

Заключительный этап: практический тур

Условия, решения и схема оценивания. 9 класс

Содержание

9.7. Жил на свете добрый жук	2
9.8. Светит мазер, светит ясный... ..	5
9.9. Пролетела	9

9.7. Жил на свете добрый жук

Е. Н. Фадеев

В таблице приведены результаты наблюдений визуально-двойной звезды: порядковый номер и дата наблюдения, угловое расстояние между компонентами ρ и позиционный угол менее яркого компонента γ (откладывается от направления на север к востоку). Известно, что параллакс двойной равен $0.133''$, а масса большего компонента равна 1.5 массы Солнца. Система координат соответствует эпохе J2000.0.

1. На листе миллиметровой бумаги постройте видимую орбиту менее яркого компонента относительно более яркого так, как она видна на небе;
2. Определите период обращения (в годах), большую полуось (в астрономических единицах), эксцентриситет и наклон плоскости орбиты к картинной плоскости, а также массу меньшего компонента (в массах Солнца).

№	Дата	$\rho, ''$	$\gamma, ^\circ$	№	Дата	$\rho, ''$	$\gamma, ^\circ$
1	29.09.1902	3.4	55.6	9	29.01.1950	5.8	284.0
2	10.12.1905	2.8	68.3	10	04.10.1957	6.2	292.0
3	18.11.1910	1.8	105.2	11	22.11.1972	6.7	305.4
4	20.10.1913	1.5	148.0	12	18.10.1978	6.8	310.2
5	01.10.1919	2.4	217.1	13	04.11.1992	7.0	321.1
6	26.08.1923	3.1	236.1	14	25.10.2001	7.0	327.9
7	14.01.1929	4.0	251.9	15	11.12.2003	7.0	329.5
8	17.11.1933	4.5	261.8	16	07.11.2024	6.8	345.5

Решение. Нанесем на миллиметровую бумагу точку S_1 — положение более массивной звезды. Поскольку позиционный угол отсчитывается от направления на север, направим полярную ось вверх. Тогда на рисунке восток окажется справа, то есть позиционный угол надо откладывать против часовой стрелки.

Отметив все 16 положений второй звезды, обнаруживаем, что ее траектория представляет окружность (рис. 1). Однако точка S_1 располагается заметно в стороне от центра окружности O . Если бы мы видели движение по круговой орбите, расположенной в картинной плоскости, то S_1 находилась бы в центре окружности. Раз этого не происходит, остается сделать вывод, что действительная орбита эллиптическая, но она наклонена к картинной плоскости так, что проекция большой оси совпадает по величине с малой осью. Проекция фокуса орбиты S_1 оказывается на отрезке, соединяющем точки 4 и 14, то есть этот отрезок — проекция большой оси орбиты.

Нарисуем орбиту и ее проекцию сбоку (рис. 2). При проецировании апоастр орбиты Q переходит в точку 14, периастр P — в точку 4, фокус F в точку S_1 . Поскольку отрезок FS_1 параллелен отрезку $P4$, отсекаемые ими отрезки на орбите и ее проекции будут пропорциональны. Проще всего на чертеже измерить расстояния между точками S_1 и 4 и точками 4 и 14. Обозначим их соответственно как x и y . Тогда

$$\frac{x}{y} = \frac{r_p}{2a} = \frac{a(1-e)}{2a} = \frac{1-e}{2} \Rightarrow e = 1 - 2\frac{x}{y} \approx 0.65.$$

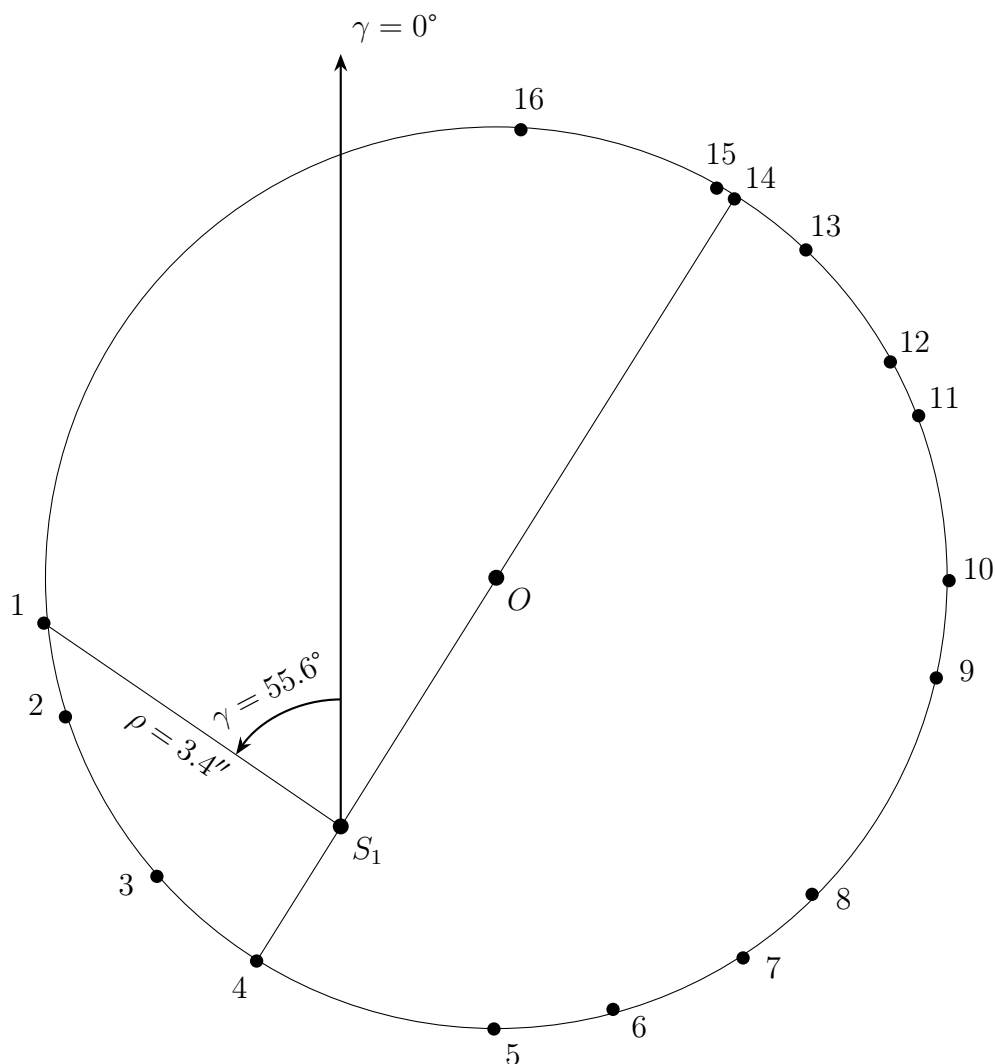


Рис. 1: Видимая орбита двойной звезды.

В точках 4 и 14 вторая звезда проходит периастр и апоастр своей орбиты. Время между этими событиями равно половине орбитального периода звезды. Наблюдения проводились почти точно с интервалом в 88 лет, поэтому искомый период равен $P = 176$ лет.

Из рисунка 2 видно, что наклон плоскости орбиты к картинной плоскости i равен

$$i = \arccos \frac{b}{a} = \arccos \frac{a\sqrt{1-e^2}}{a} = \arccos \sqrt{1-e^2} \approx 40^\circ.$$

Зная параллакс двойной π'' , легко найти расстояние до нее:

$$D = \frac{1}{\pi''} \approx 7.5 \text{ пк.}$$

Тогда величина малой полуоси орбиты в линейной мере

$$b = \frac{\rho_4 + \rho_{14}}{2} D = \frac{1.5'' + 7''}{2} \cdot 7.5 \text{ пк} \approx 32 \text{ а. е.}$$

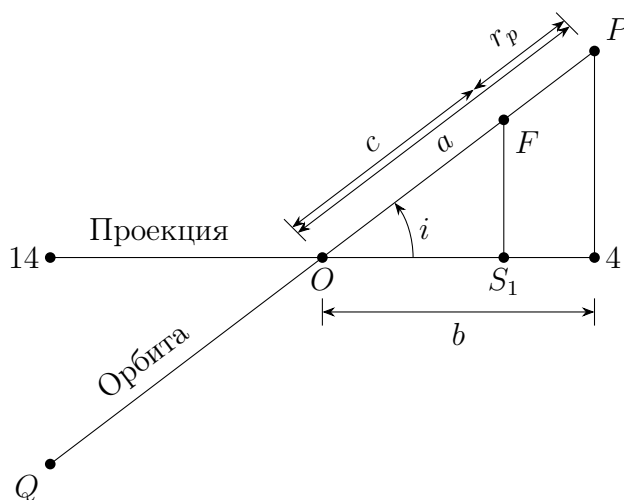


Рис. 2: Проекция орбиты.

Здесь ρ_4 и ρ_{14} — расстояния до соответствующих точек из таблицы в условии. Величина большой полуоси равна

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{32 \text{ а. е.}}{\sqrt{1 - 0.65^2}} \approx 42 \text{ а. е.}$$

Зная большую полуось и период обращения, можно определить сумму масс компонент с помощью третьего закона Кеплера:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_\odot} = \frac{a^3}{1 \text{ а. е.}^3} \cdot \frac{1 \text{ год}^2}{P^2} \approx 2.39.$$

Тогда масса второго компонента равна $M_2 = 2.39M_\odot - 1.5M_\odot = 0.89M_\odot$.

9.8. Светит мазер, светит ясный...

В. Б. Игнатьев, М. В. Кузнецов

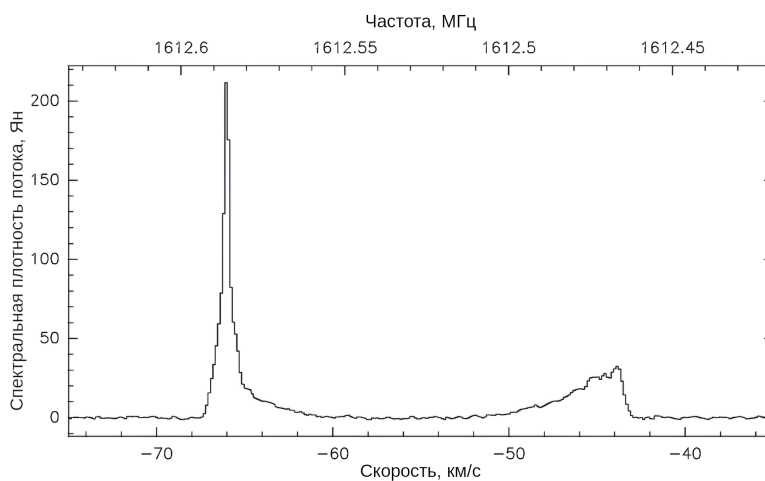
В газопылевых оболочках, окружающих звезды-гиганты на поздних стадиях эволюции, иногда наблюдаются источники мазерного излучения. В этой задаче мы не будем касаться природы мазеров: важно, что каждый отдельный мазер можно считать точечным объектом, а его излучение — монохроматическим. Мазеры концентрируются в тонких сферических оболочках, радиусы которых много больше размеров фотосферы звезды. Источником энергии для мазеров является излучение звезды: переменность звезды приводит к переменной яркости мазеров.

Вам предоставлены графики, полученные при исследовании области $\text{OH}127.8 + 0.0$:

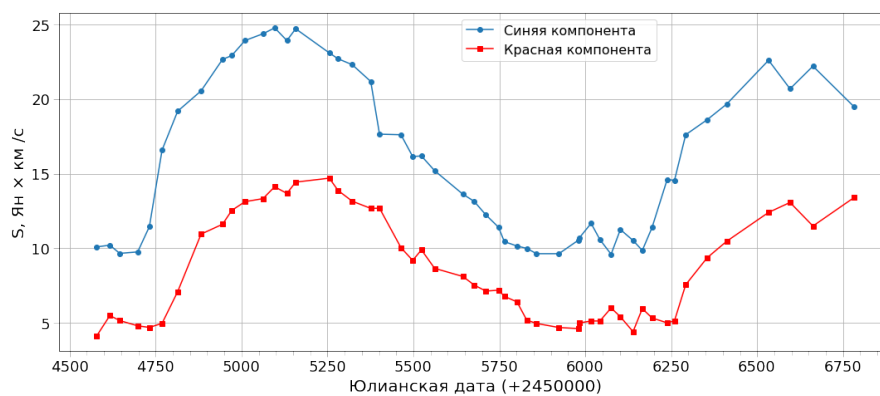
1. Спектр мазерного излучения этой области, содержащей много отдельных мазеров. По горизонтальной оси сверху отложена частота наблюдения, а снизу — соответствующая ей доплеровская скорость. По вертикальной оси отложена спектральная плотность потока в янских ($1 \text{ Ян} = 10^{-26} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ Гц})$). Одна из ярких компонент линии соответствует части оболочки, движущейся от звезды к наблюдателю («синяя компонента»), а другая — в противоположную сторону («красная» компонента).
2. Зависимость относительной интенсивности «синей» и «красной» компонент от времени.
3. Зависимость углового расстояния отдельных мазеров от звезды от их лучевых скоростей.

Определите:

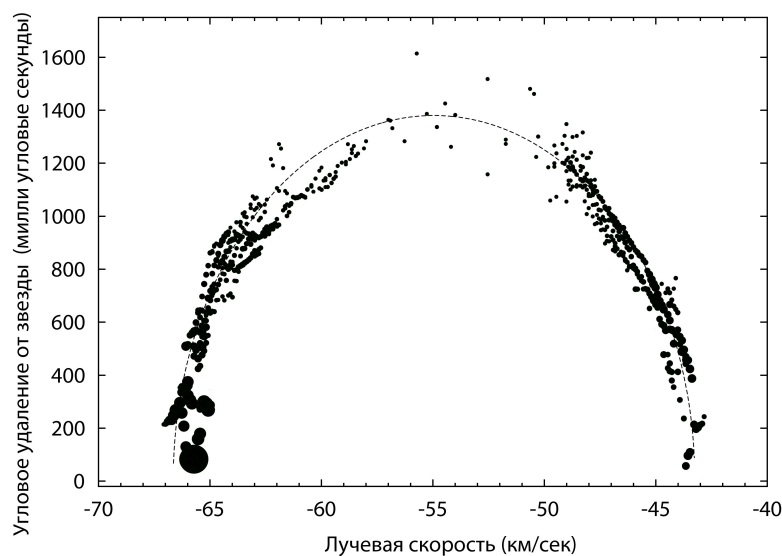
- А) Лабораторную частоту исследуемой мазерной линии с точностью до 10 кГц;
- В) Скорость расширения области мазерного излучения (оболочки) (в километрах в секунду);
- С) Линейный размер области мазерного излучения (в астрономических единицах);
- Д) Расстояние до исследуемой области (в парсеках);
- Е) Является ли объект внегалактическим, принадлежит нашей Галактике или является объектом Солнечной системы?



(a) Спектр области мазерного излучения.



(b) Кривая блеска мазерного излучения



(c) Зависимость углового расстояния от звезды отдельных мазеров от их лучевых скоростей.

К задаче 2

Решение. Для ответа на первый вопрос необходимо вспомнить формулу для доплеровского смещения спектральных линий. Пусть λ и λ_0 — наблюдаемая и лабораторная длины волн, v — скорость излучателя относительно наблюдателя и c — скорость света. Тогда изменение длины волны света за счет движения источника выражается формулой:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}.$$

Но нам на спектре дана шкала частот, а не длин волн. Частота излучения связана с длиной волны как $\nu = c/\lambda$. Тогда левая часть формулы для эффекта Доплера принимает вид

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu_0}} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu}.$$

Отсюда получаем зависимость ν_0 от ν и v :

$$\nu_0 = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \nu.$$

Определив на спектре пару значений ν и v , получим $\nu_0 = 1612.23$ МГц. Разумеется, измерений следует сделать несколько, а результат усреднить.

Замечание 1. Можно заметить, что на графике равным изменениям скорости соответствуют равные изменения частоты. Это следует из формулы эффекта Доплера:

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_2}{c}} - \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_1}{c}} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{v_2}{c}\right) - \nu_0 \left(1 - \frac{v_1}{c}\right) = -\frac{\Delta v}{c} \nu_0.$$

Таким образом, достаточно аккуратно определить разность частот, соответствующую изменению скорости на фиксированную величину, и с ее помощью вычислить частоту, соответствующую нулевой скорости.

По условию, наблюдаемое излучение формируется в тонкой оболочке, окружающей звезду. Оболочка вместе со звездой движется относительно наблюдателя и вместе с тем удаляется во все стороны от звезды. Тогда разность скоростей приближающейся и удаляющейся от нас компонент спектра равна удвоенной скорости расширения. Измерения можно провести как по спектру, так и по зависимости углового расстояния от лучевой скорости. Искомое значение равно $11 - 11.5$ км/с.

Обратим внимание на зависимость потока излучения для «красной» и «синей» компонент. Изменения повторяют друг друга, но «красная» компонента запаздывает по отношению к «синей» примерно на 60 дней. Почему так происходит? Источником энергии для мазеров является излучение звезды. Звезды-гиганты на поздних стадиях эволюции обычно переменные, и изменения в яркости звезды сказываются на яркости мазеров в окружающей звезду оболочке. Поскольку оболочка сферическая, мощность излучения изменяется у всех мазеров одновременно, а видимая нами задержка возникает из-за конечности скорости света и громадной величины оболочки. Следовательно, диаметр области мазерного излучения равен 60 световых дней или

$$D = 60 \text{ св. дней} = 60 \cdot 86\,400 \text{ с} \cdot 300\,000 \text{ км/с} \approx 1.56 \cdot 10^{12} \text{ км} \approx 10\,400 \text{ а. е.},$$

а ее радиус $R \approx 5200$ а. е.

Из рисунка (с) можем определить, что угловой радиус области мазерного излучения составляет $\rho'' = 1.3'' - 1.4''$. Тогда расстояние до исследуемой области равно

$$r = \frac{R}{\rho''} = \frac{5200 \text{ а. е.}}{1.3''} = 4000 \text{ пк} = 4 \text{ кпк.}$$

Для значения $\rho'' = 1.4''$ мы получили бы $r = 3.7 \text{ кпк.}$

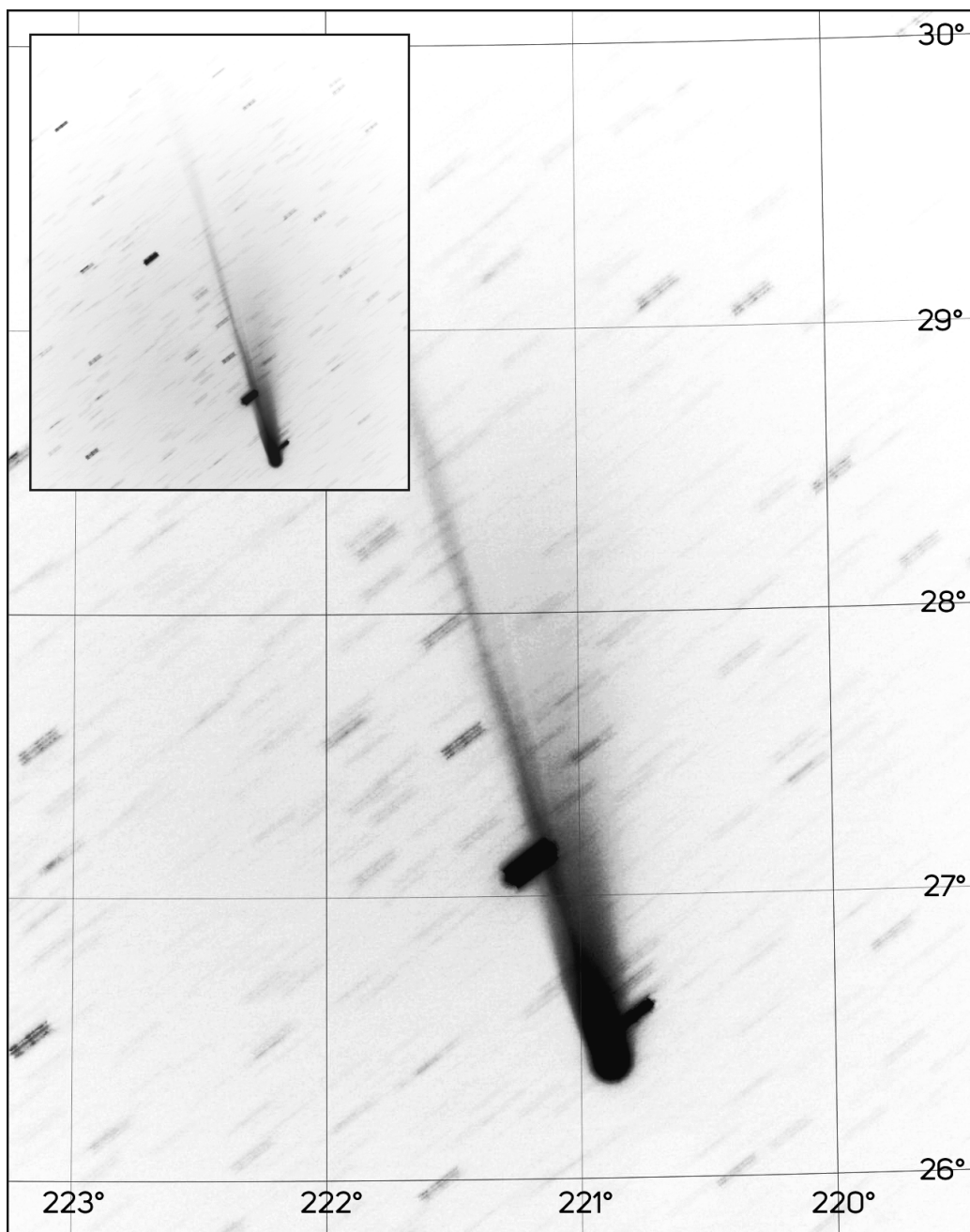
Расстояние до звезды составляет около 4 килопарсек. Это расстояние меньше, чем средний радиус нашей галактики 16 кпк, поэтому мы точно можем сказать, это объект принадлежит нашей Галактике. Разумеется, в Солнечной системе нет звезд-гигантов, поэтому ей этот объект принадлежать не может.

Замечание 2. Ответить на последний вопрос с большой степенью уверенности можно не вычисляя расстояние. Судя по графикам скорость звезды составляет около 55 км/с, что соответствует характерным относительным скоростям в диске нашей Галактики. Скорости галактик составляют обычно сотни и даже тысячи километров в секунду, хотя, конечно, нельзя на сто процентов утверждать, что не найдется близкая галактика, в которой объект движется с подходящей скоростью.

9.9. Пролетела

О. Ю. Голубева

Вам дан снимок кометы C/2025 A6 (Lemmon), которая наблюдалась в созвездии Волопас 22 октября 2025 года. Серия снимков была получена в течение 1 часа через телескоп с полной компенсацией осевого вращения Земли. Далее снимки были сложены по комете, в результате чего комета в поле зрения оказалась неподвижна, а звезды прочертили треки. Определите наиболее точно пространственную скорость кометы во время наблюдений. Оценка погрешностей не требуется. Все измерения отразите на дополнительном листе к задаче. Расстояние между Землей и кометой не менялось и составляло 0.6 а. е. Во время съемки комета находилась в 0.66 а. е. от Солнца вблизи перигелия и двигалась по ретроградной орбите. На снимке по вертикальной оси отложено склонение в градусах, по горизонтальной — прямое восхождение в градусах.



Решение. Видимое смещение кометы на небе является результатом ее собственного движения, а также осевого вращения и орбитального движения Земли. Согласно условию, осевое вращение Земли компенсировано в процессе съемки. Судя по всему, телескоп работал в экваториальном режиме и вращался вокруг полярной оси. В этом случае звезды в кадре должны быть точечными, но мы видим треки. Из условия понятно, почему так: снимки были сложены по комете, комета смещается, значит, треки звезд демонстрируют смещение кометы, и его можно найти.

Методом масштаба найдем видимое угловое смещение кометы по треку любой звезды. Треки звезд на этом изображении не являются суточными треками (суточное вращение исключено в процессе съемки) и не укорачиваются к полюсу, значит, проводить измерения можно в любом месте снимка. Все треки разные по толщине и четкости, значит, результат измерения может зависеть от выбора конкретного трека. Правильнее будет определить смещение минимум на трех разных треках, найти среднее арифметическое и последующие расчеты выполнять с ним. Заметим, что шаг сетки по прямому восхождению и склонению равен 1° . При этом расстояние между кругами склонений меньше, чем между суточными параллелями, и уменьшается по мере удаления от небесного экватора, поскольку координатная сетка стягивается к полюсам. Поэтому следует сравнивать длину трека с шагом сетки по склонению. Если участник сравнивает длину трека с шагом сетки по прямому восхождению, он должен разделить длину шага сетки на $\cos(\delta)$, где δ — склонение в том месте, где измеряется сетка.

При печати размер изображения может варьироваться, поэтому в проверке следует ориентироваться на измерения участников, не требуя точного совпадения с авторскими. Пример измерений треков звезд:

- измерение 1: $\ell_1 = 9$ мм,
- измерение 2: $\ell_2 = 8$ мм,
- измерение 3: $\ell_3 = 8$ мм.

Шаг сетки $L = 47$ мм. Угловое смещение за все время съемки:

$$\theta = \frac{9 \text{ мм} + 8 \text{ мм} + 8 \text{ мм}}{3 \cdot 47 \text{ мм}} \cdot 3600'' \approx 638''.$$

Тогда угловая скорость кометы:

$$\omega = \frac{638''}{60 \text{ мин}} = 10.6''/\text{мин},$$

что достаточно близко к данным MPC (Minor Planet Center) — $10.9''/\text{мин}$.

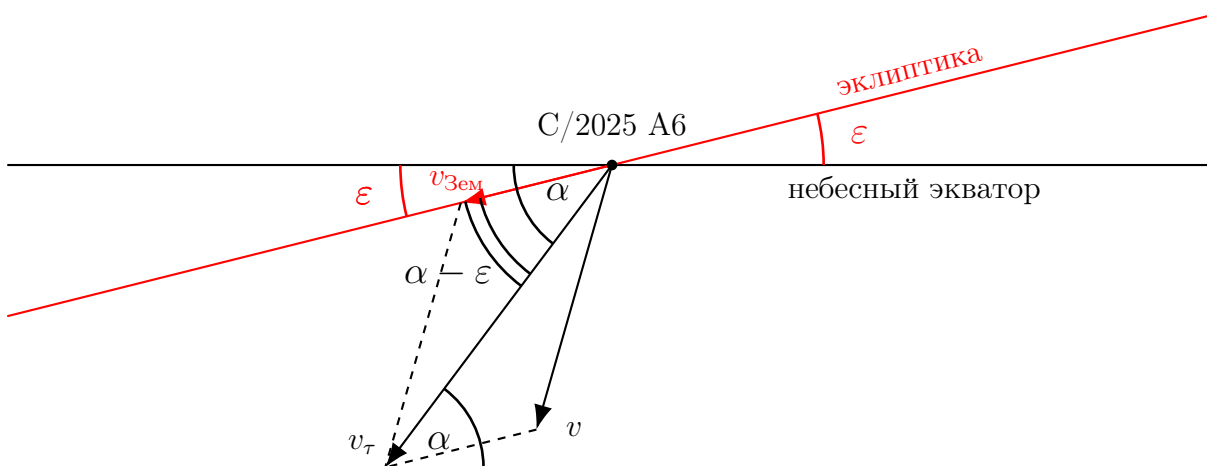
Зная угловую скорость и расстояние, определим тангенциальную скорость кометы:

$$v_\tau = \omega \cdot r = \frac{10.6''/\text{мин} \cdot 0.6 \text{ а. е.} \cdot 15 \cdot 10^7 \text{ км/а. е.}}{206265'' \cdot 60 \text{ с/мин}} = 77.1 \text{ км/с}.$$

Здесь r — расстояние Земля — комета. Поскольку комета не меняла свое расстояние относительно Земли, лучевая скорость $v_r = 0$, и полная скорость равна тангенциальной.

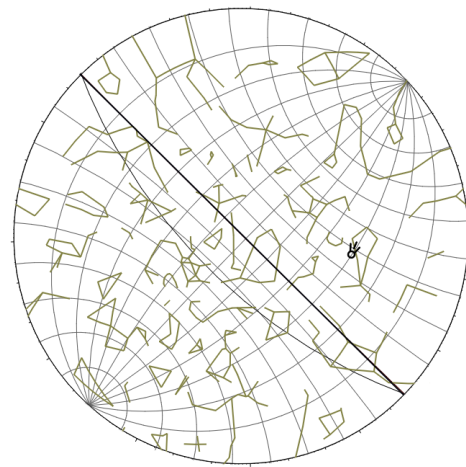
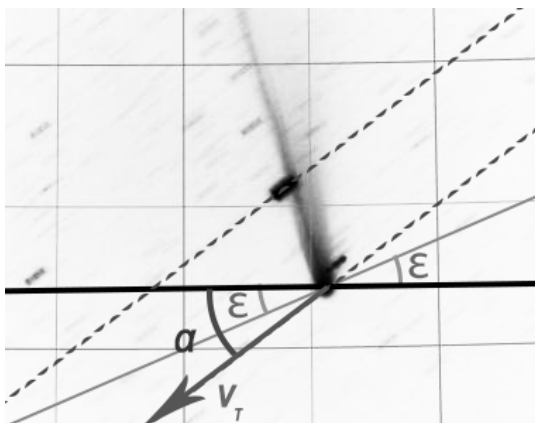
Для объекта Солнечной системы эта скорость слишком высока. Вспомним, что наблюдения проводятся с движущейся Земли, значит, мы получили относительную скорость. Комета движется по ретроградной орбите, что объясняет большую величину скорости: суммируются скорость Земли и проекция скорости кометы на эклиптику.

Представим как в пространстве расположены вектора скоростей Земли и кометы. У Земли вектор скорости лежит в плоскости эклиптики, у кометы он направлен в противоположную сторону, т. к. орбита ретроградная, и лежит под некоторым углом к эклиптике. Определим этот угол.



Здесь v_τ — найденная выше относительная тангенциальная скорость. v — искомая пространственная скорость. $v_{\text{зем}}$ — составляющая относительной скорости кометы, возникающая из-за орбитального движения Земли, ε — угол между небесным экватором и эклипстикой.

Если бы комета находилась на прямом восхождении 180° , этот угол составлял бы 23.5° . Фактически это не так. Оценим этот угол. С одной стороны, комета в созвездии Волопас, и это уже дает представление о расположении эклиптики, с другой стороны, можно не знать положение Волопаса на небе, а заметить, что прямое восхождение ($221^\circ = 14^h 44^m$) соответствует области неба между осенним равноденствием и зимним солнцестоянием, и здесь эклиптика расположена под углом меньшим, чем 23.5° , к экватору. Расчёты можно провести с $\varepsilon = 23.5^\circ$, а затем проверить насколько изменение угла влияет на ответ (незначительно).



Пусть α — угол между вектором относительной тангенциальной скорости кометы и небесным

экватором, этот угол можно измерить на снимке: $\alpha = 35^\circ$.

Величину пространственной скорости v получим из треугольника по теореме косинусов (в пределах $\delta = 30^\circ$ используем плоское приближение):

$$v^2 = v_{\text{зем}}^2 + v_{\tau}^2 - 2 \cdot v_{\text{зем}} \cdot v_{\tau} \cdot \cos(\alpha - \varepsilon),$$

$$v = \left((30 \text{ км/с})^2 + (77.1 \text{ км/с})^2 - 2 \cdot 30 \text{ км/с} \cdot 77.1 \text{ км/с} \cdot \cos(11.5^\circ) \right)^{\frac{1}{2}} \approx 48.1 \text{ км/с}.$$

В действительности в день съёмки скорость кометы составила 51.8 км/с. И если произвести вычисления, используя орбитальную скорость Земли в этот день (29.8 км/с) и с учётом фактического наклона эклиптики к небесному экватору в этой точке, то ответ получится ближе к действительности.