

Содержание

10.7. Орлиный глаз	2
10.8. Древние часы	7
10.9. Светит мазер, светит ясный. . .	12

10.7. Орлиный глаз

Т.В. Мигаль, Е.К. Тюттикова

Посмотрите на негатив фотографии, приведенный ниже, и оцените как можно более точно высоту Солнца над горизонтом в момент съемки. Длина Международной космической станции равна 109 м, ширина – 73 м, высота ее орбиты – 400 км. Считайте, что нижний край фотографии совпадает с альмукантаратом.

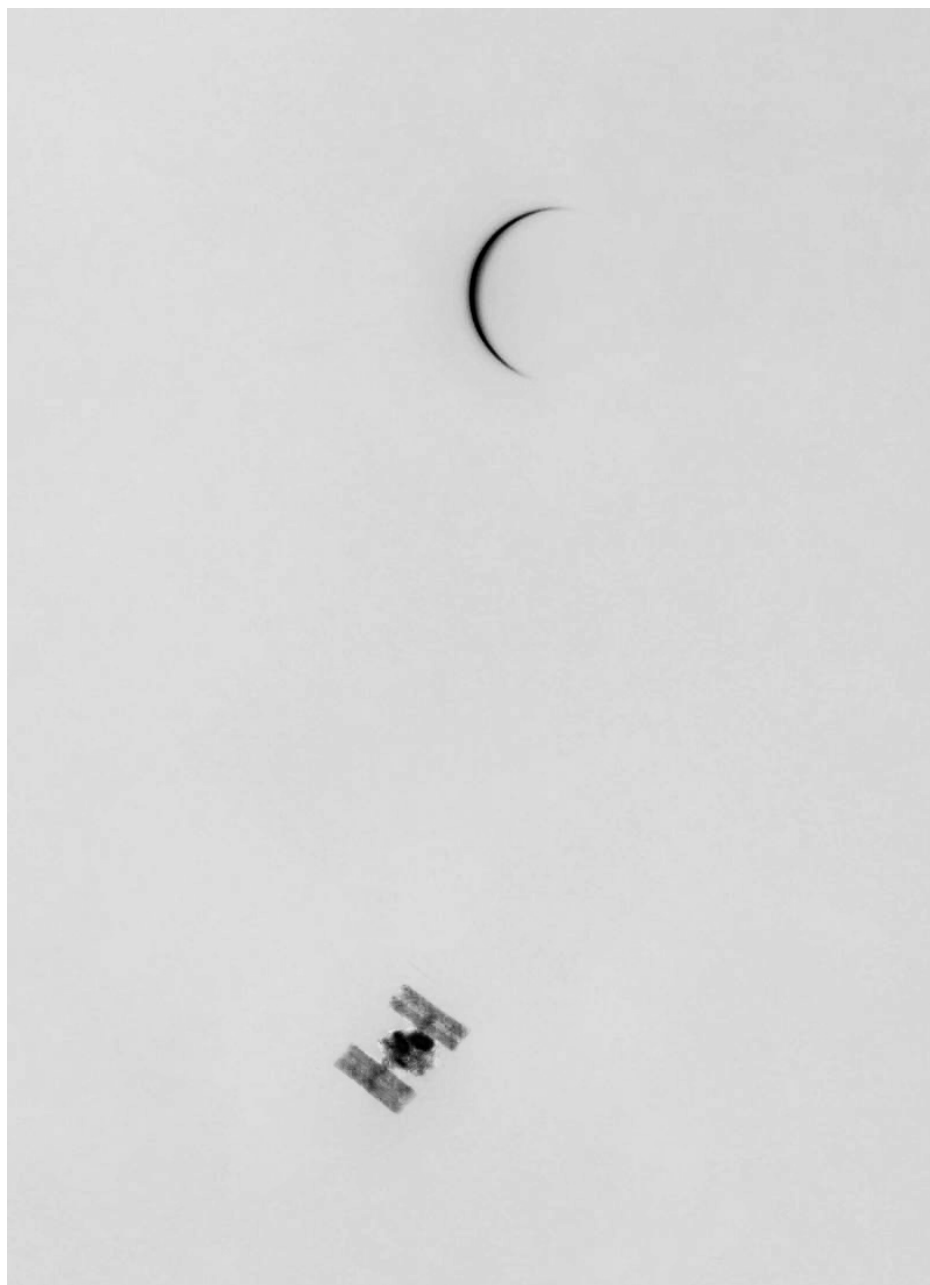


Рис. 1: Фотография к задаче «Орлиный глаз»

Решение.

Сначала отождествим объекты на фото. Внизу кадра находится Международная космическая станция, её можно легко опознать по характерной форме солнечных батарей. В верхней

части кадра находится некоторый объект сферической формы в малой фазе. По фазе объекта можно сразу определить, что это не внешний объект Солнечной Системы, и уж тем более не объект за её пределами. Также можно понять, откуда сделано фото: если мы предположим, что сделано оно было не с поверхности Земли, а на подлете к МКС, и отождествим сферический объект как Луну, то получим характерный размер МКС $15 - 20'$, что соответствует расстоянию до станции в $15 - 20$ км. При таком расстоянии мы бы не получили настолько размытое и некачественное фото станции, а, значит, расстояние до неё существенно больше, а объект на фото не является Луной. В итоге получаем, что фото было снято с поверхности Земли. Проведем оценку его углового размера, сравнивая с возможными угловыми размерами МКС. Для этого сначала поймем, под каким углом к нам видна станция. Заметим, что прямые углы солнечных батарей на фото остались прямыми, а значит, сжатие из-за поворота станции относительно картинной плоскости, если оно и есть, происходит только по ширине или длине. Измерим их соотношение на фото. Получили 9.0 усл. ед. в длину и 6.5 усл. ед. в ширину.

$$\frac{6.5}{9} = 0.72 > \frac{73}{109} = 0.67$$

Получается, что на фото соотношение ширины и длины немного больше, чем в реальности, то есть станция слегка повернута так, что ее кажущаяся длина чуть меньше реальной, а ширина практически не искажена. Значит, именно значением ширины станции мы будем пользоваться при дальнейших расчетах. Также мы будем использовать значение для длины МКС, если бы она располагалась в картинной плоскости. Оно равно $9.0 \cdot 0.72 / 0.67 = 9.7$ усл. ед.

Определим возможные угловые размеры МКС при наблюдении с поверхности Земли:

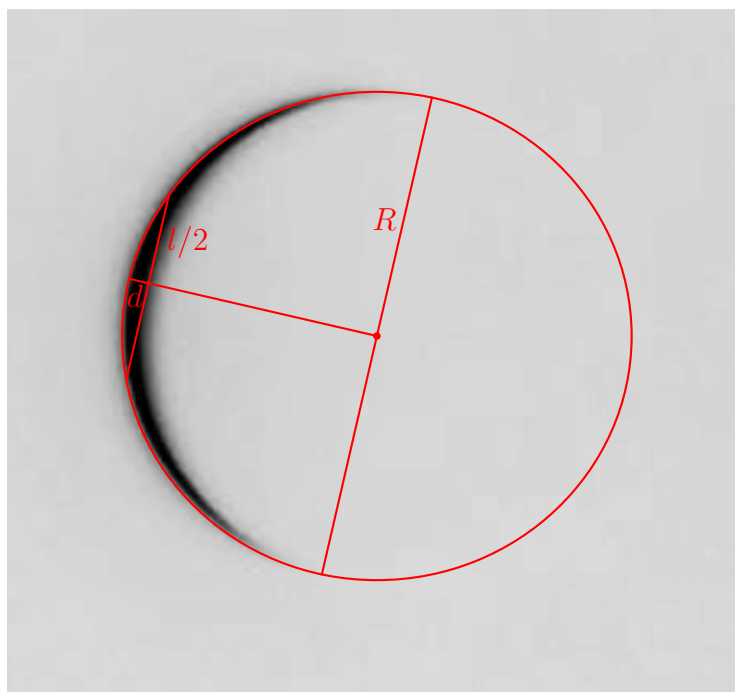
$$\alpha_{max} = \frac{l}{H} = \frac{109}{400 \cdot 10^3} = 56'' - \text{максимальный угловой размер МКС, в зените.}$$

$$\alpha_{min} = \frac{l}{\sqrt{(R_{\oplus} + H)^2 - R_{\oplus}^2}} = \frac{109}{2290} = 10'' - \text{минимальный угловой размер, у горизонта.}$$

При этом диаметр верхнего объекта равен 14.2 усл. ед. Таким образом, его угловой размер составляет от $15''$ (в случае минимального размера МКС) до $80''$ (при максимальном размере МКС). Значит, нам не подходят ни Луна (угловой размер около 0.5°), ни Меркурий (максимальный угловой размер $11''$). Таким образом, остаётся единственный возможный кандидат на объект сверху на фото – Венера.

Теперь мы можем более точно определить угловой масштаб фотографии, для этого определим фазу Венеры. Измерим диаметр планеты и хорду, проведенную по касательной к внутренней части серпа в самом толстом его месте. Получим, что длина хорды равна 0.79 радиуса Венеры. Значит, по теореме Пифагора можно найти фазу:

$$\Phi = \frac{1}{2R} \left(R - \sqrt{R^2 - (0.79R/2)^2} \right) = 0.041$$



Тогда фаза равна 0.041, а фазовый угол – 156.6° . Острые углы при Солнце (γ) и Земле (β) можно найти из системы уравнений:

$$\gamma + \beta = 180^\circ - 156.6^\circ = 23.4^\circ$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a_{\oplus} - a_{\text{♀}}}{a_{\text{♀}}} = 0.39$$

Отсюда получаем $\beta = 16.8^\circ$ – угловое расстояние от Венеры до Солнца. $\gamma = 6.6^\circ$

Вычислим более точное расстояние до Венеры:

$$r = \sqrt{a_{\oplus}^2 + a_{\text{venus}}^2 - 2a_{\oplus}a_{\text{venus}} \cos \gamma} = 0.30 \text{ a.e.}$$

Угловой размер Венеры:

$$\alpha_{\text{♀}} = \frac{2 \cdot 6050}{0.30 \cdot 1.5 \cdot 10^8} = 55.5''.$$

Получаем масштаб снимка: 1 усл. ед. = $3.9''$. На расстоянии МКС 109 метров видны под углом $3.9 \cdot 9.7 = 37.9''$. А расстояние от наблюдателя до МКС равно $r_1 = 590$ км.

В треугольнике «МКС – наблюдатель – центр Земли» запишем теорему косинусов и выразим угол при наблюдателе:

Ранее мы уже получили угловое расстояние между Венерой и Солнцем, оно равно 16.8° . Расстояние между Венерой и МКС составляет порядка $5'$ и с нашей точностью пренебрежимо мало. Измерим угол в картинной плоскости с центром в Венере между направлениями на зенит и на Солнце. Сделать это можно, проведя вертикальную прямую (в направлении зенита,

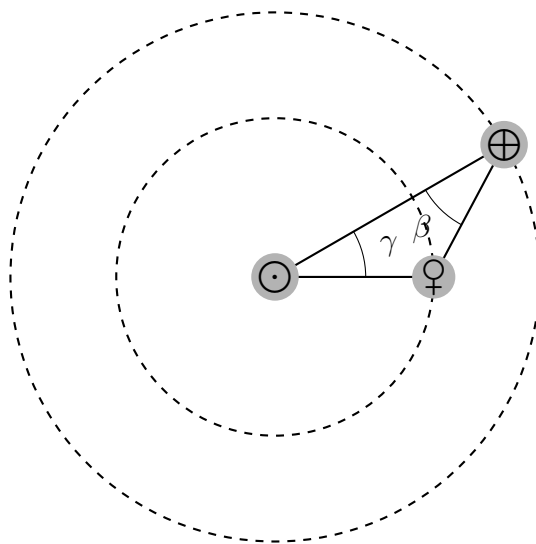


Рис. 2: Взаимное расположение планет и Солнца

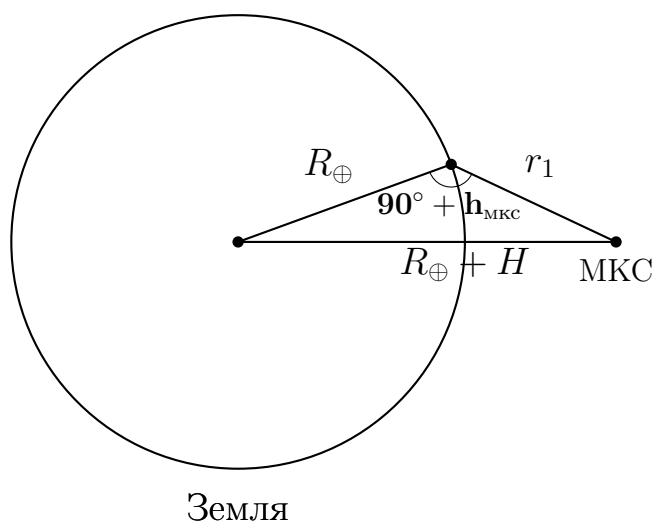


Рис. 3: Расположение МКС относительно точки проведения съемки

так как по условию горизонтальные линии - альмуkantараты) и перпендикуляр к линии, соединяющей концы серпа Венеры (направление на Солнце) и измерив угол между этими линиями. Этот угол получился равным $\theta = 77^\circ$.

Для треугольника «Венера – Солнце – зенит» запишем сферическую теорему косинусов и найдем таким образом высоту Солнца:

$$\cos(90^\circ - h_\odot) = \cos(90^\circ - h_{\text{МКС}}) \cos \beta + \sin(90^\circ - h_{\text{МКС}}) \sin \beta \cos \theta$$

$$h_\odot = \arcsin(\sin h_{\text{МКС}} \cdot \cos \beta + \cos h_{\text{МКС}} \sin \beta \cos \theta) = 42.4^\circ \sim 42^\circ$$

Если же мы считаем, что фото перевернуто и горизонт находится сверху, то теорема косинусов примет следующий вид:

$$\cos(90^\circ - h_\odot) = \cos(90^\circ - h_{\text{МКС}}) \cos \beta + \sin(90^\circ - h_{\text{МКС}}) \sin \beta \cos(180^\circ - \theta)$$

$$h_\odot = \arcsin(\sin h_{\text{МКС}} \cdot \cos \beta + \cos h_{\text{МКС}} \sin \beta \cos(180^\circ - \theta)) = 35.2^\circ \sim 35^\circ$$

Итоговый ответ: высота Солнца составляет 42° или 35° в зависимости от ориентации картинки.

10.8. Древние часы

А. В. Соколов

При раскопках древней обсерватории была обнаружена шкала настенных солнечных часов. Ни гномона, ни информации о месте размещения часов не сохранилось. Используя данную шкалу, определите широту места размещения часов и угол поворота вертикальной стены, на которой они были размещены, относительно направления на юг.

На шкале точка В – это точка, к которой монтируется гномон, направленный на полюс мира; точка А – проекция вершины гномона на плоскость стены. точка D – вершина гномона. Нижний край изображения расположен параллельно горизонту. Также добавлена схематическая вставка, поясняющая устройство гномона.

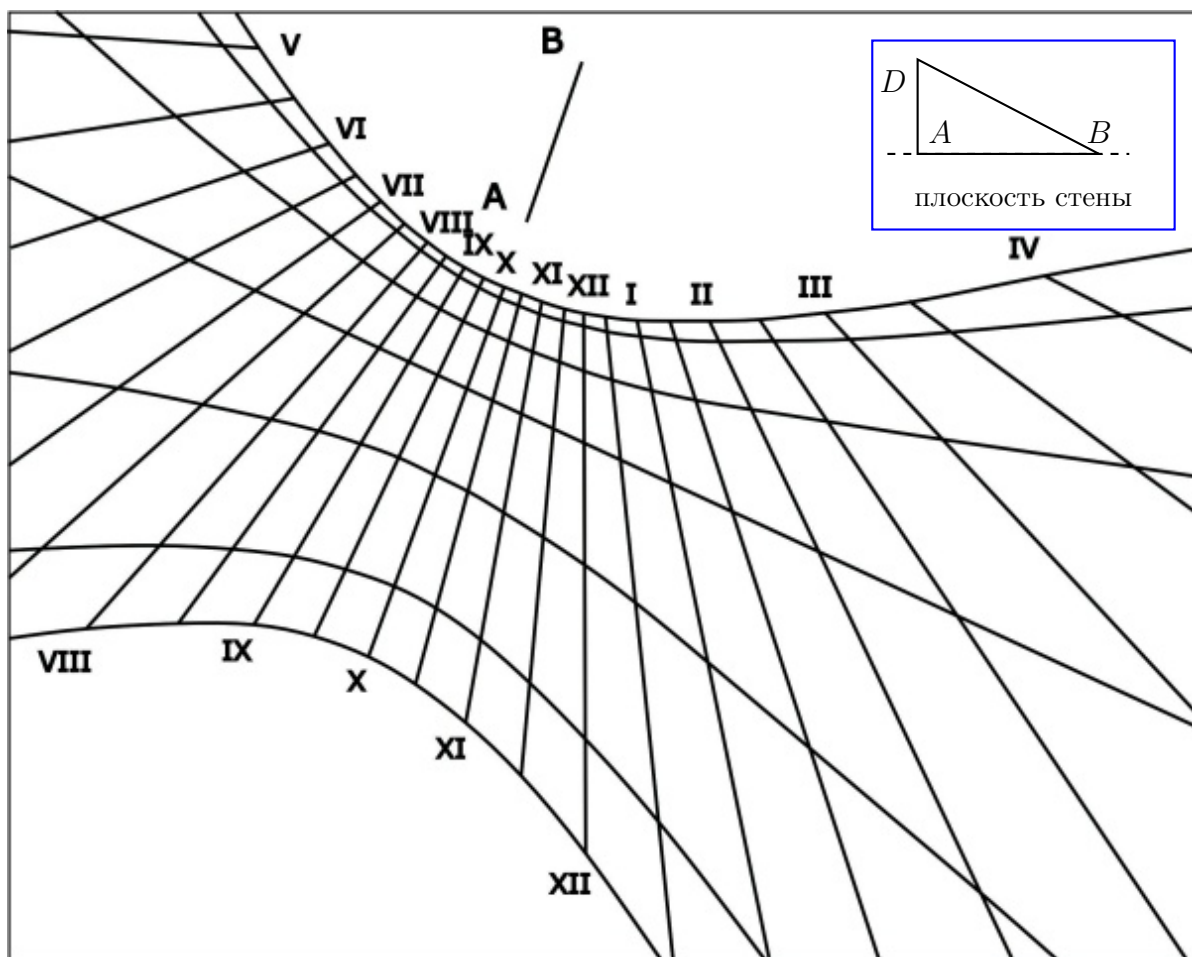


Рис. 4: Шкала настенных часов. Вставка, поясняющая, как устроен гномон, сделана не в масштабе.

Решение.

Прежде чем что-то снимать с изображения, проанализируем, что нам представлено.

На чертеже обозначена точка А – проекция вершины гномона на плоскость стены. Размечена часовая сетка, и линия XII – XII является вертикальной, потому что азимут Солнца в момент верхней кульминации одинаковый во все дни года. В остальное время, например, в 11 часов, азимут Солнца в разные дни года будет разный.

Определимся с полушарием. Суточное движение Солнца происходит с востока на запад в обоих полушариях. И если полушарие северное, то часовые отметки должны быть расположены на стене слева направо. А в южном полушарии – наоборот. Видим, что перед нами часы для северного полушария.

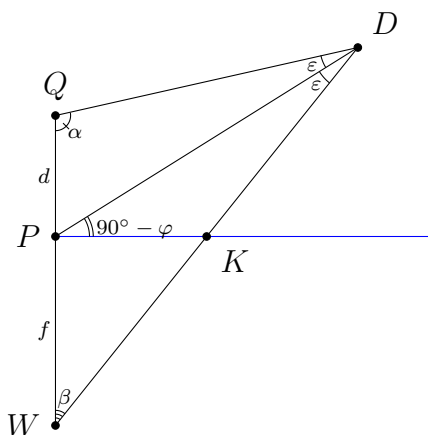
Две кривые, размеченные римскими цифрами, – это точки, где заканчивается тень гномона. В отличие от горизонтальных солнечных часов, тень на вертикальных часах тем длиннее, чем выше Солнце. Ближняя к гномону граница тени соответствует дню зимнего солнцестояния в северном полушарии, дальняя граница (видна частично с отметками от VIII до XII) соответствует дню летнего солнцестояния. Прямая линия посередине между ними – это траектория, по которой движется конец тени в дни равноденствий.

Если бы стена стояла строго по линии восток – запад, а гномон был направлен строго на юг, то картинка была симметричной относительно вертикальной оси рисунка.

Для поиска широты нам нужно рассмотреть плоскость небесного меридиана, которая содержит в себе линию XII-XII.

Первый этап. Определение широты.

Проанализируем размер тени по полуденной линии (XII-XII) в дни равноденствий и солнцестояний. Рассмотрим следующий рисунок, на котором покажем, как образуются тени в дни равноденствий и солнцестояний. Линия QPW – вертикальная поверхность стены. Точка D – вершина гномона, P – тень в дни равноденствий, Q и W – тени в дни зимнего и летнего солнцестояний. Угол ε – угол наклона плоскости эклиптики к небесному экватору.



Измерим отрезки $PQ = d = 16$ мм и $PW = f = 50$ мм по рисунку, данному в условии. Далее запишем теорему синусов для треугольника PQD:

$$\frac{d}{\sin(23.5^\circ)} = \frac{DP}{\sin(\alpha)}.$$

Также запишем теорему синусов для треугольников PWD:

$$\frac{f}{\sin(23.5^\circ)} = \frac{DP}{\sin(\beta)}.$$

Для треугольника QDW применим теорему о сумме углов:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 2\varepsilon = 180^\circ - 2 \cdot 23.5^\circ = 133^\circ.$$

Теперь запишем отношение выражений, полученных из теоремы синусов:

$$\frac{\frac{d}{\sin(23.5^\circ)}}{\frac{f}{\sin(23.5^\circ)}} = \frac{\frac{\rho}{\sin(\alpha)}}{\frac{\rho}{\sin(\beta)}}.$$

Таким образом получаем:

$$\frac{d}{f} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(133^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(133^\circ) \cos(\alpha) - \cos(133^\circ) \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(133^\circ)}{\operatorname{tg}(\alpha)} - \cos(133^\circ),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(133^\circ)}{d/f + \cos(133^\circ)} \approx -2.02.$$

В итоге получаем значения $\alpha = 116^\circ$ и $\beta = 133^\circ - \alpha = 17^\circ$.

Теперь рассмотрим треугольник PKW. Его внешний угол $\angle PKD$ можно найти как сумму углов $\angle KPW = 90^\circ$ и $\angle PWK = \beta$. Получаем $\angle PKD = 90^\circ + \beta = 107^\circ$. Используя теорему о сумме углов для треугольника PKS, получим:

$$\varphi = 90^\circ - (180^\circ - \angle PKD - \varepsilon) = 107^\circ + 23.5^\circ - 90^\circ = 40.5^\circ \text{ с.ш.}$$

.

Теперь перейдем ко **второму вопросу задачи**. Определим угол поворота стены от линии «восток – запад». Обозначим этот угол за α .

Мы можем решать стереометрическую задачу и подумать над какой-то плоскостью, в которой искомый угол можно представить максимально удобно. В качестве такой плоскости возьмем плоскость параллельную горизонту и проведем ее через точку А.

Проекция этой плоскости на рисунок – горизонтальная линия, проходящая через точку А и точку пересечения линии равноденствий и линии VI – VI. Обозначим эту точку V, сюда указывает тень гномона в момент восхода Солнца в дни равноденствий.

Теперь выполним построение в этой плоскости. Отрезок VD соответствует направлению запад-восток. Точка B' – проекция точки В на луч VA. Отрезок BD направлен вдоль оси мира в сторону юга. Значит его проекция $B'D$ лежит в плоскости горизонта и направлено на точку юга. Следовательно $B'D \perp VD$.

Для треугольника ADV

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{AV}$$

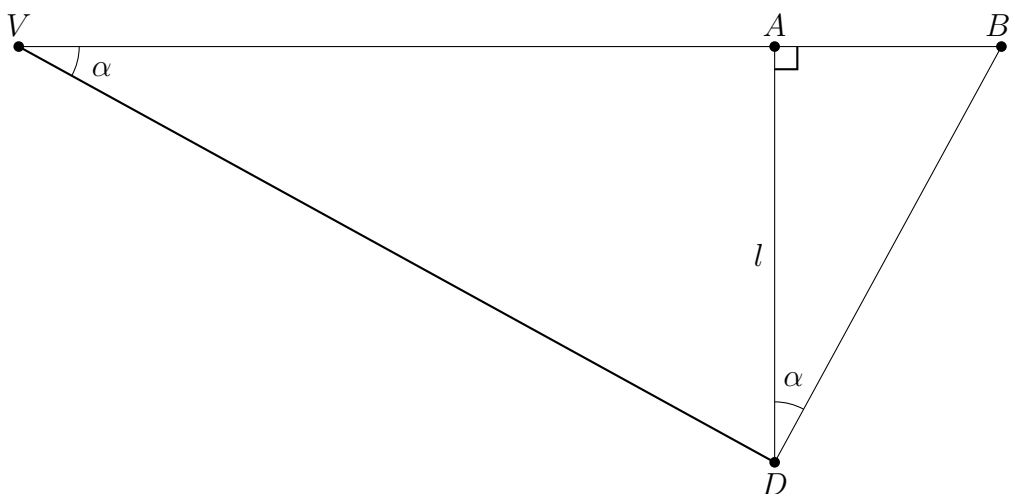


Рис. 5: Поясняющая схема ко второму вопросу задачи. Рисунок в плоскости параллельной горизонту и проходящей через точку А.

Для треугольника $AB'D$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB'}{AD}.$$

Избавимся от AD :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{AB'}{AV}.$$

Снимем данные со шкалы: $AV = 52$ мм, $AB' = 8$ мм. Тогда угол $\alpha \approx 21^\circ$.

То есть нормаль к плоскости стены повернута на -21° относительно направления на юг по азимуту, или 21° на восток.

Альтернативные решения.

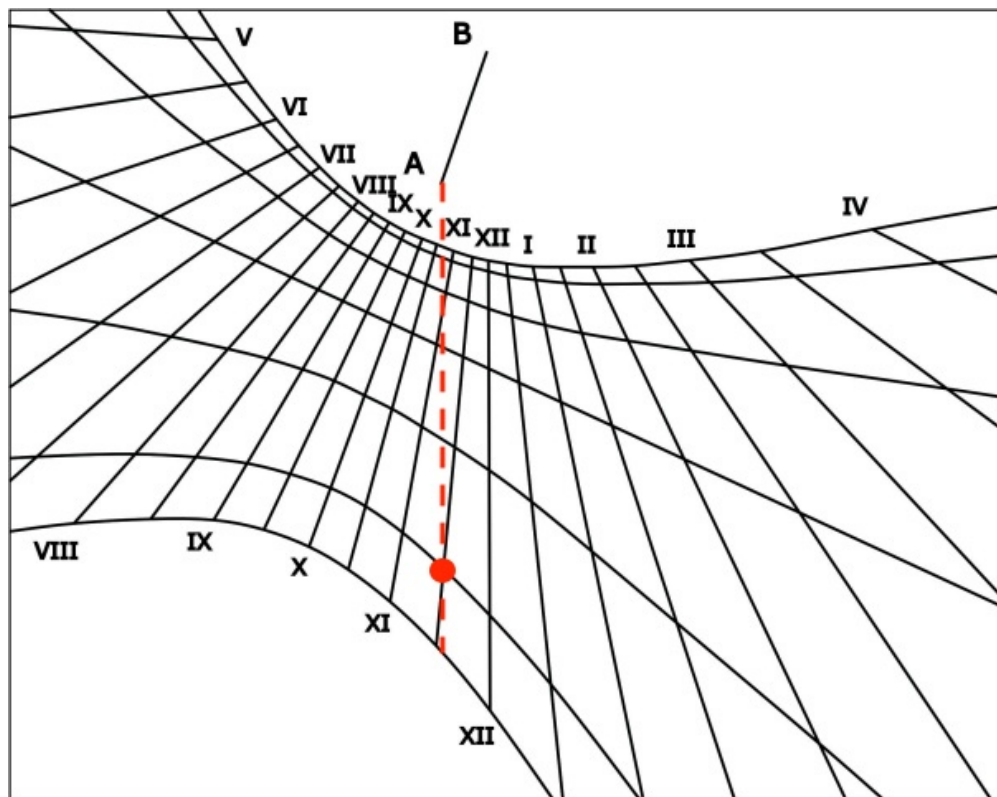
Можно было действовать и по-другому. Заметим, что прямая, соответствующая времени 10 часов, идёт точно в точку А. Значит, любой объект, образующий точки на этой прямой и её продолжении, имеет часовой угол -30° . Рассмотрим гипотетическое Солнце, в предположении, что его склонение могло бы быть и меньше, чем $-\varepsilon$. Тогда тень от вершины гномона придёт в точку А, когда такое Солнце окажется на горизонте. При этом, так как точка А лежит на прямой 10 часов, часовой угол Солнца в этот момент будет равен -30° . Также из вида картинки мы понимаем, что гномон смотрит в восточную область. Понятно, что азимут такого Солнца в момент, когда тень от вершины гномона будет в точке А, и есть азимут, на который показывает гномон. Осталось найти азимут такого Солнца. Используем формулы для часового угла/азимута восхода/захода:

$$\cos t = -\tan \varphi \tan \delta.$$

Подставляя известные нам φ и t , получаем $\delta = -45.4^\circ$. В итоге получаем азимут восхода Солнца, эквивалентный азимуту, на который показывает гномон:

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \Rightarrow A \approx -20.5^\circ$$

Рассмотрим ещё один способ.



Опустим из точки A перпендикуляр вниз. Все точки на этой прямой – это позиции конца тени гномона в моменты, когда Солнце имеет один и тот же азимут. Возьмём любую точку на этой прямой и определим её часовой угол и склонение. Для простоты можно взять точку, отмеченную на рисунке. Для неё $\delta = 20^\circ$, $t = -7.5^\circ$. Теперь осталось написать сферические теоремы для параллактического треугольника. Начнём с того, что найдём зенитное расстояние Солнца в этот момент:

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t.$$

Отсюда получаем $z = 21.5^\circ$. Теперь через теорему синусов:

$$\frac{\sin 180 - A}{\sin 90 - \delta} = \frac{\sin t}{\sin z}.$$

В итоге получаем угол, на который сдвинута стена относительно линии «восток – запад»:

$$A \approx -19.6^\circ.$$

Популярная ошибка. Участники считают, что угол между лучом BA и отвесной линией является углом поворота стены. Это принципиально не верно.

10.9. Светит мазер, светит ясный...

В. Б. Игнатьев, М. В. Кузнецов

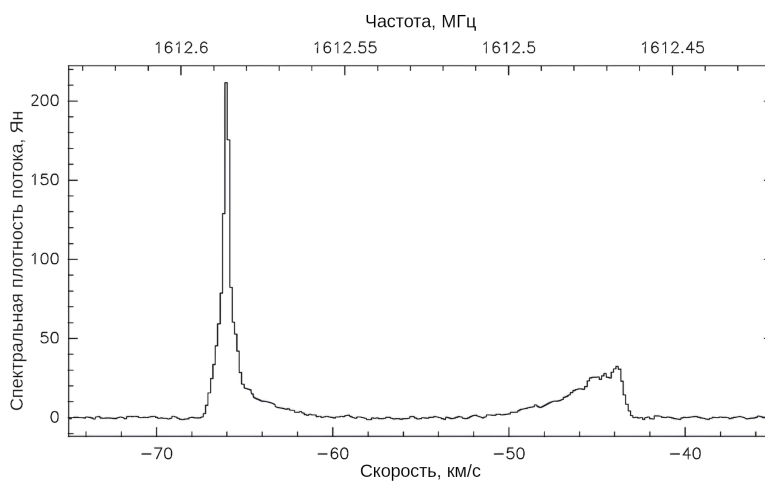
В газопылевых оболочках, окружающих звезды-гиганты на поздних стадиях эволюции, иногда наблюдаются источники мазерного излучения. В этой задаче мы не будем касаться природы мазеров: важно, что каждый отдельный мазер можно считать точечным объектом, а его излучение — монохроматическим. Мазеры концентрируются в тонких сферических оболочках, радиусы которых много больше размеров фотосферы звезды. Источником энергии для мазеров является излучение звезды: переменность звезды приводит к переменной яркости мазеров.

Вам предоставлены графики, полученные при исследовании области $\text{OH}127.8 + 0.0$:

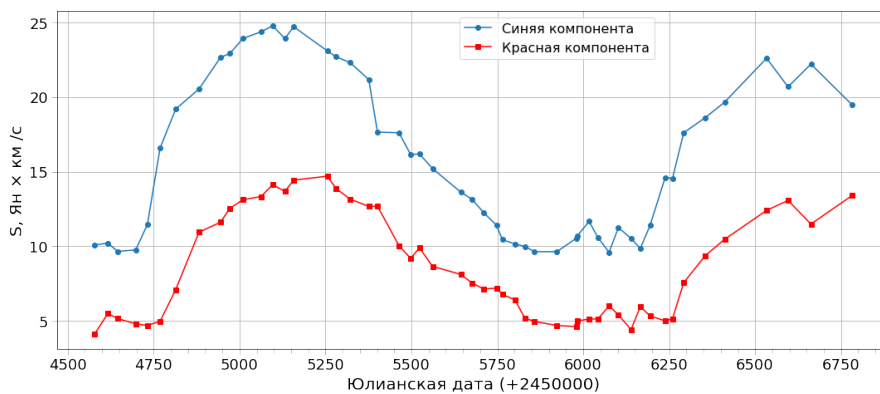
- А.** Спектр мазерного излучения этой области, содержащей много отдельных мазеров. По горизонтальной оси сверху отложена частота наблюдения, а снизу — соответствующая ей доплеровская скорость. По вертикальной оси отложена спектральная плотность потока в янских ($1 \text{ Ян} = 10^{-26} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ Гц})$). Одна из ярких компонент линии соответствует части оболочки, движущейся от звезды к наблюдателю («синяя компонента»), а другая — в противоположную сторону («красная» компонента).
- В.** Зависимость относительной интенсивности «синей» и «красной» компонент от времени.
- С.** Зависимость углового расстояния отдельных мазеров от звезды от их лучевых скоростей.

Определите:

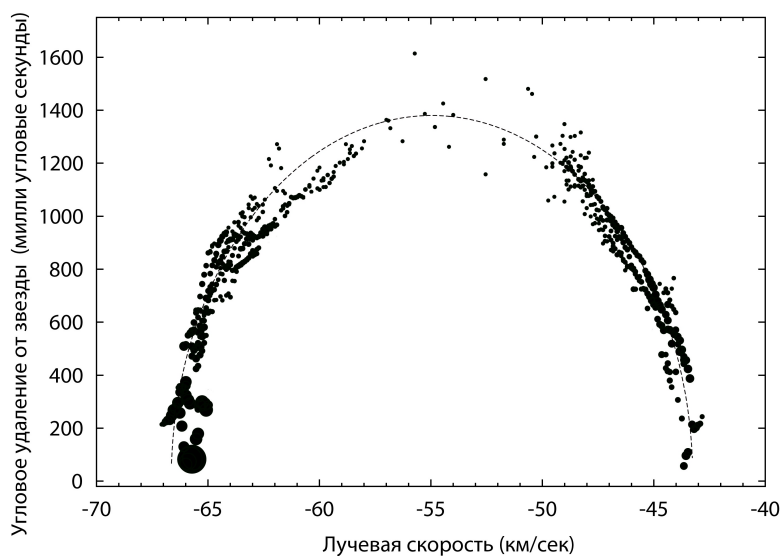
- А)** Лабораторную частоту исследуемой мазерной линии с точностью до 10 кГц;
- В)** Линейный размер области мазерного излучения (в астрономических единицах);
- С)** Расстояние до исследуемой области (в парсеках);
- Д)** Является ли объект внегалактическим, принадлежит нашей Галактике или является объектом Солнечной системы?



(a) Спектр области мазерного излучения.



(b) Кривая блеска мазерного излучения



(c) Зависимость углового расстояния от звезды отдельных мазеров от их лучевых скоростей.

К задаче 2

Решение. Для ответа на первый вопрос необходимо вспомнить формулу доплеровского смещения спектральных линий. Пусть λ и λ_0 – наблюдаемая и лабораторная длины волн, v – радиальная скорость излучателя относительно наблюдателя, c – скорость света. Тогда изменение длины волны света из-за движения источника выражается формулой:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}.$$

Но нам на спектре дана шкала частот, а не длин волн. Частота излучения связана с длиной волны как $\nu = c/\lambda$. Тогда левая часть формулы для эффекта Доплера принимает вид

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu_0}} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu}.$$

Отсюда получаем зависимость ν_0 от ν и v :

$$\nu_0 = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \nu.$$

Определив на спектре пару значений ν и v , получим $\nu_0 = 1612.23$ МГц. Разумеется, измерений следует сделать несколько, а результат усреднить.

Альтернативный вариант. Можно заметить, что на графике равным изменениям скорости соответствуют равные изменения частоты. Это следует из формулы эффекта Доплера:

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_2}{c}} - \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_1}{c}} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{v_2}{c}\right) - \nu_0 \left(1 - \frac{v_1}{c}\right) = -\frac{\Delta v}{c} \nu_0.$$

Таким образом, достаточно аккуратно определить разность частот, соответствующую изменению скорости на фиксированную величину, и с ее помощью вычислить частоту, соответствующую нулевой скорости. Разумеется, результат при этом получается такой же: $\nu_0 = 1612.23$ МГц.

Обратим внимание на зависимость потока излучения для «красной» и «синей» компонент. Изменения повторяют друг друга, но «красная» компонента запаздывает по отношению к «синей» примерно на 60 дней. Почему так происходит? Источником энергии для мазеров является излучение звезды. Звезды-гиганты на поздних стадиях эволюции обычно переменные, и изменения в яркости звезды сказываются на яркости мазеров в окружающей звезду оболочке. Поскольку оболочка сферическая, мощность излучения изменяется у всех мазеров одновременно, а видимая нами задержка возникает из-за конечности скорости света и громадной величины оболочки. Следовательно, диаметр области мазерного излучения равен 60 световых дней или

$$D = 60 \text{ св. дней} = 60 \cdot 86\,400 \text{ с} \cdot 300\,000 \text{ км/с} \approx 1.56 \cdot 10^{12} \text{ км} \approx 10\,400 \text{ а. е.},$$

а ее радиус $R \approx 5200$ а. е.

Из рисунка (с) можем определить, что угловой радиус области мазерного излучения составляет $\rho'' = 1.3'' - 1.4''$. Тогда расстояние до исследуемой области равно

$$r = \frac{R}{\rho''} = \frac{5200 \text{ а. е.}}{1.3''} = 4000 \text{ пк} = 4 \text{ кпк}.$$

Для значения $\rho'' = 1.4''$ мы получили бы $r = 3.7$ кпк.

Расстояние до звезды составляет около 4 килопарсек. Это расстояние меньше, чем средний радиус нашей галактики 16 кпк, поэтому мы точно можем сказать, это объект принадлежит нашей Галактике. Разумеется, в Солнечной системе нет звезд-гигантов, поэтому ей этот объект принадлежать не может.

Замечание 1. Ответить на последний вопрос с большой степенью уверенности можно, не вычисляя расстояние. Судя по графикам, скорость звезды составляет около 55 км/с, что соответствует характерным относительным скоростям в диске нашей Галактики. Скорости галактик составляют обычно сотни и даже тысячи километров в секунду, хотя, конечно, нельзя на сто процентов утверждать, что не найдется близкая галактика, в которой объект движется с подходящей скоростью.

Разумно также заметить, что для внегалактических источников, «подсвечиваемых» излучением звезды, угловой размер $\sim 2''$ слишком велик.

Замечание 2. По условию, наблюдаемое излучение формируется в тонкой оболочке, окружающей звезду. Оболочка вместе со звездой движется относительно наблюдателя и вместе с тем удаляется во все стороны от звезды. Тогда разность скоростей приближающейся и удаляющейся от нас компонент спектра равна удвоенной скорости расширения. Измерения можно провести как по спектру, так и по зависимости углового расстояния от лучевой скорости. Искомое значение равно 11 – 11.5 км/с.

Типичная ошибка заключается в попытке оценить размер области излучения по характерной скорости расширения оболочки и периоду «колебаний» яркости звезды ($P \approx 1500$ сут. между двумя максимумами интенсивности). В таком случае радиус области (некорректно) оценивается как $vP \approx 10$ а. е., откуда расстояние до мазера ~ 6 пк.

Лишь немногие участники, получив такую величину расстояния, сочли необходимым заметить, что в ближайших по галактическим меркам окрестностях Солнечной системы подобные звёзды-гиганты на поздних стадиях эволюции, к счастью, отсутствуют.