите размери на Земята и Луната. Коментирайте накратко върху източниците на грешка в крайния резултат.
- В) Първото сравнително точно определяне на периода на околоосно въртене на Меркурий е станало едва през 1965 г. с помощта на радиотелескопа в Аресибо. Тук ще разгледаме метода, по който периодът е получен. Към Меркурий се насочва сноп радиовълни с честота $\nu_0 = 430$ MHz. Радиовълните се отразяват от Меркурий обратно към Земята, но тъй като планетата не е точков обект, отделните радиовълни пристигат обратно по различно време. Ще бележим с $\Delta t = 0$ момента, в който на Земята се засичат първите отразени от Меркурий радиовълни. На стр. 11 е даден спектърът на отразения сноп за различни Δt , като по хоризонталата е нанесено изменението на честотата спрямо ν_0 . Получете усреднена стойност за периода на околоосно въртене на Меркурий. При каква взаимна конфигурация на Меркурий и Земята са получени спектрите?
Упътване: При някои Δt отношението сигнал към шум (Signal-to-noise ratio) е малко. Правете измерванията по спектрите особено внимателно! Наклона на оста на Меркурий спрямо еклиптиката приемете за нула. Спектрите са коригирани за околоосно въртене на Земята.

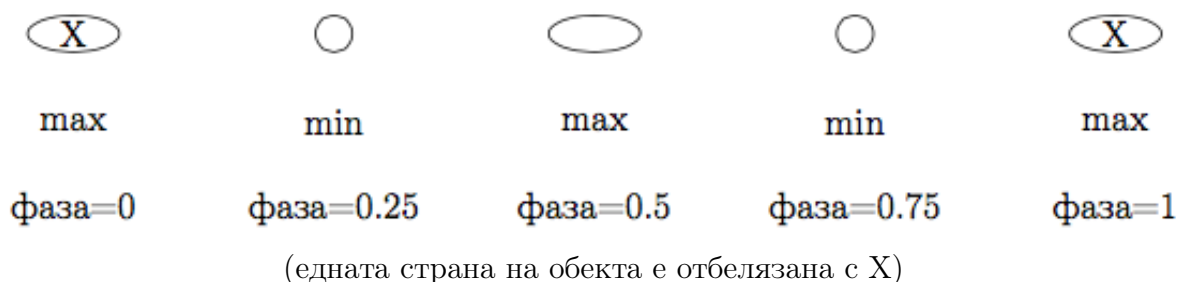
Решение:

А) Нанасяме данните в таблицата като точки от кривата на блясъка. С прокарване на плавна линия между точките може да определим положението на минимумите и максимумите по кривата. В нашия случай обаче точките са малко и резултатът няма да бъде достатъчно точен. За да постигнем необходимата точност, ще се възползваме от метода на хордите. До всеки максимум или минимум построяваме по няколко хорди, успоредни на времевата ос и имащи краища по кривата на блясъка. Взимаме средите на хордите и прекарваме права

през средите. Тя ще пресича кривата там, където има максимум или минимум. Имайки това предвид, може да "завършим" кривата на блясъка (вж. графиките).



Получената в резултат крива остава твърде неточна за намиране на правдоподобна стойност на амплитудата на блясъка на астероида, но периодът на околоосно въртене все пак може да бъде определен. При това е важно да се съобрази, че търсеният период е не времевият интервал между два съседни максимума на кривата, а два пъти този интервал. Това се онагледява с например такава схема на въртенето на елипсоидален обект:



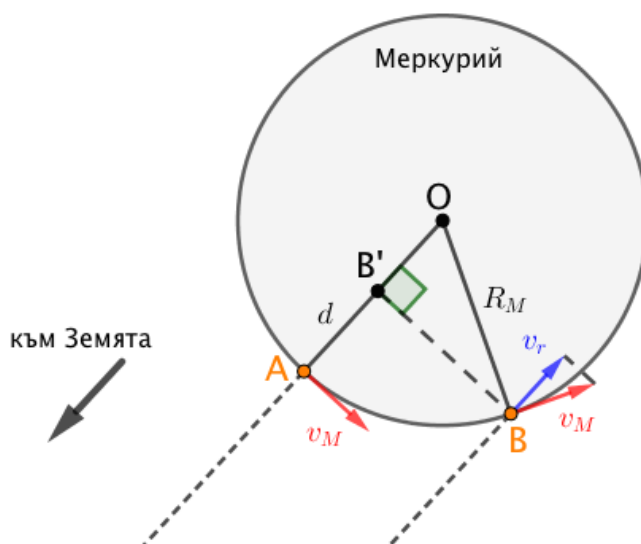
На графиката измерваме времето между два максимума, прескачайки този по средата. Също измерваме времето между два минимума, прескачайки средния минимум. И двата пъти имаме един и същ резултат, $T = 0,134 \text{ d}$, така че няма да се налага усредняване. *Този отговор е верен с точност до 3 минути.*

Б) За ъгловите радиуси на Земята и Луната δ_E и δ_L е вярно $\sin \delta_E = \frac{R_E}{r_E}$ и $\sin \delta_L = \frac{R_L}{r_L}$, където r_E е разстоянието спътник-Земя и r_L е разстоянието спътник-Луна. За малки ъгли $\sin x \approx x$, т.е. $\frac{r_L}{r_E} = \frac{\delta_E R_L}{\delta_L R_E}$. За да намерим отношението на ъгловите радиуси на Земята и Луната, трябва да намерим на колко милиметра съответстват размерите на Луната и Земята на снимката.

Основните причини за грешката в T_E са две. Първо, разстоянието между Земята и Луната при направата на снимката не е равно на голямата полуос на лунната орбита. И второ, относителната грешка при измерването на b е значителна. Има и други начини за определяне на ъгловия радиус на Земята на снимката (например, чрез измерване на ъгъла между две допирателни по земния лимб), но те са още по-неточни. *Всъщност, спътникът под въпрос е GOES-16, а той е геостационарен. Голямата грешка в орбиталния период не идва от приближението за малък ъгъл – то дава около 0,3 процента относителна грешка за ъгловия размер на Земята.*

В) Причините за промяната в честотата на отразените вълни са две. Първо, при орбиталното си движение Меркурий има лъчева скорост спрямо Земята и поради това се наблюдава ефект на Доплер. Второ, точките, които отразяват радиовълните, имат собствена скорост, тъй като участват в околоосното въртене на Меркурий. Ако тази собствена скорост има лъчева компонента, ефектът на Доплер отново влияе.

Предварително да запишем формулата за ефекта на Доплер във вид, съдържащ не дължини на вълните, а честоти. В $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$ (λ е измерена дължина, λ_0 е лабораторна дължина, v е лъчева скорост) заместваме с измерената честота $\nu = c/\lambda$ и лабораторната честота $\nu_0 = c/\lambda_0$, получавайки $\frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{v}{c}$.



На чертежа е показан Меркурий с две точки по неговия екватор. Точка A е първата, до която достигат радиовълните и съответно първата, която ги отразява. Скоростта на околоосно въртене при тази точка няма лъчева компонента, така че спектърът за $\Delta t = 0$ е отместен единствено поради орбиталната скорост на Меркурий. Забелязваме, че става дума за отместване от около половин херц при оригинална честота стотици мегахерци. Това означава, че лъчевата компонента на орбиталната скорост на планетата е изключително малка, близка до нула. Това се изпълнява при съединение. По-конкретно, това трябва да е долно съединение. В противен случай радиовълните от излъчването на Слънцето биха били сериозна пречка за наблюденията (отношението сигнал към шум е така или иначе малко).

Лъчите, отразени към Земята от точка B, трябва да изминат допълнително разстояние $2d = 2AB'$ спрямо това, изминато от отразените от A лъчи. С други думи, B-лъчите ще се засекат време $\Delta t = \frac{2d}{c}$ след началния момент. Лъчевата скорост v_r при B ще се дава с $v_r = v_M \cos \beta$, където v_M е скоростта на околоосно въртене на Меркурий, а β е ъгълът между векторите v_r и v_M . За него е вярно $\cos \beta = BB'/BO = \sqrt{2R_M d - d^2}/R_M$.

Нека v_r води до отместване в честотата $\Delta \nu = \nu - \nu_0$. Тогава $\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{2v_r}{c}$. Лъчевата скорост е удвоена, защото ефектът на Доплер действа два пъти – радиовълните придобиват различна честота, гледано от B, а тази честота се "отмества" поради движението на B, гледано от Земята. Така практически $v_r = \frac{\Delta \nu c}{2\nu_0}$ (защото $\nu_0 \approx \nu$). При всеки спектър има два пика, (много грубо казано) симетрични спрямо този от $\Delta t = 0$. Ако измерим разликата в честотите между тях, ще имаме приблизително $2\Delta \nu$. Тъй като за всеки спектър имаме и изминалото време Δt

в микросекунди, с описаните дотук формули може да намерим v_M . Резултатите са обобщени в таблица, като в междинните пресмятания е работено с повече значещи цифри, отколкото тук е показано:

спектр	$\Delta\nu$ [Hz]	d [km]	v_M [m/s]
2	1,13	18,0	3,26
3	1,40	31,5	3,04
4	1,78	45,0	3,25
5	2,12	58,5	3,40

Ако усредним резултатите за v_M и използваме, че $v_M = \frac{2\pi R_M}{T_M}$, където T_M е периодът на околоосно въртене на Меркурий, ще получим в резултат $T_M \approx 55 \text{ d}$. Авторите на съответната научна статия получават за периода 59 ± 3 дни.

Задача 2. Нови хоризонти. На 14 юли 2015 г. космическият апарат New Horizons прелетя само на около 10000 километра от планетата-джудже Плутон. Но още месеци преди това апаратът направи няколко поредици от снимки на Плутон и неговия най-голям спътник Харон. На страници 12 и 13 са представени 9 изображения на системата Плутон-Харон, направени с уреда MVIC на борда на апарата. На всяко изображение с кръстче е отбелязан центърът на масите на системата, а също са надписани моментът на направа на снимката по универсално време и моментното разстояние до Плутон. Всички изображения са с еднакъв мащаб (мм/px) освен последното, което е увеличено точно два пъти. Ефективното фокусно разстояние на оптичната система на MVIC е 658 мм, а размерът на пиксела на CCD матрицата е 13 микрона.

- А) Постройте с възможно най-голяма точност относителната орбита на Харон около Плутон и по това определете масата на Плутон. Използвайте, че за всички снимки радиусът на относителната орбита е много по-малък от разстоянието до Плутон.

Малко след максималното доближаване до Плутон апаратът New Horizons влиза в неговата сянка, при което се наблюдава окултация на Слънцето от Плутон. Траекторията на апарата всъщност е избрана така, че тази окултация да е централна. Размерът на сянката на Плутон на мястото на New Horizons може да се приеме за равен на радиуса на Плутон.

На страница 14 е дадена е крива на блясъка на Слънцето в ултравиолетовия диапазон, получена от спектрометъра Alice по време на окултацията. За нулев момент от време е приета нейната среда.

- Б) В последния месец от своя път New Horizons на практика се движи по права линия и с постоянна скорост. Тъй като това е малък интервал от време, същото може да се приеме и за движението на Плутон по орбитата. Гледано от Плутон, оценете с точност до градус ъгловото отстояние между Слънцето и New Horizons в момента на направа на снимките на MVIC.

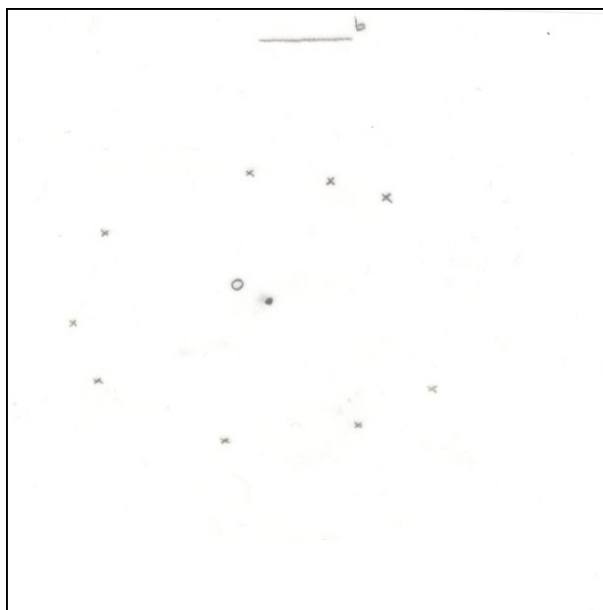
Решение:

А) Предварително отбелязваме, че междинните пресмятания ще правим с брой значещи цифри, несъответстващ на този от справочните данни. Целта на това е да се избегне загубата на точност в крайния резултат, който накрая ще бъде закръглен подходящо.

Ще построим относителната орбита на Харон, използвайки предоставеното ни листче оризова хартия. Предварително начертаваме върху него права линия **b**, например в ъгъла. По-нататък тази линия ще послужи за ориентир.

В центъра на листчето отбелязваме точка **O**, която ще показва положението на Плутон. Сега върху всяка снимка на MVIC нанасяме оризовата хартия така, че точката **O** да съвпада с мястото на Плутон в снимката, и така, че линията **b** винаги да остава успоредна на ръбовете на листа със снимките. След като всичко това е направено, внимателно прерисуваме върху оризовата хартия положението на Харон, което виждаме. Повтаряме тази процедура общо девет пъти, но за последната снимка предварително трябва да "намалим" разстоянието

Плутон-Харон двойно. За целта върху снимка 9 нанасяме точка върху отсечката Плутон-Харон, намираща се точно по средата. Там би се намирал Харон на снимка 9, ако мащабът ѝ беше същият, както на останалите осем снимки. На оризовата хартия ще прерисуваме именно това положение.

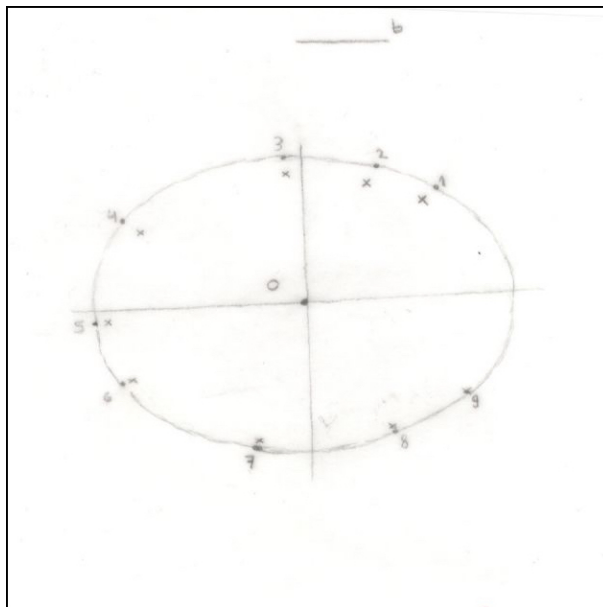


Ако сега свържем с плавна линия деветте положения **X** на Харон по листчето, това няма да даде точно относителната орбита на спътника. Това е така, защото разстоянието между New Horizons и планетата-джудже е различно на всяка от снимките, тоест ъгловите размери и мащабите [km/rad] по изображенията непрестанно се изменят! За да внесем корекция, е достатъчно да приравним с мащаба на една от снимките. Нека това е последната, тъй като при това относителната орбита по листчето ще е най-голяма.

Тук обясняваме същността на корекцията за снимка 2, но методът ще е еднакъв и при останалите изображения. На оризовата хартия разстоянието между **O** и Харон (снимка 2) е 18,0 мм. Разстоянието от апарата до Плутон тогава е 54,4 милиона километра. В момента на последната снимка то е 49,2 милиона километра. Отношението между двете разстояния е около 1,106. Това ще бъде коефициентът, по който трябва да умножим 18,0 мм, така че да получим милиметрите, които щяхме да измерим, ако ситуацията от снимка 2 беше заснета в момент, когато разстоянието Плутон-New Horizons е 49,2 милиона километра. На оризовата хартия по лъча, свързващ **O** и Харон (снимка 2), нанасяме отсечка с размер $1,106 \times 18,0 = 19,9$ мм. Отбелязваме точката **2**, която е край на тази отсечка.



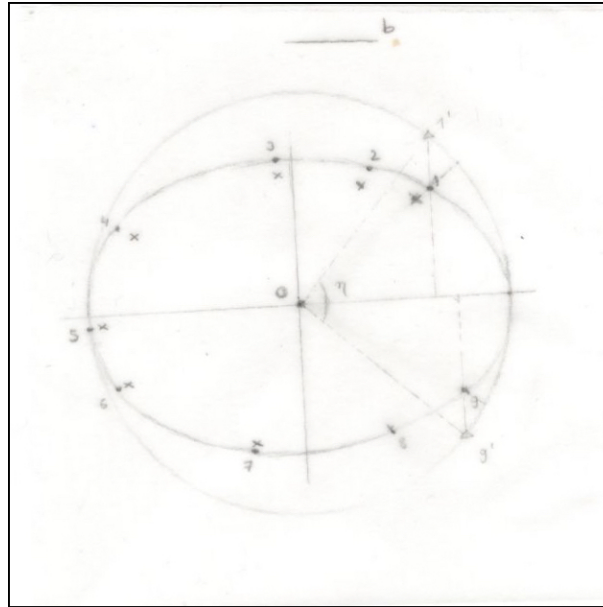
По аналогичен начин получаваме девет такива точки. Очакваме относителната орбита на Харон да е елипса, защото кръгова орбита под наклон се проектира именно в това. Но само с девет точки е трудно веднага да се посочи къде е голямата полуос на елипсата. В нашия случай е по-лесно да се идентифицира малката полуос. Изчертаваме плавно частите на елипсата около краищата на малката полуос, за да посочим полуоста точно. Правим това и ползваме, че голямата полуос е перпендикулярна на малката. На този етап имаме достатъчно ориентири, за да свържем точките правдоподобно, получавайки относителната орбита.



Означаваме размера на пиксела на CCD матрицата на MVIC с x , а фокусното разстояние на MVIC с F . Тогава ако един пиксел обхваща ъглов размер δ_0 , ще е вярно $\delta_0[\text{rad}]F = x$. Така получаваме $\delta_0 = 1,976 \times 10^{-5} \text{ rad}$. От снимка 9 измерваме, че 7 px съответстват на $19,25 \text{ mm}^1$, тоест на $9,625 \text{ mm}$ по всички останали снимки (и по оризовата хартия). Затова по листчето оризова хартия имаме мащаб $1,437 \times 10^{-5} \text{ rad/mm}$. Голямата полуос на елипсата по листчето е $28,0 \text{ mm}$, което като ъглов размер е $4,023 \times 10^{-4} \text{ rad}$. Ако умножим това по разстоянието до Плутон, $49,2$ милиона километра, ще получим стойността на радиуса на относителната орбита. Този радиус е $r = 19790 \text{ km}$.

Сега ще определим и орбиталния период на системата Плутон-Харон. По текста на MVIC-снимките пресмятаме, че от положение **1** до положение **9** по орбитата са изминали общо $112 \text{ h } 50 \text{ m}$. Този интервал от време, събран с неизвестния интервал от **9** до **1**, дава целия орбитален период. За наблюдателя движението от **9** до **1** представлява движение по елипса, въпреки че по същество то е движение по окръжност. За да намерим на какъв участък от цялата окръжност реално съответства придвижването от **9** до **1**, е достатъчно да "изправим" елипсата до кръг, тоест да си я представим, погледнато фронтално.

¹Не е използван шублер – човешкото око може да измерва с точност, забележимо по-голяма от $1/2 \text{ mm}$.



Точките **1** и **9**, се проектират в **1'** и **9'**, както е показано. А ъгълът между тях е $\eta = 92^\circ$. Ако означим целия орбитален период с T , то придвижването от **9** до **1** съответства на време $\frac{92}{360}T$. Но тогава

$$112 \text{ h } 50 \text{ m} + \frac{92}{360}T = T,$$

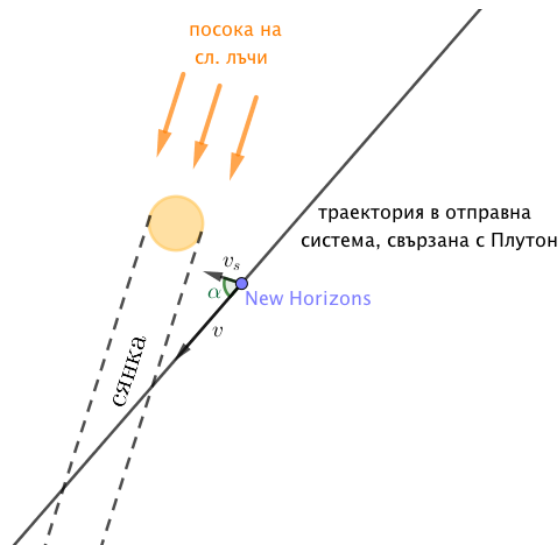
с което $T = 6,315 \text{ d}$. Ако означим общата маса на Плутон и Харон с M , според по третия закон на Кеплер ще е изпълнено

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}.$$

Получаваме като отговор $M = 1,541 \times 10^{22} \text{ kg}$. По снимка 9 намираме отношението на разстоянията до центъра на масите за Плутон и Харон. Получаваме 6,5 към 42,5. Това ще бъде и отношението на масата на Харон към масата на Плутон. И за масата на Плутон окончателно имаме $M_P = \frac{42,5}{49}M = 1,336 \times 10^{22} \text{ kg}$. Предвид точността на началните данни и точността на измерванията, отговора закръгляме до $M_P \approx 1,3 \times 10^{22} \text{ kg}$. *Истинската маса на Плутон е $1,303 \times 10^{22} \text{ kg}$.*

Б) И при Плутон, и при New Horizons движението е по права линия и с постоянна скорост. Това означава, че в отправна система, в която Плутон е неподвижен, New Horizons отново ще се движи с постоянна скорост и по права линия. Във въпросната отправна система сянката на Плутон също ще приемем за неподвижна, тъй като линейната ѝ скорост близо до Плутон е практически равна на самата орбитална скорост на планетата-джудже.

Първо да намерим скоростта на New Horizons в отправна система, свързана с Плутон. За 110 h 50 m апаратът изминава $54,8 - 49,2 = 5,6$ милиона километра. За скоростта му получаваме $v = 14,0 \text{ km/s}$. Може да получим и скоростта v_s , с която апаратът преминава през сянката на Плутон. На графиката по оста на времето 2000 s съответстват на 178,0 мм. Периодът на окултацията съответства на 58,5 мм, тоест на $\Delta t = 657 \text{ s}$. Тогава търсената скорост е $v_s = \frac{2R_P}{\Delta t} = 3,6 \text{ km/s}$.



Направеното дотук позволява да намерим ъгъла β , под който New Horizons навлиза в сянката. Съгласно чертежа $\cos \alpha = v_s/v$, а $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 15,0^\circ$. Ъгълът апарат-Плутон-Слънце непрестанно се мени, но с отдалечаването на New Horizons назад по траекторията, този ъгъл клони към β . Така търсения в задачата ъгъл оценяваме именно на $\boxed{\beta \approx 15^\circ}$ (за един месец апаратът всъщност изминава огромно разстояние – около 36 милиона километра). *Реалната стойност на ъгъла е $14,80^\circ$.*

Справочни данни:

Гравитационна константа – $\gamma = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Маса на Земята – $M_E = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$

Голяма полуос на лунната орбита – $r = 384400 \text{ km}$

Радиус на Земята – $R_E = 6378 \text{ km}$

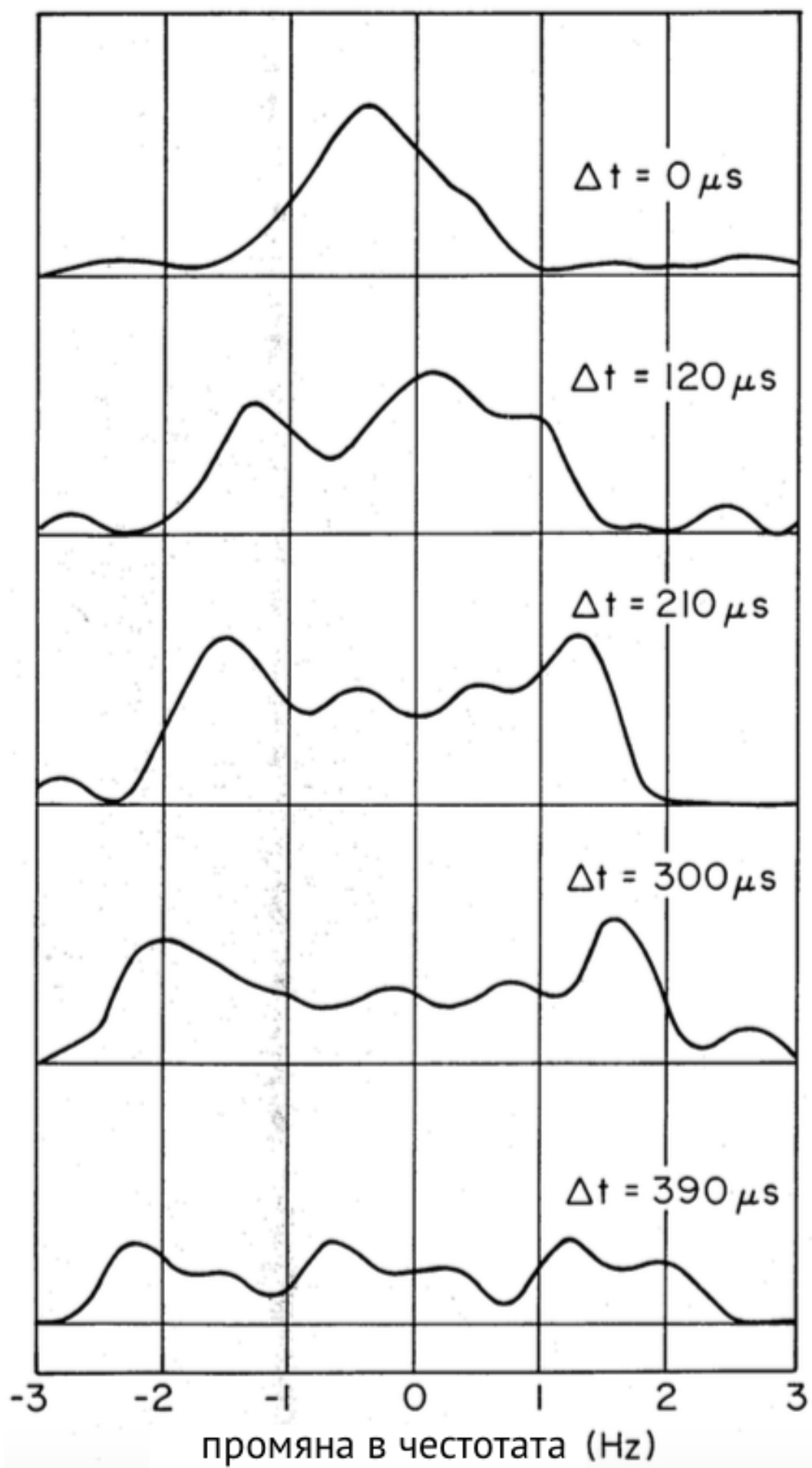
Радиус на Луната – $R_L = 1738 \text{ km}$

Радиус на Меркурий – $R_M = 2440 \text{ km}$

Радиус на Плутон – $R_P = 1188 \text{ km}$

Скорост на светлината – $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$



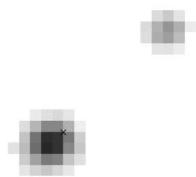


New Horizons MVIC Color Imager

Distance from Pluto: 54.8 million km

Date: 2015-05-29 11:38 UTC

Barycentric view



New Horizons MVIC Color Imager

Distance from Pluto: 54.4 million km

Date: 2015-05-29 18:34 UTC

Barycentric view



New Horizons MVIC Color Imager

Distance from Pluto: 53.9 million km

Date: 2015-05-30 05:50 UTC

Barycentric view



New Horizons MVIC Color Imager

Distance from Pluto: 52.9 million km

Date: 2015-05-31 01:21 UTC

Barycentric view



New Horizons MVIC Color Imager

Distance from Pluto: 52.1 million km

Date: 2015-05-31 18:44 UTC

Barycentric view



New Horizons MVIC Color Imager

Distance from Pluto: 51.5 million km

Date: 2015-06-01 06:03 UTC

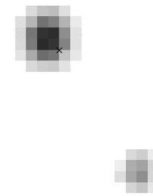
Barycentric view



New Horizons MVIC Color Imager
Distance from Pluto: 50.5 million km
Date: 2015-06-02 01:28 UTC
Barycentric view



New Horizons MVIC Color Imager
Distance from Pluto: 49.7 million km
Date: 2015-06-02 18:12 UTC
Barycentric view

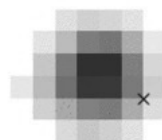


New Horizons MVIC Color Imager

Distance from Pluto: 49.2 million km

Date: 2015-06-03 04:28 UTC

Barycentric view



Alice – окултация на Слънцето

