

Содержание

11.1. Я вам разрешаю	2
11.2. Потенциальная задача	4
11.3. Двойной форсаж	7
11.4. Радиоактивное эхо	9
11.5. Вырожденная задача	11
11.6. Двуликий Янус	13

11.1. Я вам разрешаю

М.В.Костина

Тесная двойная звезда состоит из одинаковых компонент с массами $15 \mathfrak{M}_{\odot}$ каждая, движущихся по круговым орбитам на расстоянии 0.74 а.е. друг от друга. Известно, что обе звезды являются звездами Главной последовательности и обе вращаются вокруг своей оси со скоростью 36 км/с на экваторе. Оцените минимально необходимую спектральную разрешающую силу спектрографа, которая потребуется для получения кривых лучевых скоростей компонент при наблюдении в линии гелия с длиной волны $5876 \text{ \AA}$. Уточним, что спектральная разрешающая сила — это величина $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, равная отношению длины волны наблюдения к минимальной разности длин волн, которые еще можно различить на данном спектрографе.

Решение. За счет орбитального движения звезд линии в их спектрах периодически отклоняются от положения, соответствующего центру масс системы.

Для построения кривых лучевых скоростей компонент системы по отдельности нужно, чтобы по спектру можно было измерять отклонения центров спектральных линий каждой звезды. Это отклонение согласно эффекту Доплера равно:

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{v}{c},$$

где v — это лучевая скорость.

Видно, что можно перевести разрешающую силу в скорости:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda \cdot v/c} = \frac{c}{v}.$$

Так как требуется оценить минимальную разрешающую силу, то нужно, чтобы можно было измерить $\Delta\lambda$, соответствующее хотя бы максимально возможным лучевым скоростям звезд.

Относительная орбитальная скорость равна

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{\frac{G \cdot 2\mathfrak{M}}{r}},$$

где $r = 0.74$ а.е. — радиус относительной орбиты, а $2\mathfrak{M} = 30 \mathfrak{M}_{\odot}$ — суммарная масса системы.

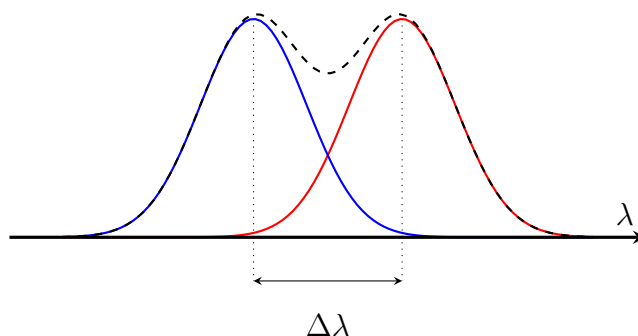
Поставив числовые данные, получаем $v_{\text{отн}} \approx 1.9 \cdot 10^2$ км/с. Отсюда скорость каждой из компонент относительно центра масс равна $v = v_{\text{отн}}/2 = 95$ км/с.

Казалось бы, необходимую разрешающую силу можно оценить так:

$$R = \frac{c}{v} \approx 3000$$

(формально четыре значащих цифры тут не получить, но по устоявшейся традиции спектральную разрешающую силу принято записывать таким образом).

Однако нужно учесть, что за счет вращения звезд и за счет теплового движения газа в их атмосферах линии в их спектрах расширяются и становятся похожи на то, что на рисунке.



При большой ширине близко расположенные линии начинают перекрываться, поэтому чтобы разрешить их потребуется бóльшая разрешающая сила.

Приблизительно можно оценить ширину спектральной линии по формуле эффекта Доплера для соответствующих скоростей.

Оценим скорость теплового движения. Так как требуется разрешение линии гелия, то нужно оценить характерную скорость движения атомов гелия в атмосфере звезд. Температуру звезды Главной последовательности с массой $15 M_{\odot}$ можно оценить как $T = 3 \cdot 10^4$ К. Скорость атомов гелия можно оценить как

$$v_{\text{тепл}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса гелия.

Подставляя числа, получаем $v_{\text{тепл}} = 11$ км/с.

И вращение, и тепловое движение приводят к расширению спектральной линии одинаковым образом, поэтому можно оценить «эффективную скорость» для оценки ширины линии. Наиболее разумная идея — вычислить среднеквадратичное двух скоростей:

$$v_{\text{эфф}} = \sqrt{v_{\text{тепл}}^2 + v_{\text{вр}}^2} \approx 38 \text{ км/с.}$$

На соответствующую v $\Delta\lambda$ линия будет расширяться в обе стороны от центральной длины волны. Если нужно, чтобы линии разрешались, расстояние между их центрами должно быть больше удвоенной v .

Орбитальная скорость звезд больше, чем удвоенная v примерно на $\Delta v = 20$ км/с, поэтому можно ожидать, что при разрешающей силе, соответствующей Δv , можно будет построить кривые лучевых скоростей каждого компонента. Отсюда

$$R = \frac{c}{\Delta v} \approx 15000.$$

11.2. Потенциальная задача

А.В.Веселова

Эллиптическая галактика обладает сферической симметрией, а ее гравитационный потенциал задается выражением

$$U(r) = -\frac{GM}{r+c},$$

где M — полная масса галактики, $c = 1$ кпк. Известно, что на круговой орбите радиуса 8 кпк скорость равна 180 км/с.

- А. Определите полную массу галактики.
- В. Представим, что с расстояния R на центр галактики с нулевой начальной скоростью радиально падает частица. Чему будет равна ее скорость, когда она достигнет центра галактики? Вычислите эту скорость для случая $R = 10c$.
- С. Пусть звезда движется по близкой к круговой орбите радиуса $r_0 = 8$ кпк; $\delta r(t)$, $\delta\theta(t)$ — отклонения в плоскости орбиты по радиусу и по азимуту. Оцените период колебаний звезды вдоль радиуса галактики.
- Д. Определите, при каких значениях r_0 круговая орбита звезды радиуса r_0 является устойчивой.

Решение.

- А. Определим зависимость круговой скорости от расстояния до центра галактики. Для этого на круговой орбите приравняем гравитационное ускорение и центростремительное и учитывая, что сила связана с производной потенциала по расстоянию:

$$\frac{GM}{(r+c)^2} = \frac{V^2}{r}.$$

Орбита плоская, расстояние от центра галактики равно галактоосевому расстоянию: мы просто можем рассматривать плоскость орбиты как плоскость симметрии потенциала.

Получаем выражение для массы:

$$M = \frac{V^2(r+c)^2}{Gr} = \frac{(1.8 \cdot 10^5 \text{ м/с})^2 (9 \cdot 3.1 \cdot 10^{19} \text{ м})^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{с}^2/\text{кг} \cdot 8 \cdot 3.1 \cdot 10^{19} \text{ м}} = 1.5 \cdot 10^{41} \text{ кг} = 7.6 \cdot 10^{10} M_{\odot}.$$

- В. Рассмотрим прямолинейное падение с нулевой начальной скоростью с $r(0) = R$, $r(t) \rightarrow 0$. Энергия в расчете на единицу массы составляет

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + U(r) = U(R) = -\frac{GM}{R+c}.$$

Скорость падения

$$\dot{r} = -\sqrt{2(E - U(r))} = -\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r+c} - \frac{1}{R+c} \right)}.$$

В центре галактики скорость составит

$$|\dot{r}(0)| = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{R+c} \right)}.$$

При $R = 10c$:

$$|\dot{r}(0)| = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{10c+c} \right)} = \sqrt{2GM \cdot \frac{10}{11c}} = 7.7 \cdot 10^2 \text{ км/с}.$$

С. Запишем уравнения движения в плоскости орбиты для начальной круговой орбиты радиуса r_0 :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU}{dr}\Big|_{r_0} + \frac{V^2}{r_0}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega_0. \end{cases}$$

В сферически-симметричном потенциале момент импульса J , равный Vr_0 , сохраняется, используем это для записи соотношения для отклонения по радиусу на близкой к круговой орбите.

$$\frac{d^2(r_0 + \delta r)}{dt^2} = -\frac{dU}{dr}\Big|_{r_0 + \delta r} + \frac{J^2}{(r_0 + \delta r)^3},$$

используем приближение $\frac{dU}{dr}\Big|_{r_0 + \delta r} = \frac{dU}{dr}\Big|_{r_0} + \frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} \cdot \delta r$:

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} + \frac{d^2 \delta r}{dt^2} \approx -\frac{dU}{dr}\Big|_{r_0} - \frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} \cdot \delta r + \frac{J^2}{r_0^3} \cdot \left(1 - 3\frac{\delta r}{r_0}\right).$$

Вычтем первое уравнение системы круговой орбиты из полученного соотношения, останется выражение

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} \approx -\frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} \cdot \delta r - 3\frac{J^2}{r_0^4} \cdot \delta r \Rightarrow \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \left(\frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} + 3\frac{J^2}{r_0^4}\right) \cdot \delta r = 0.$$

Это уравнение колебаний, коэффициент перед δr — квадрат частоты ω . Вычислим вторую производную:

$$\frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} = \frac{d^2}{dr^2} \left(-\frac{GM}{r+c}\right) = -\frac{2GM}{(r+c)^3}.$$

Далее, выразим J через производную потенциала:

$$J = Vr_0 = \sqrt{\frac{GM r_0}{(r_0 + c)^2}} \cdot r_0$$

и соберем выражение для квадрата частоты:

$$\omega^2 = -\frac{2GM}{(r_0 + c)^3} + 3\frac{GM}{r_0(r_0 + c)^2} = GM \cdot \frac{r_0 + 3c}{r_0(r_0 + c)^3} = \frac{GM}{(r_0 + c)^3} \cdot \left(1 + \frac{3c}{r_0}\right).$$

Подставим численные значения:

$$\omega^2 = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{с}^2/\text{кг} \cdot 1.5 \cdot 10^{41} \text{ кг}}{(9 \cdot 3.1 \cdot 10^{19} \text{ м})^3} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot 1}{8}\right) = 6.3 \cdot 10^{-31}/\text{с}^2,$$

$$\omega = 8 \cdot 10^{-16}/\text{с} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 7.9 \cdot 10^{15} \text{ с} = 2.5 \cdot 10^8 \text{ лет}.$$

Д. Эффективный потенциал в случае вращения имеет вид

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{J^2}{2r^2} = -\frac{GM}{r+c} + \frac{J^2}{2r^2}.$$

На круговой орбите радиуса r_0 силы уравниваются друг друга, из чего следует

$$U'_{\text{eff}}(r_0) = 0 \Rightarrow \frac{GM}{(r_0 + c)^2} = \frac{J^2}{r_0^3} \Rightarrow J^2 = \frac{GM r_0^3}{(r_0 + c)^2}.$$

Определим условие, при котором круговая орбита будет устойчивой: она должна соответствовать «локальной потенциальной яме», при этом $U''_{\text{eff}}(r_0) > 0$.

Вторая производная имеет вид

$$U''_{\text{eff}}(r) = -\frac{2GM}{(r + c)^3} + \frac{3J^2}{r^4}.$$

Для круговой орбиты

$$\begin{aligned} U''_{\text{eff}}(r_0) &= -\frac{2GM}{(r_0 + c)^3} + \frac{3}{r_0^4} \cdot \frac{GM r_0^3}{(r_0 + c)^2} = \\ &= GM \left(-\frac{2}{(r_0 + c)^3} + \frac{3}{r_0(r_0 + c)^2} \right) = \frac{GM}{(r_0 + c)^2} \left(-\frac{2}{r_0 + c} + \frac{3}{r_0} \right). \end{aligned}$$

Для выполнения условия устойчивости нужно выполнение неравенства

$$-\frac{2}{r_0 + c} + \frac{3}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3}{r_0} > \frac{2}{r_0 + c} \Rightarrow 3(r_0 + c) > 2r_0 \Rightarrow r_0 + 3c > 0.$$

Так как $r_0 > 0$ и $c > 0$, неравенство выполняется всегда.

Таким образом, в выбранном потенциале все круговые орбиты устойчивы.

11.3. Двойной форсаж

М.И.Волобуева

Наблюдатель находится в Северном полушарии Земли на широте φ .

А. Найдите склонение звезд, для которых разность максимального и минимального значения астрономического азимута превышает разность максимального и минимального значения зенитного расстояния ровно в 2 раза (включая путь под горизонтом).

В. Для каких северных широт такие звезды существуют?

Решение. Заметим, что искомые звезды не могут кульминировать к югу от зенита: в таком случае диапазон изменения азимута будет составлять $\Delta A = 360^\circ$, а зенитное расстояние должно изменяться на $\Delta z = 180^\circ$, то есть звезда должна проходить и через зенит, и через надир. Такое возможно только для экваториальных звезд при наблюдении с земного экватора, но в этом случае не выполняется первая часть условия: звезды движутся вдоль первого вертикала и их азимуты принимают только два значения: 90° и 270° . Таким образом, делаем вывод, что $\delta \geq \varphi$ и верхняя кульминация происходит к северу от зенита.

Итак, суточная параллель звезды целиком лежит в северной полусфере. Проведем два круга высоты, являющимися касательными к суточной параллели. Очевидно, что в точках касания азимут звезды принимает экстремальные значения (минимальное в западной полусфере и максимальное в восточной). Также заметим, что отрезок, проведенный из Северного полюса мира в точку касания, будет перпендикулярен соответствующему кругу высоты. Иными словами, параллактический треугольник, образованный зенитом, Северным полюсом мира и точкой касания, является прямоугольным. Тогда по теореме синусов получаем:

$$\frac{\sin(\Delta A/2)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \varphi)},$$

$$\sin(\Delta A/2) = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}.$$

Очевидно, что минимальное и максимальное значения зенитного расстояния достигаются в кульминациях, при этом $\Delta z = 2 \times (90^\circ - \delta) = 180^\circ - 2\delta$. Отсюда получаем

$$\Delta A = 2\Delta z,$$

$$\arcsin \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} = 180^\circ - 2\delta,$$

$$\frac{\cos \delta}{\cos \varphi} = \sin(180^\circ - 2\delta) = \sin 2\delta = 2 \sin \delta \cos \delta,$$

$$\sin \delta = \frac{1}{2 \cos \varphi}. \quad (1)$$

Выражение (1) имеет смысл при $\cos \varphi > 0.5$, поэтому $\varphi < 60^\circ$.

Также отметим, что кульминация к северу от зенита означает, что $\Delta A \leq 180^\circ$, а значит,

$$\Delta z \leq 90^\circ,$$

$$180^\circ - 2\delta \leq 90^\circ,$$

$$\delta \geq 45^\circ,$$

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \frac{1}{2 \cos \varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos \varphi &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \varphi &\geq 45^\circ.\end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать окончательный ответ:

А. $\delta = \arcsin \frac{1}{2 \cos \varphi},$

В. $45^\circ \leq \varphi < 60^\circ.$

Существует также вырожденное решение $\Delta z = \Delta A = 0$, соответствующее Северному полюсу мира и существующее для всех широт $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ)$.

11.4. Радиоактивное эхо

А.Н.Акинъщиков

После вспышки сверхновой ее светимость некоторое время поддерживается радиоактивным подогревом выброшенного вещества. Основную роль играет цепочка распадов



Периоды полураспада никеля и кобальта $t_{1/2}^{(\text{Ni})} = 6.1$ суток и $t_{1/2}^{(\text{Co})} = 77$ суток. Считайте, что один распад ^{56}Ni передает выбросу в среднем $E_{\text{Ni}} = 1.7$ МэВ, а один распад ^{56}Co — $E_{\text{Co}} = 3.7$ МэВ.

А. Найдите момент времени после вспышки, когда мгновенная мощность нагрева от распадов ^{56}Co становится равной мощности нагрева от распадов ^{56}Ni .

В. Через 20 суток после вспышки болометрическая светимость сверхновой равна $L = 1.0 \cdot 10^{36}$ Вт. Считая, что к этому моменту почти вся мощность радиоактивного нагрева выходит в излучение, оцените начальную массу синтезированного при вспышке никеля.

Решение. Обозначим распадные константы:

$$\lambda_{\text{Ni}} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}^{(\text{Ni})}}, \quad \lambda_{\text{Co}} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}^{(\text{Co})}}.$$

Если в начальный момент было N_0 ядер никеля и не было кобальта, то

$$N_{\text{Ni}}(t) = N_0 e^{-\lambda_{\text{Ni}} t}.$$

Для дочернего кобальта в цепочке распадов:

$$N_{\text{Co}}(t) = N_0 \frac{\lambda_{\text{Ni}}}{\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}} (e^{-\lambda_{\text{Co}} t} - e^{-\lambda_{\text{Ni}} t}).$$

Мощности нагрева:

$$P_{\text{Ni}} = \lambda_{\text{Ni}} N_{\text{Ni}} E_{\text{Ni}}, \quad P_{\text{Co}} = \lambda_{\text{Co}} N_{\text{Co}} E_{\text{Co}}.$$

Условие равенства мощностей:

$$\lambda_{\text{Ni}} N_{\text{Ni}} E_{\text{Ni}} = \lambda_{\text{Co}} N_{\text{Co}} E_{\text{Co}}.$$

После подстановки и сокращения N_0 и λ_{Ni} :

$$E_{\text{Ni}} = \frac{\lambda_{\text{Co}} E_{\text{Co}}}{\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}} (e^{(\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}})t} - 1).$$

Отсюда

$$e^{(\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}})t} = 1 + \frac{E_{\text{Ni}}(\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}})}{\lambda_{\text{Co}} E_{\text{Co}}}.$$

Подставим числа в сутках ($\ln 2 \approx 0.693$)

$$\lambda_{\text{Ni}} = \frac{0.693}{6.1} \approx 0.114 \text{ суток}^{-1}, \quad \lambda_{\text{Co}} = \frac{0.693}{77} \approx 9.00 \cdot 10^{-3} \text{ суток}^{-1}.$$

Тогда

$$\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}} \approx 0.105 \text{ суток}^{-1},$$

$$1 + \frac{1.7 \cdot 0.105}{(9.0 \times 10^{-3}) \cdot 3.7} \approx 1 + 5.36 = 6.36.$$

Значит,

$$(\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}) t \approx \ln 6.36 \approx 1.85, \quad t \approx \frac{1.85}{0.105} \approx 17.6 \text{ суток.}$$

Таким образом, мощность нагрева от кобальта сравнивается с никелевой примерно через 18 суток.

Теперь оценим массу никеля по светимости через 20 суток. Удобно перейти к секундам:

$$t = 20 \cdot 86400 \text{ с} = 1.728 \times 10^6 \text{ с.}$$

Тогда

$$\lambda_{\text{Ni}} = \frac{\ln 2}{6.1 \cdot 86400} \approx 1.31 \times 10^{-6} \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_{\text{Co}} = \frac{\ln 2}{77 \cdot 86400} \approx 1.04 \times 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

Получаем

$$N_{\text{Ni}}(20 \text{ суток}) = N_0 e^{-\lambda_{\text{Ni}} t} \approx 0.104 N_0,$$

$$N_{\text{Co}}(20 \text{ суток}) = N_0 \frac{\lambda_{\text{Ni}}}{\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}} (e^{-\lambda_{\text{Co}} t} - e^{-\lambda_{\text{Ni}} t}) \approx 0.821 N_0.$$

Энергия одного распада в джоулях:

$$E_{\text{Ni}} = 1.7 \times 10^6 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \approx 2.7 \times 10^{-13} \text{ Дж},$$

$$E_{\text{Co}} = 3.7 \times 10^6 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \approx 5.9 \times 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Полная мощность нагрева в момент наблюдения:

$$L = P_{\text{Ni}} + P_{\text{Co}} = \lambda_{\text{Ni}} N_{\text{Ni}} E_{\text{Ni}} + \lambda_{\text{Co}} N_{\text{Co}} E_{\text{Co}}.$$

Подставляя найденные доли:

$$L = N_0 (\lambda_{\text{Ni}} \cdot 0.104 \cdot E_{\text{Ni}} + \lambda_{\text{Co}} \cdot 0.821 \cdot E_{\text{Co}}).$$

Численно

$$\lambda_{\text{Ni}} \cdot 0.104 \cdot E_{\text{Ni}} \approx 3.7 \times 10^{-20} \text{ Вт}$$

и

$$\lambda_{\text{Co}} \cdot 0.821 \cdot E_{\text{Co}} \approx 5.0 \times 10^{-20} \text{ Вт}$$

на одно начальное ядро. Итак,

$$L \approx 8.7 \times 10^{-20} N_0.$$

При $L = 1.0 \cdot 10^{36} \text{ Вт}$

$$N_0 \approx \frac{1.0 \times 10^{36}}{8.7 \times 10^{-20}} \approx 1.15 \times 10^{55}.$$

Обозначив 1 а.е.м. как u (если ее значение неизвестно, можно в качестве «замены» воспользоваться массой протона, с интересующей нас точностью результат от этого не изменится), получаем, что масса никеля

$$\mathfrak{M}_{\text{Ni}} = 56uN_0 \approx 56 \cdot 1.66 \times 10^{-27} \cdot 1.15 \times 10^{55} \approx 1.1 \times 10^{30} \text{ кг} \approx 0.54 \mathfrak{M}_{\odot}.$$

Тем самым начальная масса ^{56}Ni оказывается около $0.5 \mathfrak{M}_{\odot}$.

11.5. Вырожденная задача

П.А. Тараканов

Из-за того, что электронная компонента вещества белых карликов сильно вырождена, уравнение состояния этого вещества является баротропным (давление является только функцией плотности, $p = p(\rho)$).

- А.** Известно, что для маломассивных белых карликов уравнение состояния вещества имеет вид $p = K_1 \cdot \rho^{5/3}$, где $K_1 = \text{const}$. Зная это, найдите зависимость радиуса таких белых карликов от массы, если известно, что карлик с массой $0.2 \mathcal{M}_\odot$ имеет радиус $0.02 R_\odot$.
- В.** При росте массы белых карликов уравнение состояния начинает меняться и в пределе превращается в $p = K_2 \cdot \rho^{4/3}$, где $K_2 = \text{const}$. Исходя из этого утверждения, докажите, что в предельном случае масса белых карликов перестает зависеть от радиуса и становится фиксированной (т.е. докажите существование предела Чандрасекара).

Решение. Гипотетически можно записать для белого карлика уравнение гидростатического равновесия, подставить в него имеющееся уравнение состояния вещества, связать распределение плотности вдоль радиуса с распределением массы и получить дифференциальное уравнение второго порядка (вообще говоря, являющееся уравнением Пуассона, а в данном частном случае называемое уравнением Лейна – Эмдена), обезразмерить задачу и найти искомую связь между массой и радиусом белого карлика (в процессе, правда, придется некоторые безразмерные константы найти численно), повторив эту процедуру два раза для двух разных уравнений состояния. Но это хорошая курсовая работа для студента примерно 3 курса, собирающегося стать астрофизиком-теоретиком, а для решения задач на олимпиаде школьников такие методы явно непригодны.

Поэтому пойдем по более простому пути, обратив внимание на два обстоятельства. Во-первых, в первом из двух вопросов дана пара конкретных значений массы и радиуса для маломассивного карлика (что должно навести на мысль о том, что можно найти общий вид зависимости между массой и радиусом для таких карликов, а потом «отмасштабировать» его по одной данной в условии паре значений), во-вторых, количество величин, которые могут войти в эту зависимость, невелико, что позволяет воспользоваться для ее получения методом размерностей. В самом деле, в выражение для связи массы $\mathcal{M}$ и радиуса R белого карлика могут входить еще всего лишь две размерных величины — гравитационная постоянная G и коэффициент K (один из двух) из уравнения состояния. Тогда должна существовать некоторая комбинация этих величин в разных степенях, являющаяся безразмерной.

Запишем уравнения состояния для обоих рассматриваемых случаев в виде $p = K\rho^\alpha$ и найдем размерности каждой из четырех величин, используя стандартные обозначения: L для размерности длины, M — массы и T — времени. Тогда

$$\begin{cases} [\mathcal{M}] &= M \\ [R] &= L \\ [G] &= L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2} \\ [K] &= \frac{M \cdot L}{T^2 \cdot L^2} \cdot \frac{L^{3\alpha}}{M^\alpha} = M^{1-\alpha} L^{3\alpha-1} T^{-2} \end{cases}$$

Из получившихся размерностей сразу можно сделать вывод, что гравитационная постоянная и коэффициент K могут встретиться в безразмерной комбинации только в виде отношения G/K — это единственный способ «уничтожить» размерность времени. Поэтому упростим задачу и заменим их на объединенный параметр $Z = G/K$, размерность которого $[Z] = L^{4-3\alpha} M^{\alpha-2}$.

Тогда для получившихся трех величин должна существовать безразмерная комбинация вида $\mathfrak{M}^a R^b Z^c$. Запишем ее размерность

$$[\mathfrak{M}^a R^b Z^c] = M^a L^b L^{(4-3\alpha)c} M^{(\alpha-2)c} = L^0 M^0,$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a + (\alpha - 2) \cdot c = 0 \\ b + (4 - 3\alpha) \cdot c = 0 \end{cases}$$

У нее бесконечно много решений, но безразмерная комбинация в произвольной степени остается безразмерной, поэтому положим, например, $c = -1$ (поскольку очевидно, что $c = 0$ приводит к тривиальному и бесполезному для нас решению, а в остальном выбирать конкретное значение мы можем так, чтобы было удобнее). Тогда

$$\begin{cases} a = \alpha - 2 \\ b = 4 - 3\alpha \end{cases}$$

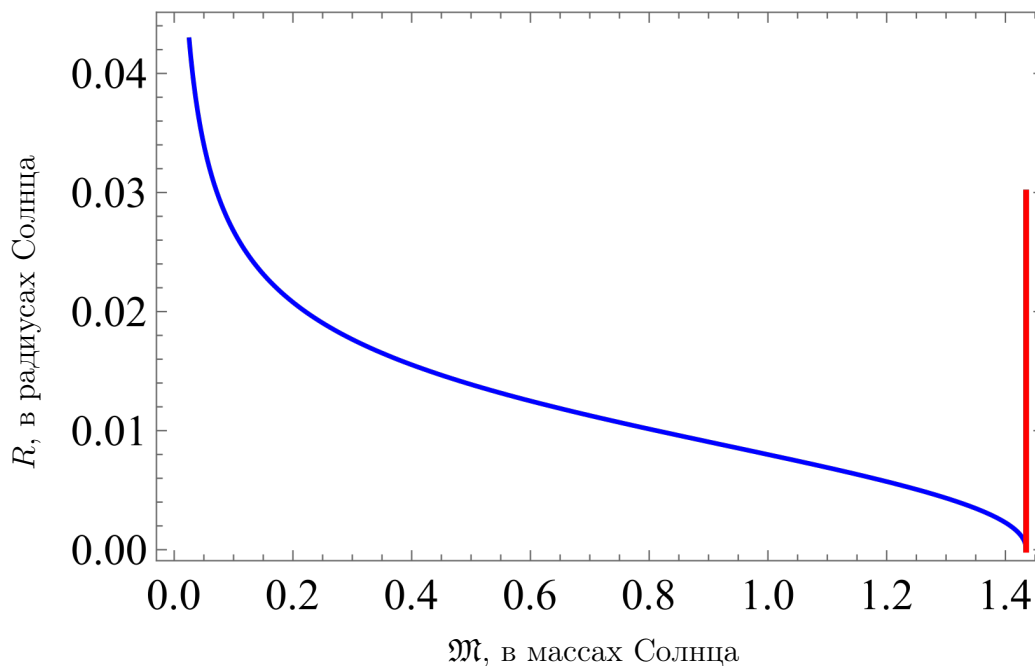
Теперь займемся рассмотрением отдельных случаев. Если нас интересуют маломассивные белые карлики, то $\alpha = 5/3$. Тогда $a = -1/3$ и $b = -1$, откуда получаем, что $R \propto \mathfrak{M}^{-1/3}$ (параметр Z — константа, хоть и размерная). С учетом известной опорной точки записываем зависимость как:

$$\frac{R}{0.02 R_{\odot}} = \left(\frac{\mathfrak{M}}{0.2 \mathfrak{M}_{\odot}} \right)^{-1/3}$$

или, немного упростив ее, в виде

$$R = 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_{\odot})^{-1/3} R_{\odot}.$$

Теперь займемся предельным случаем (соответствующем ультрарелятивистскому вырожденному газу). Для него $\alpha = 4/3$, и тогда $a = -2/3$, а вот $b = 0$. Это означает, что из искомого соотношения «выпала» зависимость от массы. В предельном случае радиус стремится к нулю, а масса не меняется, что приводит к зависимости «масса – радиус», изображенной на рисунке ниже.



Значение массы, формально соответствующее пределу при $R \rightarrow 0$, и называется пределом Чандрасекара, $\mathfrak{M} \approx 1.4 \mathfrak{M}_{\odot}$.

11.6. Дзуликий Янус

Н.Е.Кондратьев

Вокруг Сатурна по круговым орбитам, расположенным в одной плоскости, вращаются два спутника — Янус и Эпиметей. Интересной особенностью этих спутников является то, что расстояние между их орбитами составляет всего около 50 км, и раз в 4 года за счет гравитационного взаимодействия между ними они меняются орбитами, так что внутренний спутник становится внешним, а внешний — внутренним.

А. Оцените большие полуоси орбит и периоды обращения спутников вокруг Сатурна.

В. Оцените минимально возможное расстояние между спутниками.

Массы Сатурна, Януса и Эпиметей равны $5.7 \cdot 10^{26}$ кг, $1.9 \cdot 10^{18}$ кг и $5.3 \cdot 10^{17}$ кг соответственно. Можно считать, что во время взаимодействия орбиты обоих спутников остаются круговыми.

Решение. Заметим, что 50 км — это очень мало. Большие полуоси орбит спутников не могут быть меньше радиуса Сатурна, который равен $6 \cdot 10^4$ км, что много больше 50 км. Это значит, что параметры орбит спутников будут отличаться очень слабо. В ответе на первый вопрос следует указать совпадающие большие полуоси и периоды обращения, так как их разницей можно пренебречь по сравнению с точностью вычислений.

Пусть период обращения и большая полуось орбиты одного спутника равны T и a , а второго — $T + \Delta T$ и $a + \Delta a$ соответственно. По условию $\Delta a = 50$ км.

Из III закона Кеплера

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM_c}, \quad \frac{(T + \Delta T)^2}{4\pi^2} = \frac{(a + \Delta a)^3}{GM_c}.$$

Воспользуемся малостью Δa и ΔT и формулой $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, и получим

$$\frac{T^2(1 + 2\frac{\Delta T}{T})}{4\pi^2} = \frac{a^3(1 + 3\frac{\Delta a}{a})}{GM_c},$$

$$2 \cdot \frac{\Delta T}{T} = 3 \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Здесь и далее в аналогичных ситуациях можно получать подобные соотношения и другим путем. Запишем III закон Кеплера

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM_c}$$

и считаем дифференциал обеих частей равенства. Получим

$$\frac{2TdT}{4\pi^2} = \frac{3a^2da}{GM_c}.$$

Теперь, разделив это равенство на предыдущее, получаем

$$\frac{2dT}{T} = \frac{3da}{a},$$

что, поскольку $\Delta T \approx dT$ и $\Delta a \approx da$, дает тот же результат.

Каждые 4 года спутники меняются орбитами, то есть каждые 4 года они подходят близко друг к другу. Это значит, что синодический период спутников примерно равен 4 годам.

Свяжем его с их сидерическими периодами. Воспользуемся той же самой формулой для малого x при $n = -1$:

$$\frac{1}{T_{\text{син}}} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T + \Delta T} \approx \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right) = \frac{\Delta T}{T^2}.$$

Выразим ΔT и T через Δa и a .

$$T_{\text{син}} = T \cdot \frac{T}{\Delta T} = T \cdot \frac{2a}{3\Delta a} = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_c}} \cdot \frac{2a}{3\Delta a},$$

$$a^5 = \frac{9}{4} \cdot GM_c \cdot (\Delta a)^2 \cdot \left(\frac{T_{\text{син}}}{2\pi}\right)^2.$$

Подставляя данные, получим $a \approx 154$ тыс. км. Это соответствует периоду $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_c}} = 0.7$ сут.

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Снова заметим, что 50 км — это очень мало. Учитывая массу тел, их радиус примерно равен $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \frac{M}{\rho}} \approx 60$ км, а диаметр, соответственно, в 2 раза больше. Тела не могут подходить друг к другу на расстояние, хотя бы сравнимое с их размером — иначе колебания параметров их орбит, вызванные гравитационным взаимодействием с другими телами Солнечной системы, приводили бы к столкновениям Януса и Эпиметея друг с другом. Таким образом, $\Delta a \ll r_{\min}$ и мы снова можем считать, что тела движутся по одной орбите. Более того, тела можно считать точечными, то есть пренебречь их размерами и формой.

С другой стороны, сами тела не очень массивные, и существенное изменение больших полуосей их орбит происходит только в то время, когда они близки друг к другу. Будем считать, что за пределами некоторого $r_{\max} \ll a$ Янус и Эпиметей не взаимодействуют друг с другом.

Из сделанных выше предположений получаем, что изменение больших полуосей орбит происходит только за счет изменения модуля скоростей спутников, но не их направления. Так как орбиты следует считать круговыми, то в каждый момент времени скорости остаются направленными перпендикулярно направлению на Сатурн.

Здесь вступает в силу известный факт, что сообщение телу энергии (попытка его ускорить) приводит к уменьшению его скорости, и наоборот. Действительно, из теоремы о вириале $2K = -U$, $E = K + U = K - 2K = -K$. Увеличение полной энергии приводит к уменьшению кинетической энергии, $\Delta E = -\Delta K$. Изменение энергии равно работе гравитационных сил притяжения между двумя телами. Тогда

$$\Delta E = F \cdot \Delta l \cdot \cos(\Delta\varphi) = F \cdot v\Delta t \cdot \cos(\Delta\varphi) = -\Delta \left(\frac{m}{2}v^2\right) = -mv\Delta v,$$

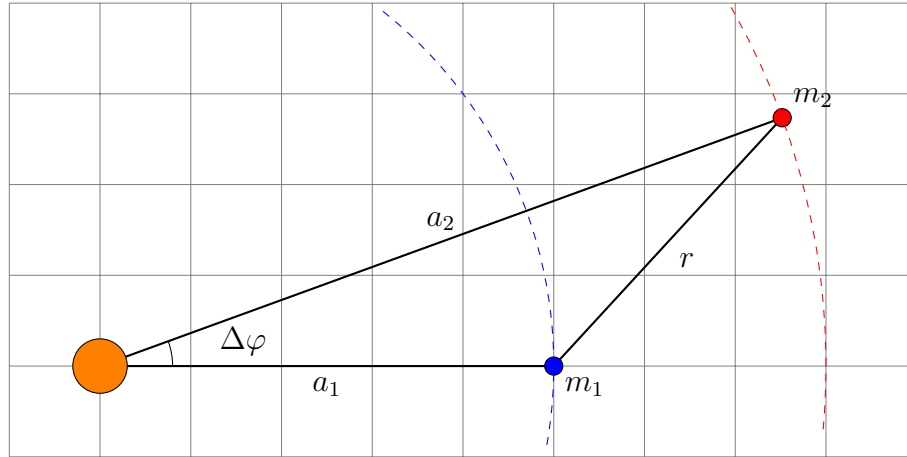
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{F}{m} \cdot \cos(\Delta\varphi).$$

Здесь $\Delta\varphi$ — это угол между скоростью тела и направлением на второе тело. В случае совпадающих орбит он равен углу между направлениями с Сатурна на эти два спутника.

Аналогичный результат можно получить, если рассматривать изменение кинетической энергии с учетом работы гравитационных сил со стороны Сатурна, совершаемую над телами.

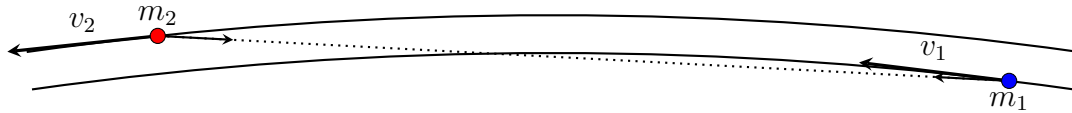
Пусть текущие координаты спутников в полярной системе координат — (a_1, φ_1) и (a_2, φ_2) соответственно. Будем считать, что $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ мало. Тогда расстояние между спутниками равно

$$r = \sqrt{(a_2 \cos \Delta\varphi - a_1)^2 + (a_2 \sin \Delta\varphi)^2} \approx \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (a_2 \Delta\varphi)^2}.$$



При этом $(a_2 - a_1) \leq \Delta a \ll r_{\min}$, из чего следует, что $r \approx a\Delta\varphi$.

Пусть линейная скорость, угловая скорость и масса одного из спутников равны v_1 , ω_1 и m_1 , линейная скорость и масса другого — v_2 , ω_2 и m_2 соответственно. Расстояние между спутниками — r . В начальный момент времени большие полуоси орбит спутников равны $a_{10} = a$ и $a_{20} = a + \Delta a$ соответственно, при этом $\omega_{10} > \omega_{20}$, то есть первый спутник догоняет второй.



Под действием гравитационных сил скорости тел изменяются.

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{1}{m_1} \cdot \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{m_2} \cdot \left(-\frac{Gm_1m_2}{r^2} \right), \\ \frac{dr}{dt} &= a \frac{d\Delta\varphi}{dt} = a(-\omega_1 + \omega_2). \end{aligned}$$

Здесь мы приняли $\cos \Delta\varphi$ равным 1, так как считаем $\Delta\varphi$ малым.

Свяжем разности линейных и угловых скоростей с разностью больших полуосей орбит. Обозначим $(a_2 - a_1)$ как δa , тогда

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= \sqrt{\frac{GM_c}{a_1}} - \sqrt{\frac{GM_c}{a_2}} \approx \sqrt{\frac{GM_c}{a} \left(1 - \frac{\Delta a_1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{GM_c}{a} \left(1 - \frac{\Delta a_2}{a} \right)}, \\ v_1 - v_2 &\approx \sqrt{\frac{GM_c}{a}} \left(1 - \frac{\Delta a_1}{2a} - 1 + \frac{\Delta a_2}{2a} \right) = v_{10} \cdot \frac{\delta a}{2a}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 - \omega_2 &= \sqrt{\frac{GM_c}{a_1^3}} - \sqrt{\frac{GM_c}{a_2^3}} \approx \sqrt{\frac{GM_c}{a^3} \left(1 - \frac{3\Delta a_1}{a}\right)} - \sqrt{\frac{GM_c}{a} \left(1 - \frac{3\Delta a_2}{a}\right)}, \\ \omega_1 - \omega_2 &\approx \sqrt{\frac{GM_c}{a^3} \left(1 - \frac{3\Delta a_1}{2a} - 1 + \frac{3\Delta a_2}{2a}\right)} = \omega_{10} \cdot \frac{3\delta a}{2a}.\end{aligned}$$

Тогда получим, что

$$\frac{dr}{dt} = -a\omega_{10} \cdot \frac{3\delta a}{2a} = \frac{3}{2}v_{10} \cdot 2\frac{v_2 - v_1}{v_{10}} = 3(v_2 - v_1).$$

Обозначим $v_2 - v_1$ как δv , тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\delta v}{dt} &= \frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}, \\ \frac{dr}{dt} &= 3\delta v.\end{aligned}$$

Перемножим эти два уравнения и получим

$$3\delta v \cdot \frac{d\delta v}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{3(\delta v)^2}{2} \right) = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{G(m_1 + m_2)}{r} \right).$$

Получаем закон сохранения:

$$3(\delta v)^2 + \frac{2G(m_1 + m_2)}{r} = \text{const.}$$

Записывая его для двух состояний, при $r \rightarrow \infty$ (без взаимодействия) и при $\delta v = 0$, получим

$$\frac{2G(m_1 + m_2)}{r_{\min}} = 3(\delta v_{\infty})^2.$$

$\delta v_{\infty} = (v_{20} - v_{10})$, то есть

$$|\delta v_{\infty}| = v_{10} \cdot \frac{\Delta a}{2a} = \frac{2\pi a}{T} \cdot \frac{\Delta a}{2a} = \pi \cdot \frac{\Delta a}{T}.$$

Получаем финальный ответ:

$$r_{\min} = \frac{2G(m_1 + m_2)}{3(\delta v_{\infty})^2} = \frac{2G(m_1 + m_2)T^2}{3\pi^2(\Delta a)^2} = 15.8 \text{ тыс. км.}$$

На самом деле спутники не «обмениваются» орбитами: более массивный спутник перемещается на меньшее расстояние, чем менее массивный. Однако после окончания взаимодействия расстояние между орбитами оказывается таким же, какое было и до взаимодействия (см. график далее). Последний обмен орбитами произошел в начале 2026 года, при этом Янус из внутреннего спутника снова стал внешним.

