

XXXI Всероссийская олимпиада по астрономии

Заключительный этап — 2024 г.

Теоретический тур

Решения и критерии

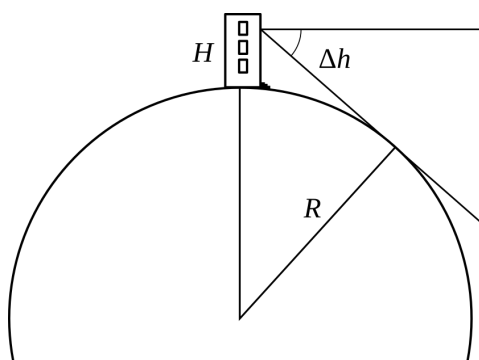
9.1. ВЫСОКО СИЖУ, ДАЛЕКО ГЛЯЖУ

(А. А. Автаева)



Условие. Молодой астроном, подходя к своему дому, заметил, что нижний край Солнца только-только коснулся горизонта. Лифт не работал, и астроному пришлось идти пешком на 10 этаж. Когда он зашел в квартиру, то сразу подошел к окну, и оказалось, что нижний край Солнца все также находится на горизонте. Сколько времени астроном мог наблюдать закат из своего окна, если на подъем на один этаж он в среднем тратил 18 секунд? Могло ли это событие произойти в России в день равноденствия? Высота одного этажа равна 3 метра, а первый этаж приподнят на 1 метр над поверхностью земли. Рефракцией пренебречь.

Решение. Для того, чтобы подняться на 10 этаж астроному нужно преодолеть 9 этажей и 1 метр. Значит он поднимается на высоту $H_1 = 3 \cdot 9 + 1 = 28$ метров. Наверх он поднялся за $9\frac{1}{3} \cdot 18 = 168$ секунд.



Предположим, что рост астронома $H_2 = 1.7$ метра. Понижение горизонта на высоте $H = H_1 + H_2$ составляет

$$\cos \Delta h = \frac{R}{R + H}, \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \arccos \left(\frac{R}{R + H} \right) \approx 0.175^\circ \approx 10.5'.$$

Здесь R — радиус Земли. Для простоты вычислений эту формулу можно было упростить, воспользовавшись формулами из справочных данных для приближенных значений функций при малых x . Поскольку $\Delta h \ll 1$ и $R/H \ll 1$, то

$$\cos \Delta h \approx 1 - \frac{\Delta h^2}{2}, \quad \frac{R}{R + H} = \left(\frac{R + H}{R} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{H}{R} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{H}{R}.$$

Приравнивая правые части, получим

$$\frac{\Delta h^2}{2} = \frac{H}{R}, \quad \Delta h = \sqrt{\frac{2H}{R}} \approx 0.00305 \text{ рад} \approx 0.175^\circ \approx 10.5'.$$

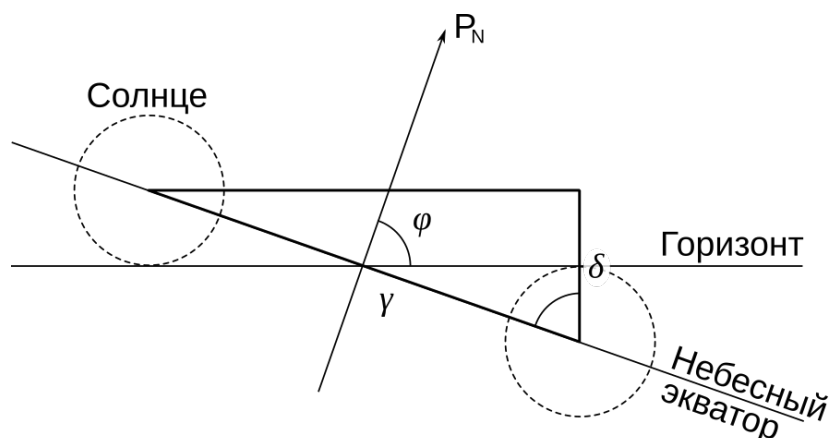
Заметим, что уже для стоящего прямо на земле наблюдателя уже есть понижение горизонта на $2.5'$. Получается, что высота Солнца уменьшилась на $8'$ за 168 секунд. Поскольку угловой размер Солнца составляет около $\delta = 30'$, то закат для астронома будет продолжаться в течение $T = 630$ с или 10.5 мин.

В день равноденствия Солнце находится на небесном экваторе. За время T Солнце, двигаясь вдоль небесного экватора из-за суточного вращения небесной сферы, проходит угловое расстояние

$$\gamma = 360^\circ \frac{630}{86400} \approx 2.6^\circ.$$

За это время Солнце погружается на свой диаметр δ . Тогда широта места наблюдения

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) \approx 79^\circ.$$



Параллель 79° проходит далеко на севере. Здесь нет городов, а значит, нет высоких зданий. Поэтому описываемые события не могли происходить в день равноденствия.

Система оценивания

- | | |
|--|---------|
| 1. Определение высоты H_1 | 2 балла |
| При ошибке на этом этапе все остальные оцениваются в полном объеме. | |
| 2. Время подъема на 10 этаж | 1 балл |
| 3. Понижение горизонта. Вывод формул необязателен. | 2 балла |
| Если не учтен рост астронома, то 1 балл. | |
| 4. Время заката | 1 балл |
| Участник может использовать угловой диаметр Солнца от $30'$ до $33'$. | |
| 5. Определение пути Солнца γ | 1 балл |
| 6. Широта места наблюдения | 2 балла |
| 7. Вывод (при правильном предыдущем решении) | 1 балл |

Максимальная оценка за задачу **10 баллов**.

9.2. ШМИДТ И КАССЕГРЕН

(Е. Н. Фадеев)



Условие. Астроном-любитель навел свой телескоп системы Шмидт-Кассегрен с диаметром входного отверстия 20 см на Юпитер. Затем он надел на объектив телескопа крышку с отверстием посередине диаметром 15 см и обнаружил, что яркость Юпитера упала в 2 раза. Во сколько раз упадёт яркость по сравнению с изначальной, если диаметр отверстия окажется 10 см? Если 5 см? Выразите эту величину в звездных величинах во всех трех случаях. Во сколько раз изменится видимый в телескоп угловой размер планеты в каждом случае?

Решение. Яркость видимого в телескоп Юпитера, зависит от площади собирающей поверхности. Надо принять во внимание, что в телескопах системы Шмидт-Кассегрен используется вторичное зеркало, установленное в середине входного отверстия. Оно обычно приклеивается непосредственно к коррекционной пластине, установленной на переднем конце трубы телескопа. Запишем отношение рабочих площадей объектива с крышкой и без:

$$\frac{20^2 - d^2}{15^2 - d^2} = 2.$$

Решив это уравнение получаем квадрат диаметра вторичного зеркала: $d^2 = 50 \text{ см}^2$. Теперь легко можно ответить на поставленные вопросы. В первом случае падение яркости составит

$$\frac{20^2 - 50}{10^2 - 50} = 7 \text{ раз},$$

а не 4, как получилось бы, если бы мы забыли про существование вторичного зеркала. Во втором случае диаметр отверстия $d \approx 7 \text{ см}$ меньше диаметра вторичного зеркала. Поэтому вся собирающая свет поверхность зеркала будет закрыта. Можно сказать, что яркость упадет в бесконечное число раз.

Падение яркости в звездных величинах определим с помощью формулы Погсона:

$$\Delta m_{15} = 2.5 \lg 2 \approx 0.75^m, \quad \Delta m_{10} = 2.5 \lg 7 \approx 2.1^m.$$

В последнем случае опять имеем формально бесконечную разность звездных величин.

Угловой размер Юпитера зависит от увеличения телескопа, которое, в свою очередь, зависит от отношения фокусных расстояний объектива и окуляра. Поскольку эти величины астроном не изменял, то угловой размер не изменится.

Система оценивания

- | | |
|---|------------|
| 1. Принимаемый поток зависит от площади свободного входного отверстия | 1 балла |
| 2. Падение блеска с диафрагмой 10 см | 2 балла |
| При ответе «4 раза» выставляется 1 балл. | |
| 3. Падение блеска с диафрагмой 5 см | 2 балла |
| Оценивается только в случае правильного ответа. | |
| 4. Падение блеска в звездных величинах (3 случая) | по 1 баллу |
| Если участник не учитывал вторичное зеркало, то оценивается только звездная величина при диафрагме 15 см. | |
| 5. Угловой размер не меняется | 2 балла |

Максимальная оценка за задачу **10 баллов**.

9.3. ЗАГАДОЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ

(А. М. Ажакин)



Условие. За 32 года гелиоцентрическое угловое расстояние между некоторой одиночной звездой, максимальная геоцентрическая лучевая скорость которой наблюдается каждый год около 23 сентября, и точкой весеннего равноденствия изменилось на $16'$. Параллакс звезды равен $\pi = 0.0001''$. На какой приблизительно максимальной высоте в Москве ($\varphi = 55^\circ$ с. ш.) бывает эта звезда?

Решение. Параллакс звезды крайне мал, поэтому изменение углового расстояния вызвано точно не собственным движением или параллактическим смещением. Аберрация света также не могла вызвать такого большого изменения углового расстояния. Значит, изменение углового расстояния главным образом вызвано прецессией. За 32 года точка весеннего равноденствия прошла расстояние α :

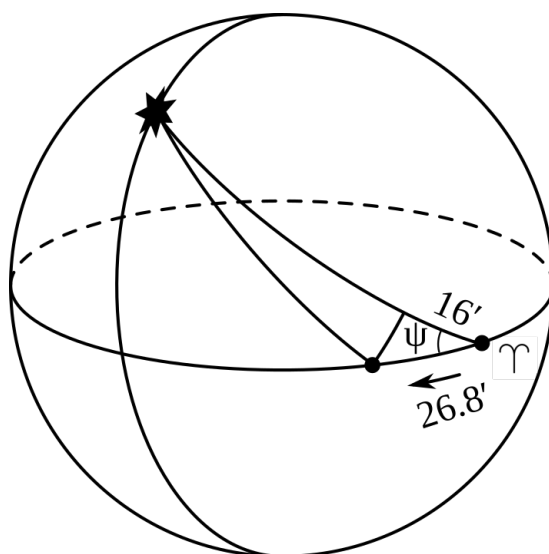
$$\alpha = \frac{360^\circ}{25800 \text{ лет}} \cdot 32 \text{ года} = 26.8'.$$

Поскольку максимальная геоцентрическая лучевая скорость звезды наблюдается каждый год около 23 сентября, а звезда одиночная, то 23 сентября скорость Земли направлена в точку, эклиптической долготы которой противоположна эклиптической долготе звезды. Иными словами, эклиптическая долгота звезды $\lambda = 18$ ч. Тогда несложно найти угол наклона большого круга, соединяющего точку весеннего равноденствия со звездой, поскольку изменение расстояния между точкой весеннего равноденствия и звездой является проекцией перемещения точки весеннего равноденствия на этот большой круг.

$$\psi = \arccos\left(\frac{16'}{26.8'}\right) \approx 53^\circ.$$

Поскольку эклиптическая долгота звезды равна 18 ч, то её эклиптическая широта

$$\beta = \pm\psi \approx \pm 53^\circ.$$



В точке весеннего равноденствия Солнце переходит из южной небесной полусферы в северную. Поэтому эклиптика пересекает круг склонения 18° на склонении $\delta = -\varepsilon = -23.5^\circ$. Тогда имеем два варианта для склонения звезды

$$\delta_1 = 53^\circ - \varepsilon \approx 29.5^\circ, \quad \delta_2 = -\varepsilon - 53^\circ \approx -76.5^\circ,$$

и два варианта высоты звезды в верхней кульминации:

$$h_1 = 90^\circ - |55^\circ - \delta_1| \approx 64.5^\circ, \quad h_2 = 90^\circ - |55^\circ - \delta_2| \approx -41.5^\circ.$$

Система оценивания

- | | |
|---|-------------------|
| 1. Вывод о том, что за смещение звезды отвечает прецессия | 1 балл |
| 2. Вычисление смещения точки равноденствия за 32 года | 1 балл |
| 3. Определение эклиптической долготы звезды | 2 балла |
| Если получен ответ 6 часов и рассмотрены оба варианта решения, то выставляется 1 балл и пп. 5-6 оцениваются по 1 баллу. Если рассмотрен только один вариант, то более 1 балла за пп. 5-6 в сумме. | |
| Если указано, что есть два варианта положения звезды (6 и 18 часов) и нет правильного продолжения решения, то выставляется 1 балл. | |
| 4. Вычисление эклиптической широты звезды | по 1 баллу |
| 5. Определение склонения звезды | по 1 баллу |
| Оценивается при идейно правильном выполнении пп. 3 и 4 | |
| 6. Определение высоты верхней кульминации звезды | по 1 баллу |
| Оценивается при правильном выполнении пп. 4 и 5. | |

Максимальная оценка за задачу **10 баллов**.

9.4. ИЗУЧАЕМ ЭКЗОПЛАНЕТЫ

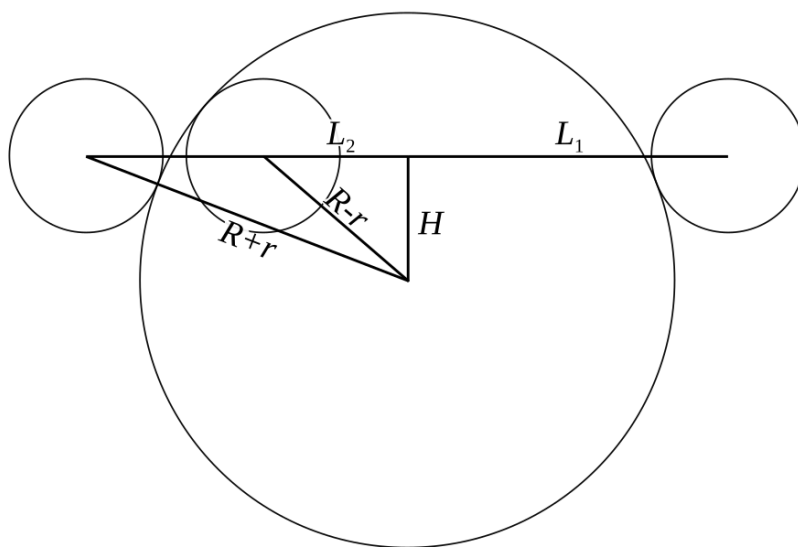
(В. Б. Игнатьев)



Условие. Спутник TESS наблюдает транзит экзопланеты по диску звезды. Во время максимума затмения поток от звезды уменьшается на 4 %. Длительность «плоского дна» кривой блеска в три раза меньше, чем длительность всего транзита. Определите наклонение орбиты экзопланеты к лучу зрения, если полная длительность транзита составляет 1 % от периода. Орбиту считать круговой. Потемнением диска звезды к краю пренебрегите.

Решение. Во время прохождения планета блокирует часть света звезды. Раз кривая блеска имеет «плоское дно», планета полностью заходит на диск звезды и какое-то время перемещается по нему не выходя за край. Пусть R и r — радиусы звезды и планеты соответственно. Из того, что падение блеска составляет 4 %, следует, что площадь диска планеты составляет 0.04 площади диска звезды. Тогда $r = 0.2R$.

Рассмотрим геометрию прохождения планеты. Пусть H — минимальное расстояние между центрами дисков планеты и звезды. В момент, когда планета начинает заходить на диск звезды (первое касание) центры звезды и планеты разделяет расстояние $R + r$, а когда планета целиком заходит на диск звезды (второе касание) расстояние между центрами уже $R - r$. Расстояние, которое проходит планета между вторым и третьим касаниями (начало схода с диска), обозначим как $2L_2$, а расстояние между первым и последним касаниями — как $2L_1$. Из условия делаем вывод, что $L_1 = 3L_2$.



Из теоремы Пифагора можем записать:

$$L_1^2 = (R + r)^2 - H^2, \quad L_2^2 = (R - r)^2 - H^2.$$

$$(R + r)^2 - H^2 = 9[(R - r)^2 - H^2]$$

Нам неизвестны значения r и R по отдельности, но известно их отношение. Поэтому мы можем вычислить величину H только в долях, например, радиуса звезды R . После несложных

преобразований получаем

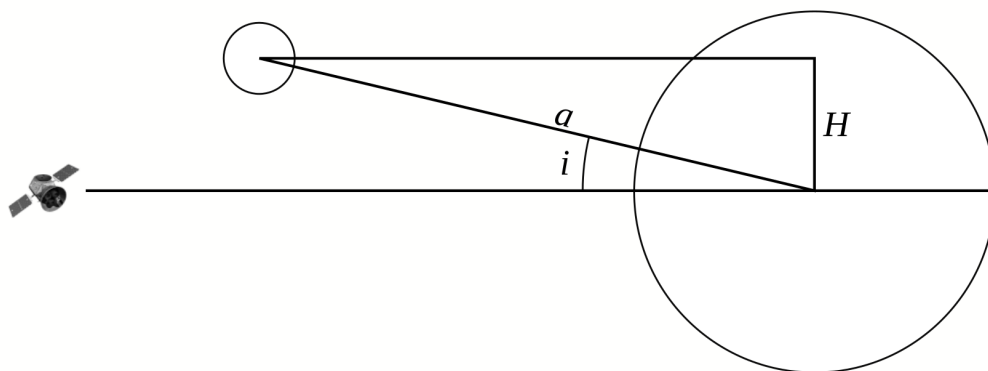
$$H = \sqrt{R^2 + r^2 - 2.5Rr} = R\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2.5\frac{r}{R}} = R\sqrt{1 + 0.04 - 2.5 \cdot 0.2} \approx 0.73R.$$

За время транзита планета проходит расстояние

$$2L_1 = 2R\sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{H}{R}\right)^2} = 2R\sqrt{1.2^2 - 0.73^2} \approx 1.9R.$$

По условию эта величина составляет 0.01 длины орбиты, а значит радиус орбиты a можно выразить как

$$\frac{2L_1}{2\pi a} = 0.01, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{L_1}{0.01\pi} = \frac{1.9R}{2 \cdot 0.01\pi} \approx 30R.$$



Наклонение орбиты можно выразить из радиуса орбиты a и H (см. рисунок):

$$\sin i = \frac{H}{a} \approx \frac{0.73R}{30R} \approx 0.024, \quad \Rightarrow \quad i = \arcsin(0.024) \approx 1.4^\circ.$$

Система оценивания

1. Правильная геометрия нецентрального прохождения	1 балл
2. Определение r/R	1 балл
3. Определение L_1/L_2	1 балл
4. Определение прицельного параметра H в долях R или r	2 балла
5. Определение $2L_1$	1 балл
6. Определение большой полуоси a	2 балла
7. Вычисление наклонения орбиты (при условии, что транзит возможен)	2 балла

Максимальная оценка решения, основанного на предположении о том, что угловое расстояние, которое проходит планета во время частной фазы транзита, равно $2R$, не превышает 7 баллов (при ответе при ответе примерно 2.7°).

1. Продемонстрированное понимание геометрии нецентрального транзита с явным указанием на то, что используемое равенство $2r$ длины частной фазы является приближением

2 балла

2. Вычисление прицельного расстояния	2 балла
3. Вычисление радиуса орбиты	1 балл
4. Продемонстрированное понимание термина наклонение орбиты	1 балл
5. Вычисление наклонения орбиты	1 балл

Максимальная оценка за задачу **10 баллов**.

9.5. СВЕТИТ НЕЗНАКОМАЯ ЗВЕЗДА

(А. В. Веселова)



Условие. Вокруг звезды главной последовательности с радиусом 1.4 радиуса Солнца и температурой 6600 К по орбите с большой полуосью 3 а.е. и эксцентриситетом 0.3 обращается небольшая каменная планета.

- Сколько времени проходит между летним и зимним «солнцестояниями» на планете, если известно, что летнее солнцестояние в северном полушарии планеты наступает ровно в день наибольшего удаления планеты от звезды?
- На поверхности планеты горизонтально на почве на широте 55° с.ш. установили датчик, измеряющий принятую энергию излучения, с площадью приемника 0.04 м^2 . Чему равна разность показаний датчика в день летнего и зимнего солнцестояний, если известно, что экватор планеты наклонен к плоскости орбиты на 23° ?

Светимость L подобных звезд главной последовательности связана с их массами M соотношением $L \sim M^4$.

Решение. Оценим сначала светимость звезды. Воспользуемся законом Стефана-Больцмана:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi \cdot (1.4 \cdot 7 \cdot 10^8)^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 6600^4 = 1.3 \cdot 10^{27} \text{ Вт}.$$

Поскольку летнее солнцестояние соответствует прохождению апоцентра орбиты, то зимнее солнцестояние по симметрии будет соответствовать прохождению перигея, тогда интервал между солнцестояниями будет равен половине орбитального периода. Для определения периода необходимо оценить массу звезды. Воспользуемся данной в условии зависимостью, сопоставив параметры звезды с параметрами Солнца. Получим

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{M}{M_0} \right)^4, \quad \Rightarrow \quad M = M_0 \cdot \left(\frac{L}{L_0} \right)^{1/4} = M_0 \cdot \left(\frac{1.3 \cdot 10^{27}}{4 \cdot 10^{26}} \right)^{1/4} \approx 1.34 M_0.$$

Период обращения находим из третьего закона Кеплера, сопоставив движение планеты и Земли:

$$\frac{(T/T_0)^2}{(a/a_0)^3} = \frac{M_0}{M}, \quad \Rightarrow \quad T = T_0 \sqrt{\frac{M_0}{M}} \sqrt{\left(\frac{a}{a_0} \right)^3} = \sqrt{\frac{3^3}{1.34}} \approx 4.5 T_0.$$

Отсюда интервал времени между солнцестояниями равен 2.25 земного года.

В день летнего солнцестояния планета находится на наибольшем удалении от звезды, равном $r_\alpha = a(1 + e) = 3.9 \text{ а.е.}$. Количество энергии от звезды, падающей нормально на квадратный метр площади, составляет

$$E_\alpha = \frac{L}{4\pi r_\alpha^2} = 3.04 \cdot 10^2 \text{ Вт/м}^2.$$

Высота звезды в полдень на планете в день летнего солнцестояния на широте 55° с.ш. равна

$$h_\alpha = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - 55^\circ + 23^\circ = 58^\circ.$$

Тогда зенитное расстояние равно $z_\alpha = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$. Значит, за секунду на поверхность

датчика будет попадать энергия, равная

$$J_1 = E_\alpha S \cos z_\alpha = 3 \cdot 10^2 \cdot 0.04 \cdot \cos 32^\circ = 10 \text{ Дж.}$$

В день зимнего солнцестояния планета находится на наименьшем удалении от звезды, равном $r_\pi = a(1 - e) = 2.1 \text{ а.е.}$ Количество энергии от звезды, падающей нормально на квадратный метр площади, составляет

$$E_\pi = \frac{L}{4\pi r_\pi^2} = 1.05 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2.$$

Высота звезды в полдень на планете в день зимнего солнцестояния на широте 55о с.ш. равна

$$h_\pi = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - 55^\circ - 23^\circ = 12^\circ.$$

Зенитное расстояние равно $z_\pi = 90^\circ - 12^\circ = 78^\circ$, тогда за секунду на поверхность датчика будет попадать энергия, равная

$$J_2 = E_\pi S \cos z_\pi = 1.05 \cdot 10^3 \cdot 0.04 \cdot \cos 78^\circ = 8.7 \text{ Дж.}$$

Разность показаний датчика оказывается весьма малой, около 1.3 Дж.

Система оценивания

1. Светимость звезды	1 балл
2. Масса звезды	1 балл
3. Период обращения планеты	1 балл
4. Ответ на первый вопрос	1 балл
5. Высота звезды в дни «солнцестояний»	по 1 баллу
6. Освещенность в дни «солнцестояний»	по 1 баллу
7. Формула для принимаемой датчиком энергии	1 балл
8. Ответ на второй вопрос	1 балл

Максимальная оценка за задачу **10 баллов**.

9.6. ВЕЛИКОЕ ПРОТИВОСТОЯНИЕ

(А. В. Ребриков)



Условие. Во время противостояния Марса, когда он находился в афелии своей орбиты, Солнце мгновенно потеряло часть массы так, что орбита Марса стала круговой. Определите, когда в ближайшие 25 лет произойдет противостояние, во время которого Марс окажется на минимальном расстоянии от Земли. Чему будет равно это расстояние? Ответ дайте соответственно в годах (современных) и астрономических единицах. Орбиты планет лежат в одной плоскости.

Решение. Пусть a_M и e — большая полуось и эксцентриситет орбиты Марса. Тогда расстояние Марса в афелии, а так же радиус его новой орбиты равен $a'_M = a_M(1 + e)$. Скорость Марса в афелии равна его скорости на новой круговой орбите. Тогда

$$\sqrt{\frac{GM}{a_M} \frac{1 - e}{1 + e}} = \sqrt{\frac{GM'}{a'_M}}.$$

Отсюда определяем, что новая масса Солнца составит $M' = M(1 - e)$.

Из-за потери Солнцем части массы Земля оказалась в перигелии новой орбиты, а ее начальная полуось стала перигелийным расстоянием. Большая полуось новой орбиты равна $a'_3 = a_3/(1 - e')$, где e' — эксцентриситет новой орбиты. Из условия равенства старой круговой и новой перигелийной скорости получаем

$$\sqrt{\frac{GM}{a_3}} = \sqrt{\frac{GM'}{a'_3} \frac{1 + e'}{1 - e'}} = \sqrt{\frac{GM}{a_3} (1 - e)(1 + e')} \Rightarrow 1 + e' = \frac{1}{1 - e} \Rightarrow e' = \frac{e}{1 - e} \approx 0.103.$$

Тогда

$$a'_3 = a_3 \frac{1 - e}{1 - 2e}.$$

Запишем 3-й закон Кеплера для новой пары Земля–Марс

$$\frac{T'_M}{T'_3} = \left(\frac{a'_M}{a'_3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{a_M(1 + e)}{a_3 \frac{1 - e}{1 - 2e}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{a_M}{a_3}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{(1 + e)(1 - 2e)}{1 - e}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.8808 \cdot 0.9713 = 1.8268.$$

Также с помощью 3-го закона Кеплера найдем новый сидерический период Земли:

$$\left(\frac{T'_3}{T_3}\right)^2 = \frac{M}{M'} \left(\frac{a'_3}{a_3}\right)^3 = \left(\frac{1 - e}{1 - 2e}\right)^3 \frac{1}{1 - e} \Rightarrow T'_3 = T_3 \frac{1 - e}{(1 - 2e)^{\frac{3}{2}}} = 1.2363 \text{ года}.$$

Получаем, что $25 \text{ лет} \approx 20.2T' < 21T'$. Великие противостояния будут происходить тогда, когда Земля будет находиться вблизи афелия своей орбиты. Афелий Земля будет проходить через каждое полуцелое число оборотов n с начального момента времени. Вычислим для каждого такого момента времени число оборотов, совершенных Марсом $n \frac{T'_3}{T'_M}$. Результаты сведем в таблицу. Нас интересует случай, когда дробная часть числа оборотов Марса максимально близка к 0.5. Это соответствует 15.5 оборотов Земли или 19.16 лет.

n	$n \frac{T'_3}{T'_M}$	n	$n \frac{T'_3}{T'_M}$	n	$n \frac{T'_3}{T'_M}$
0.5	0.27	7.5	4.11	14.5	7.94
1.5	0.82	8.5	4.65	15.5	8.48
2.5	1.37	9.5	5.20	16.5	9.03
3.5	1.92	10.5	5.74	17.5	9.58
4.5	2.46	11.5	6.30	18.5	10.13
5.5	3.01	12.5	6.84	19.5	10.67
6.5	3.56	13.5	7.39	20.5	11.22

Расстояние между планетами мало отличается от

$$a'_M - a'_3(1 + e') = 0.44 \text{ а. е.}$$

Система оценивания

1. Радиус новой орбиты Марса **1 балл**
2. Новая масса Солнца **1 балл**
3. Эксцентриситет орбиты Земли **1 балл**
4. Новая большая полуось Земли **1 балл**
5. Новый сидерический период Земли **1 балл**
6. Новый сидерический период Марса (или отношение периодов Марса и Земли) **1 балл**
7. Нахождение правильного варианта ответа **3 балла**
 Если промежуточные результаты округлены так, что изменяется конечный ответ, то оценка за этот этап не более 2 баллов. Если на предыдущих этапах были ошибки в формулах (логические ошибки), то оценка за этот этап не более 1 балла.
8. Минимальное расстояние **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **10 баллов**.

Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Заключительный этап – 2024 год
Первый (теоретический) тур

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

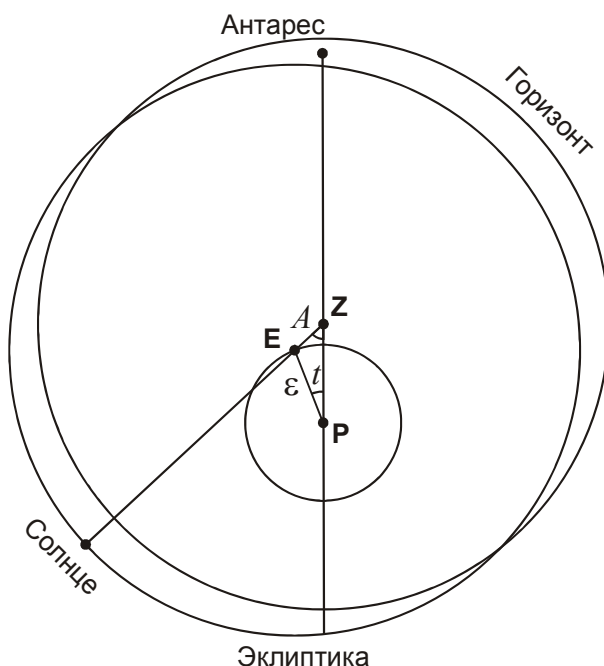


10.1. ЮЖНЫЙ СОПЕРНИК МАРСА (О.С. Угольников)

1. Условие. Звезда Антарес (α Скорпиона, $\alpha = 16^{\text{ч}}30^{\text{м}}$, $\delta = -26^{\circ}30'$) едва поднимается над горизонтом в Санкт-Петербурге (широта ровно $+60^{\circ}$) и видна там с большим трудом. Определите, в какой день года можно увидеть Антарес в верхней кульминации в Санкт-Петербурге на наиболее темном небе (Солнце глубже всего погружено под горизонт)? Орбиту Земли считать круговой.

1. Решение. Как мы видим, Антарес расположен в южном небесном полушарии вблизи эклиптики, не так далеко от точки зимнего солнцестояния. Трудность наблюдения Антареса в высоких северных широтах заключается не только в его низком положении на небе, но и в значительной засветке неба, что существенно усложняет наблюдения у горизонта. Антарес кульминирует вблизи полуночи в конце весны – начале лета, но в это время в Петербурге уже наступают белые ночи. В любой сезон года, когда Антарес кульминирует, эклиптика располагается на небе недалеко от горизонта, и картина имеет место либо днем, либо в сумерки. Определим, в каком положении на эклиптике Солнце окажется глубже всего под горизонтом.

Рассмотрим ситуацию со стороны зенита в момент, когда Антарес оказывается в кульминации. Для удобства воспользуемся проекцией, при которой зенитное расстояние на небе пропорционально расстоянию от зенита на рисунке. Вблизи зенита эта проекция будет отображать небо так же, как и проекция на горизонтальную плоскость.



Пусть Z – точка зенита, P – северный полюс мира. Угловое расстояние между ними ZP равно $90^{\circ} - \varphi$, то есть 30° . Точка E – северный полюс эклиптики. Его прямое восхождение равно 18

часам, и он не дошел до верхней кульминации на угол t (равный его часовому углу со знаком минус), 1ч30м или 22.5° . Определим угловое расстояние между зенитом и полюсом эклиптики, считая картину плоской:

$$EZ = \sqrt{ZP^2 + EP^2 - 2ZP \cdot EP \cdot \cos t} = 12.3^\circ.$$

Здесь мы учли, что отрезок EP есть угол наклона экватора к эклиптике, 23.4° . На самом деле, EZ есть максимальное погружение Солнца под горизонт во время кульминации Антареса, мы видим, что в самом лучшем случае этот момент оказывается на грани навигационных сумерек. Теперь мы можем найти угол A с вершиной в зените между направлениями на полюс мира и оптимальное положение Солнца:

$$\sin A = \sin t \frac{EP}{EZ}; \quad A = 47^\circ.$$

Учитывая близость горизонта к эклиптике, можно просто считать, что Солнце не дошло в своем пути по эклиптике 47° (что соответствует 48 дням) до момента противостояния Антареса. Само противостояние наступает за $3/4$ месяца до летнего солнцестояния, то есть 30 мая. Итак, оптимальные условия для наблюдения Антареса в верхней кульминации в Петербурге наступают перед рассветом 12 апреля. Интересно, что несмотря на существенные приближения, наша погрешность составляет всего 1 день, точный ответ – 13 апреля.

1. Система оценивания. Задача может быть решена разными способами. Наиболее точный, но при этом излишне сложный для подобной задачи – сферическая тригонометрия. Приближенные способы характеризуются разной степенью погрешности, которую нужно оценить при проверке. Решения с погрешностью в несколько дней могут быть оценены полностью при условии достаточного описания. Система оценивания включает в себя проверку основных фактов:

Этап 1 – 3 балла. Описание положения эклиптики на небе в момент верхней кульминации Антареса. Оно может быть сделано через положение полюса эклиптики относительно зенита (как сделано выше), либо через положения самой высокой и самой низкой точки эклиптики.

Этап 2 – 3 балла. Оценка положения Солнца на эклиптике в требуемый момент. Положение Солнца может быть определено относительно точки с эклиптической долготой Антареса либо противоположной точки (как сделано выше), точность – 2° .

Этап 3 – 4 балла. Ответ. Этап оценивается полностью при ответе от 10 до 14 апреля, далее оценка уменьшается на 1 балл за каждые дополнительные 4 дня погрешности.

Пример неверного решения задачи: предположение, что картина должна наблюдаться в солнечную полночь, что ведет нас к ответу около 30 мая. Максимальная оценка за все решение – 2 балла при условии указания именно этой даты с точностью в 3 дня.

Пример неточного решения задачи: предположение, что все 1.5 звездных часа до своей предстоящей кульминации полюс эклиптики движется точно с востока на запад. Его перемещение составляет $t \sin \varepsilon = 8.9^\circ$. Угол A в этом случае есть $\arctan(8.9/6.6) = 53^\circ$, ответ – примерно 6 апреля. Если других упрощений и ошибок не сделано, первый этап оценивается полностью, второй – в 2 балла, третий – в 3 балла. Общая оценка – 8 баллов.

Максимальная оценка за все решение – 10 баллов.



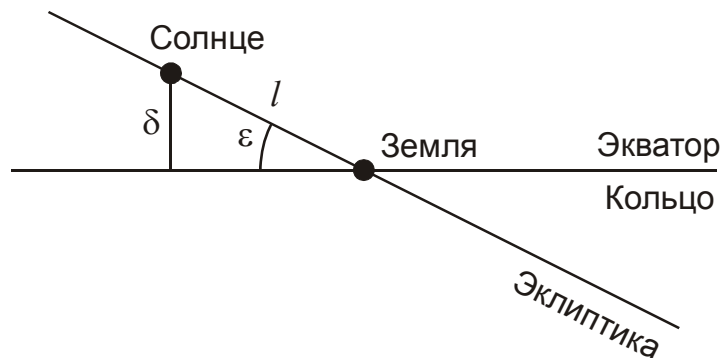
10.2. ОСТАЛАСЬ ЛИШЬ ТЕНЬ... (О.С. Угольников)

2. Условие. Известно, что иногда кольца Сатурна при наблюдении с Земли «исчезают», так как обращаются к нам ребром. Ближайший раз это произойдет в 2025 году. Определите максимально возможную угловую толщину полосы тени от колец на поверхности Сатурна при наблюдении с Земли, когда наша планета находится точно в плоскости колец, она же – плоскость экватора Сатурна. Считать Солнце и Землю точечными объектами, орбиты Земли и Сатурна – круговыми и лежащими в плоскости эклиптики. Кольцо Сатурна считать сплошным с внутренним радиусом 92 тысячи км, внешним радиусом 137 тысяч км и толщиной ровно 1 км.

2. Решение. Кольцо Сатурна очень тонкое и расположено в плоскости экватора этой планеты. Если мы введем систему небесных координат на Сатурне аналогично той, что мы используем на Земле, то в описанный в условии задачи момент склонение Земли равно нулю. Для Сатурна Земля – внутренняя планета, не уходящая на небе далеко от Солнца. Если в данный момент склонение Солнца тоже оказалось бы нулевым, то в рамках условия задания тень имела бы пространственную толщину 1 км, что с расстояния Земли соответствовало бы углу всего в $0.00015''$, что совершенно невозможно было бы увидеть. Даже с учетом реальных размеров Солнца тень бы просто не появилась. Тем не менее, она часто оказывается заметной. Это связано с тем, что склонение Солнца в этот момент может быть отлично от нуля, и тогда оно не будет находиться в плоскости кольца и может дать эффект тени ощутимой толщины.

По условию задачи, мы пренебрегаем углом наклона орбиты Сатурна к плоскости орбиты Земли. В реальности этот угол равен 2.5° , что может показаться большим. Но Земля, расположенная примерно в 10 раз ближе к Солнцу, чем Сатурн, будет отклоняться от «сатурнианской» эклиптики в его небе всего на 0.25° , что не является основным фактором. Главным будет различие склонений Земли и Солнца за счет их разного положения на самой эклиптике Сатурна. Обратим внимание, что наклон экватора Сатурна к плоскости его орбиты $\varepsilon = 26.73^\circ$ значителен и превышает аналогичный угол для Земли.

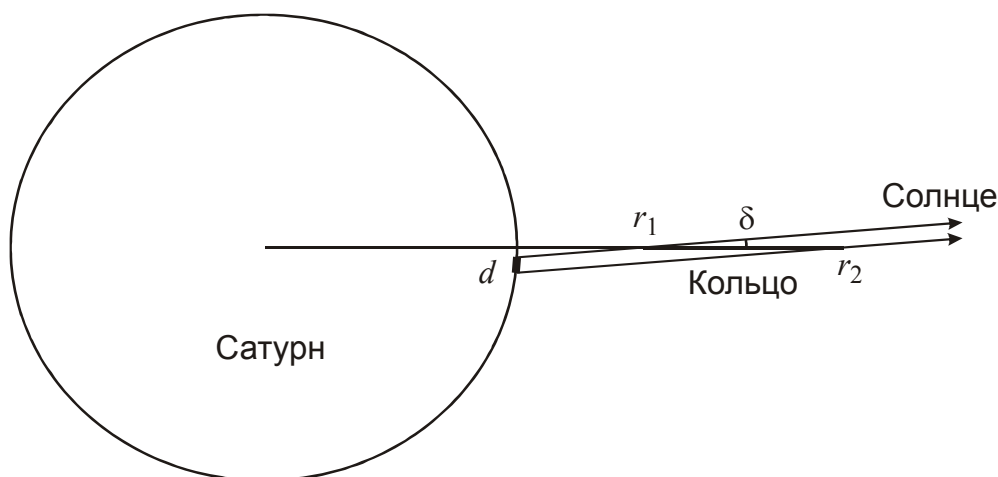
Очевидно, в случае совпадения плоскостей орбит максимальная разность склонений будет достигаться, если Земля в небе Сатурна находится в наибольшей элонгации, а Сатурн в небе Земли – в квадратуре. Максимальное угловое расстояние между Землей и Солнцем составляет



$$l = \arcsin(a_0/a) = 6.0^\circ,$$

где a_0 и a – радиусы орбит Земли и Сатурна. Тогда модуль склонения Солнца может быть равен

$$\delta = l \sin \varepsilon = \arcsin(a_0/a) \sin \varepsilon = 2.7^\circ.$$



В этом случае кольцо отбросит на поверхность Сатурна тень шириной

$$d = (r_2 - r_1) \sin \delta \approx 2120 \text{ км.}$$

В момент квадратуры расстояние между Землей и Сатурном равно

$$L = \sqrt{a^2 - a_0^2} = 9.486 \text{ а.е.} = 1.419 \cdot 10^9 \text{ км.}$$

Угловая ширина полосы тени равна

$$s = 206265'' \cdot (d/L) = 0.31''.$$

2. Система оценивания.

1 этап – 3 балла. Правильное представление, за счет чего тень колец на Сатурне в указанный момент может стать видимой и иметь заметную толщину. Должно быть четко указано, что это может быть при максимальном угловом удалении Земли от Солнца в небе Сатурна (наибольшая элонгация Земли на Сатурне и/или квадратура Сатурна на Земле).

Возможная ошибка при выполнении решения: указание угла наклона орбиты Сатурна к плоскости эклиптики (около 2.5°) как основного фактора. Если эта величина напрямую приравнивается к склонению Солнца на Сатурне, то в итоге участник может прийти к ответу, близкому к правильному. Однако, в реальности влияние этого эффекта на склонение Солнца в 10 раз меньше, более того, в условии указано, что этот эффект рассматривать не нужно.

Если участник рассматривает только его без учета смещения Солнца от Земли вдоль «эклиптики» Сатурна, то ему полностью не засчитывается как этот этап, так и два последующих. Если фактор смещения Солнца вдоль эклиптики также учтен, а фактор наклона завышен в 10 раз, то это дает вдвое больший итоговый ответ. В этом случае первый этап решения не засчитывается (0 баллов), остальные оцениваются, исходя из их выполнения, с учетом других ответов, которые должны быть получены. Наконец, если фактор наклона орбит учтен в правильном масштабе, что приводит к увеличению итогового ответа на 10% – оценка за 1 этап уменьшается на 1 балл, так как в условии в явном виде сказано, что этот эффект не должен учитываться.

Этап 2 – 2 балла. Определение максимально возможного углового расстояния между Солнцем и Землей в небе Сатурна, точность 0.2° . Численная оценка углового расстояния

может не делаться, полученное для него соотношение переводится сразу в следующий этап решения, что также допустимо и оценивается полностью в случае правильной формулы для данной величины.

Этап 3 – 1 балл. Нахождение максимального модуля склонения Солнца, точность 0.1° . Аналогично предыдущему этапу, данный может быть выполнен численно или в виде формулы, которая используется на следующих этапах.

Возможная ошибка при решении: использование неверного значения угла ε (например, взятие величины для Земли). Этап не засчитывается, остальные оцениваются, исходя из их выполнения.

Этап 4 – 2 балла. Определение пространственной ширины полосы тени, точность 50 км.

Возможная ошибка при решении: использование внешнего радиуса кольца Сатурна вместо разности внешнего и внутреннего радиуса, то есть фактически предположение, что кольцо Сатурна начинается с его поверхности. Этап не засчитывается полностью, без влияния на последующий этап.

Этап 5 – 2 балла. Определение угловой ширины полосы тени, точность $0.02''$. Ответ $0.3''$ считается правильным.

Вероятная ошибка: расстояние от Земли до Сатурна берется не для квадратуры, а для другой конфигурации (например, противостояния). Эффект изменяет итоговый ответ примерно на 5% и может вывести его за рамки требуемой точности. Оценка уменьшается на 1 балл.

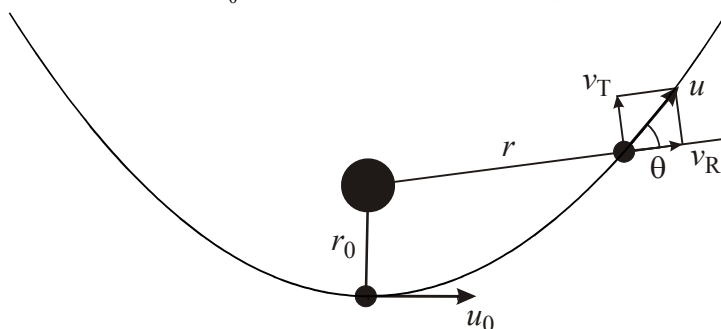


10.3. МИМОЛЕТНОЕ СВИДАНИЕ (О.С. Угольников)

3. Условие. Небольшой астероид пролетает около некоторой планеты, двигаясь относительно нее по параболической траектории. Когда расстояние между планетой и астероидом было минимальным, на планете измерили угловую скорость астероида, она оказалась равной ω_0 . Через некоторое время угловая скорость астероида составила $\omega_0/2$, а лучевая скорость оказалась равной v . Какой станет лучевая скорость астероида, когда его угловая скорость будет равна $\omega_0/4$? Размерами планеты и действием на астероид других тел, кроме планеты, пренебречь, планета не вращается вокруг своей оси.

3. Решение. Обозначим минимальное расстояние между планетой и астероидом как r_0 , а его пространственную скорость относительно планеты – u_0 . В этот момент астероид движется перпендикулярно направлению на планету, поэтому его угловая скорость есть $\omega_0 = u_0/r_0$. Далее астероид удаляется от планеты. Пусть в некоторый момент его расстояние от планеты есть r , а скорость равна u . Так как орбита параболическая, полная энергия астероида в оба момента равна нулю, то есть

$$\frac{u_0^2}{2} = \frac{GM}{r_0}; \quad \frac{u^2}{2} = \frac{GM}{r}; \quad u = u_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$



Помимо этого, в системе сохраняется момент импульса (что эквивалентно II закону Кеплера). В расчете на единицу массы астероида он равен произведению расстояния на тангенциальную компоненту скорости:

$$r_0 \cdot u_0 = r \cdot v_T = r \cdot u \cdot \sin \theta,$$

где θ – угол между направлением с планеты на астероид и направлением скорости астероида. Угловая скорость астероида при наблюдении с планеты будет равна

$$\omega = \frac{v_T}{r} = \frac{r_0 u_0}{r^2} = \omega_0 \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Отсюда мы также имеем выражение для угла θ :

$$\sin \theta = \frac{r_0 \cdot u_0}{r \cdot u} = \sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$

В последнем равенстве мы использовали записанный ранее закон сохранения энергии. Лучевая скорость составит

$$v_R = u \cdot \cos\theta = \frac{u_0 \cdot r_0 \cdot \cos\theta}{r \cdot \sin\theta} = \frac{u_0 \cdot r_0}{\sqrt{r_0 \cdot r}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} = u_0 \frac{\sqrt{r_0 \cdot (r - r_0)}}{r}.$$

В момент, описанный в условии задачи, угловая скорость $\omega_1 = \omega_0/2$, из чего мы получаем расстояние и лучевую скорость:

$$r_1 = r_0 \cdot \sqrt{2}; \quad v = u_0 \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Когда угловая скорость станет равной $\omega_2 = \omega_0/4$, мы получим:

$$r_2 = r_0 \cdot 2; \quad v_2 = \frac{1}{2} u_0.$$

В итоге, лучевая скорость астероида будет равна

$$v_2 = v \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (\sqrt{2}-1)}} = v \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \approx 1.10 \cdot v.$$

Можно заметить, что это будет максимальная лучевая скорость для этого астероида, с его дальнейшим удалением от планеты она начнет уменьшаться.

3. Система оценивания. При проверке решений необходимо иметь ввиду, что построение решения участником может существенно отличаться от приведенного выше. Оценка должна определяться правильным применением основных законов и соотношений между величинами. Задание не предусматривает численный счет, и все этапы засчитываются только при точной записи тех или иных соотношений, которые должен получить участник. Оценка является суммой двух основных составляющих – качество решения и ответа. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – качество решения (6 баллов)

1 этап – 1 балл. Использование закона сохранения энергии для движения астероида, которое может быть сделано в явном виде или правильно использоваться в выкладках. Результатом этапа должно быть соотношение полной скорости астероида и его расстояния от планеты.

2 этап – 1 балл. Использование закона сохранения момента импульса для движения астероида, которое может быть сделано в явном виде или правильно использоваться в выкладках. Результатом этапа должно быть соотношение тангенциальной скорости астероида и его расстояния от планеты.

3 этап – 1 балл. Получение выражения видимой угловой скорости астероида в зависимости от какого-либо одного параметра (расстояния, скорости, ...), характеризующего положение астероида на орбите. Этап оказывается автоматически выполненным, если выражение для закона сохранения момента импульса (предыдущий этап) записывается сразу для расстояния и угловой скорости, тогда оба этапа сразу оцениваются полностью.

4 этап – 1 балл. Связь угла θ либо иной однозначно связанной с ним величины с расстоянием астероида от планеты.

5 этап – 2 балла. Связь лучевой скорости астероида с его расстоянием от планеты либо другим параметром, однозначно характеризующим положение астероида на орбите.

Часть 2 – Качество ответа (4 балла).

0 баллов: ответ отсутствует либо не имеет размерности скорости.

1 балл: ответ имеет размерность скорости, но не имеет формы произведения скорости v на какой-либо численный коэффициент. Так же ситуация, если ответ содержит величину ω_0 либо какие-то иные величины, не заданные в условии.

2 балла: ответ имеет правильную форму, но численный коэффициент либо отрицательный и не равный верному по модулю, либо положительный и отличается от верного в большую или меньшую сторону в $\sqrt{2}$ ~1.4 раза или более.

3 балла: ответ имеет правильную форму, и отличается от верного в большую и меньшую сторону менее чем в $\sqrt{2}$ ~1.4 раза. Та же оценка ставится, если ответ правильный по модулю, но имеет отрицательный знак.

4 балла: в точности верный ответ. Необходимо учесть, что коэффициент может быть записан в иной эквивалентной форме. Приближение $1.10 \cdot v$ не является обязательным для записи.



10/11.4. ТОНКИЙ БАЛАНС (О.С. Угольников)

4. Условие. Слабо пульсирующая переменная звезда изменяет свою звездную величину по синусоидальному закону с периодом τ , разница болометрических звездных величин в минимуме и максимуме равна Δm . Черная теплопроводная сферическая пылинка радиусом r и плотностью ρ находится вдали от поверхности звезды. Она не вращается вокруг звезды, а лишь совершает колебательные движения вдоль направления на звезду, при этом ее средние за период колебаний расстояние до звезды R и температура T остаются постоянными. Определите длину отрезка, который описывает пылинка в ходе колебаний. Считать величину изменений блеска Δm и период колебаний τ малыми ($\Delta m \ll 1$, период много меньше орбитального периода, соответствующего расстоянию R). Пылинка взаимодействует с излучением по законам геометрической оптики.

4. Решение. На пылинку действуют две силы: притяжение со стороны звезды и давление ее излучения. Запишем выражения для этих сил для произвольного расстояния от звезды L :

$$F_G = \frac{4\pi G M \rho r^3}{3L^2}; \quad F_E = \frac{J \cdot \pi r^2}{4\pi c L^2} = \frac{J \cdot r^2}{4c L^2}.$$

Здесь M – масса звезды, которая нам неизвестна. Во втором случае мы учли, что сила давления излучения есть плотность потока энергии, деленная на скорость света. Так как пылинка черная, это излучение не отражается напрямую, а собственное тепловое излучение теплопроводной пылинки изотропно и не влияет на ее движение. Обе силы убывают обратно пропорционально квадрату расстояния до звезды, их соотношение не меняется с расстоянием. Пылинка находится вблизи положения равновесия, то есть средние значения этих сил за период колебаний совпадают:

$$\frac{4\pi G M \rho r^3}{3} = \frac{J_0 \cdot r^2}{4c},$$

и для средней за период светимости мы имеем:

$$J_0 = \frac{16\pi c G M \rho r}{3}.$$

Звездная величина (абсолютная или видимая на фиксированном расстоянии) звезды меняется со временем следующим образом:

$$m = m_0 + \frac{\Delta m}{2} \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

По условию задачи величина Δm мала, поэтому мы можем записать выражение для изменения светимости звезды:

$$J = \text{const} \cdot 10^{-0.4m} = J_0 \cdot 10^{-0.4 \frac{\Delta m}{2} \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau}} \approx J_0 \cdot \left(1 - \frac{\ln 10}{5} \Delta m \cdot \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right).$$

Равнодействующая двух сил составит:

$$F = F_E - F_G = \frac{J \cdot r^2}{4cL^2} - \frac{4\pi GMpr^3}{3L^2} = \frac{J_0 \cdot r^2}{4cL^2} + \frac{\ln 10}{5} \frac{J_0 \cdot r^2 \Delta m}{4cL^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{4\pi GMpr^3}{3L^2}.$$

Первое и третье слагаемое компенсируют друг друга, и в итоге:

$$F = \frac{\ln 10}{5} \frac{J_0 \cdot r^2 \Delta m}{4cL^2} \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Период колебаний и разность звездных величин Δm малы, и пылинка не успевает существенно изменить свое расстояние до звезды. Поэтому мы можем считать, что в этой формуле $L \approx R$, и пылинка движется под действием гармонической силы. Но нам неизвестна величина J_0 . Чтобы определить ее, запишем уравнение теплового баланса для пылинки:

$$\frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = 4\pi\sigma r^2 T^4; \quad \frac{J_0}{4R^2} = 4\pi\sigma T^4.$$

Подставим последнее выражение в формулу для равнодействующей силы с учетом $L=R$:

$$F = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{4\pi\sigma T^4 \cdot r^2 \Delta m}{c} \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Ускорение пылинки под действием этой силы составит

$$a = \frac{3F}{4\pi\rho r^3} = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{3\sigma T^4 \cdot \Delta m}{c\rho r} \sin \frac{2\pi t}{\tau} = a_0 \sin \omega t.$$

Угловая скорость, соответствующая колебаниям, есть $\omega = 2\pi/\tau$. Искомая длина отрезка есть удвоенная амплитуда колебаний:

$$d = \frac{2a_0}{\omega^2} = \frac{\ln 10}{5} \cdot \frac{6\sigma T^4 \cdot \Delta m \tau^2}{4\pi^2 c\rho r} = \frac{3\ln 10 \cdot \Delta m}{10\pi^2} \cdot \frac{\sigma T^4 \cdot \tau^2}{c\rho r}.$$

Обратим внимание, что в итоговое выражение не входит расстояние от пылинки до звезды R .

4. Система оценивания. Оценка является суммой двух основных составляющих – качество решения и ответа. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – Качество решения (5 баллов).

Этап 1 – 1 балл. Правильное выражение для средней силы светового давления, действующей на пылинку (на расстоянии R)

Этап 2 – 1 балл. Правильная связь выражения силы светового давления через температуру пылинки, при которой исчезает зависимость от расстояния до звезды R .

Этап 3 – 1 балл. Выражение для изменения светового потока от звезды как функции времени.

Этап 4 – 1 балл. Выражение для равнодействующей сил светового давления и притяжения к звезде, которая оказывается синусоидальной функцией времени и определяется только заданными в условии величинами.

Этап 5 – 1 балл. Выражение для длины отрезка как удвоенной амплитуды гармонических колебаний пылинки под действием синусоидальной силы.

Часть 2 – Качество ответа (5 баллов).

0 баллов: ответ отсутствует, либо размерность выражения ответа не соответствует искомой величине (длина отрезка), вне зависимости от вызвавшей это ошибки. То же относится к случаю, если в выражении ответа производится сложение или вычитание величин разных размерностей.

1 балл: ответ записан и соответствует требуемой размерности. Однако его отношение к правильному ответу является безразмерной комбинацией размерных параметров, заданных в условии (например, отношение ответов равно r/R , r/ct или Δm в ненулевой степени). То же относится к любому варианту, если ответ содержит величину R или величину, не заданную в условии задания (например, массу звезды M).

2 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины и величина Δm присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую или меньшую сторону более чем в 4 раза.

3 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую и меньшую сторону не более чем в 4 раза.

4 балла: ответ записан, соответствует требуемой размерности. Он может быть сведен к правильному при корректном учете всех упрощений, сделанных в условии задачи. В ответе могут присутствовать лишние факторы и слагаемые, которые исчезают при правильных преобразованиях и использовании допущений. К этому же случаю относится запись ответа с не заданными в условии величинами (например, частота колебаний ω), которые описываются в отдельных формулах (неоптимальная запись ответа).

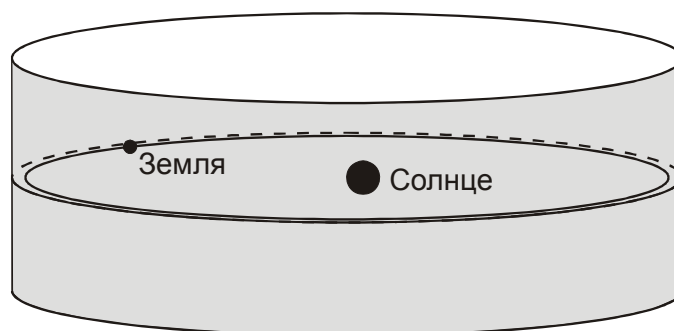
5 баллов: ответ полностью соответствует верному, либо получается из него путем элементарных однозначных преобразований (без учета допущений).



10.5. В ПОГОНЕ ЗА СВЕТОМ (О.С. Угольников)

5. Условие. Желая сберечь солнечный свет, жители Земли осуществили грандиозный проект: растянули непосредственно за земной орбитой лист идеально отражающей фольги шириной существенно больше диаметра Солнца. Средняя линия листа повторяла форму орбиты Земли, в каждой точке лист располагался перпендикулярно плоскости орбиты (см. рисунок). Нарисуйте в масштабе взаимное расположение Солнца и его отражения от участка фольги позади Солнца в небе Земли в момент, когда они будут находиться максимально далеко друг от друга на небе. Укажите численные значения параметров (угловых размеров, расстояний), характеризующих это расположение. Определите видимую звездную величину данного отражения Солнца на Земле.

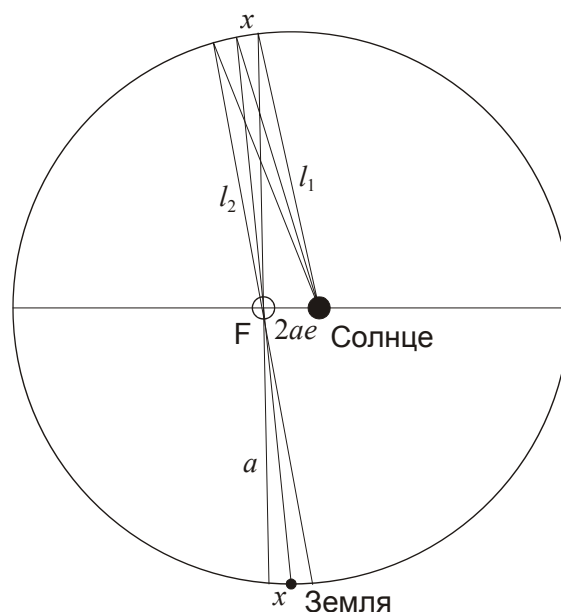
При решении считать, что ситуация имеет место вскоре после запуска проекта, и он еще не привел к изменению физических характеристик тел Солнечной системы. Фольга не изменяет своей формы, свойств и положения в пространстве под действием излучения или притяжения расположенных рядом физических тел, в том числе Солнца и Земли.



5. Решение. Если бы орбита Земли была круговой – отражение Солнца было бы расположено в точности за ним и не могло бы наблюдаться. Но орбита Земли имеет небольшой эксцентриситет e . Рассмотрим лучи света, идущие от Солнца в плоскости орбиты Земли.

Проекция экрана из фольги на картинную плоскость есть эллипс, практически совпадающий с земной орбитой. По оптическим свойствам эллипса, лучи, исходящие из одного из его фокусов, где находится Солнце, собираются в другом фокусе. Поэтому в любой момент времени отражение света Солнца будет видно на Земле в направлении второго фокуса эллипса F . Тогда становится очевидным, когда это отражение будет максимально удалено от самого Солнца на небе.

Это произойдет, когда Земля окажется на малой оси эллипса. Расстояние от Земли до Солнца в этот момент будет равно большой полуоси эллипса a , а угловое расстояние между центрами Солнца и его отражения составит

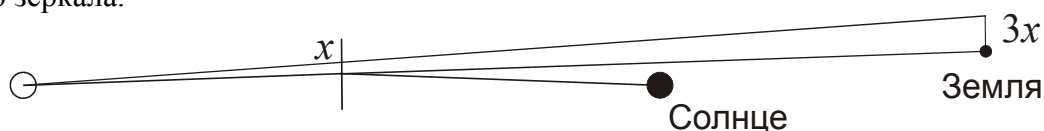


$$\alpha = 2 \arcsin \frac{ae}{a} \approx 2e = 0.0334 \text{ рад} = 114.8'.$$

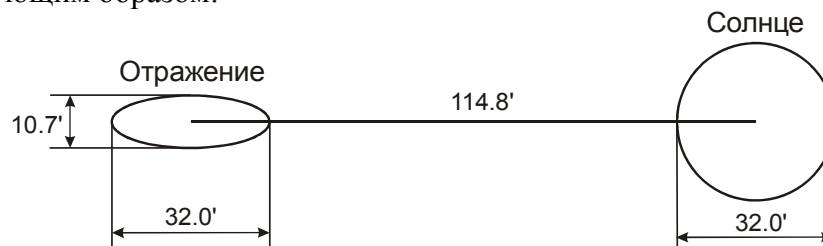
Эта величина существенно превосходит видимый радиус Солнца, и его отражение будет видно на небе. Далее обратим внимание, что эксцентриситет орбиты Земли очень мал, и расстояния от двух фокусов до точки отражения l_1 и l_2 можно считать одинаковыми (в реальности, они будут отличаться в $1+4e^2 = 1.001$ раз, и мы можем пренебречь этим). Поэтому изображение Солнца, построенное во втором фокусе, будет иметь тот же горизонтальный размер, что и само Солнце. Расстояние от этого изображения до Земли также равно 1 а.е. с точностью до фактора порядка e^2 , в итоге горизонтальный угловой диаметр изображения d_A будет таким же, как у самого Солнца в этот момент – $32.0'$.

Заметим также, что лучи, вышедшие из центра Солнца и разошедшиеся при отражении на расстояние x , сойдутся во втором фокусе и разойдутся практически на то же расстояние вблизи Земли. Таким образом, плотность лучей вдоль горизонтальной линии от отражения будет такой же, как от самого Солнца. Мы учтем это далее при расчете звездной величины отражения.

Рассмотрим теперь картину в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты. Лучи Солнца, идущие от него в этой плоскости, будут отражаться от фольги, как от плоского зеркала.



Картина будет эквивалентна изображению Солнца, расположенного в 1 а.е. за экраном, то есть в 3 а.е. от Земли. Вертикальный размер изображения будет равен $d_B = d_A/3 = 10.7'$. Отражение будет представлять собой эллипс с отношением осей 1:3, картина будет выглядеть следующим образом:



Заметим также, что лучи из центра Солнца, разошедшиеся на то же расстояние x вблизи экрана, удалятся друг от друга на $3x$ около Земли. В итоге, плотность потока энергии уменьшится в 3 раза, так же, как и видимая площадь отражения по сравнению с самим Солнцем. Поверхностная яркость Солнца и отражения будут одинаковыми, что имеет место при идеальных зеркалах любой формы и отсутствии поглощения света. Звездная величина отражения составит

$$m = m_0 + 2.5 \lg 3 = -25.6.$$

Здесь m_0 – видимая звездная величина Солнца. Завершив решение задания, мы можем представить, к чему может привести такой эксперимент, если бы он был вдруг реализован. Интересно, что рассмотренное в задаче первое отражение Солнца стало бы единственным, почти все время видимым на Земле, кроме коротких отрезков вблизи перигелия и афелия. Участок экрана, расположенный за Землей, будет частично закрыт от излучения Солнца самой нашей планетой, а лучи Солнца, проходящие мимо Земли, отражались бы в сторону от нас. Лишь вблизи того же положения Земли на малой оси эллипса изображение Солнца у горизонта могло бы наблюдаться в противоположной области неба, причем на его свойствах могла бы существенно сказываться атмосфера Земли.

После второго отражения от фольги свет вернется к фокусу эллипса, в котором находится Солнце. Таким образом, практически вся солнечная энергия, испущенная Солнцем вдоль плоскости эклиптики, дважды отразившись от экрана, возвращалась бы на Солнце. Добавим, что подобный эксперимент может вызвать драматические последствия на Земле, которая станет получать примерно на $1/3$ часть больше солнечной энергии. Это увеличит ее среднюю температуру примерно на 20 градусов.

5. Система оценивания.

Этап 1 – 2 балла. Определение максимального расстояния между центрами Солнца и его отражения. Высокая точность численного значения не предполагается (достаточно 10% точности), главное условие зачета этапа – выражение, что этот угол равен $2e$ в радианной мере. Численно данное значение может даже не определяться, если вместо него в дальнейшем будет указано расстояние между ближайшими точками диска Солнца и отражения (около $83'$).

Если участник неверно определяет конфигурацию Земли на орбите, при которой угловое расстояние между Солнцем и отражением максимально – данный этап не оценивается. Однако, ввиду малости эксцентриситета орбиты Земли, эта ошибка в дальнейшем влияет только на угловое расстояние между объектами, но практически не сказывается на свойствах самого отражения. Поэтому этапы 2, 3 и 5 оцениваются также, по их выполнению, а этап 4 оценивается из 1 балла при условии соответствии рисунка картине, полученной участником.

Этап 2 – 2 балла. Определение углового размера горизонтальной оси отражения, точность $1'$. При верном выполнении первого этапа решения будет достаточно показать, что этот размер совпадает со средним видимым диаметром Солнца, хотя участник может уточнить его и показать, что он будет меньше в $1+4e^2 = 1.001$ раз, и это не влияет на оценку. Если же угловой размер оказывается равным угловому размеру Солнца в перигелии либо афелии – оценка снижается на 1 балл.

Этап 3 – 2 балла. Определение углового размера вертикальной оси отражения, точность $1'$. Достаточно показать, что он будет втрое меньше среднего углового диаметра Солнца (если используется максимальный либо минимальный диаметр – оценка снижается на 1 балл).

Этап 4 – 2 балла. Выполнение рисунка. На нем должны быть указан набор параметров, которые однозначно определяют всю картину (например, угловой радиус или диаметр Солнца, большая и малая оси или полуоси эллипса отражения, расстояние между центрами или краями Солнца и отражения). Относительная точность выполнения рисунка должна составлять не менее 5% (отношения размеров деталей к их истинному размеру должны совпадать в рамках данной точности).

Этап 5 – 2 балла. Определение видимой звездной величины отражения, точность 0.1^m .

Вероятная ошибка при выполнении задания. Неверное определение формы и угловых размеров отражения Солнца, например, оно предполагается кругом того или иного радиуса. В этом случае не засчитываются этапы 2 или 3, в зависимости от того, какая из осей определена неверно. Этапы 4 и 5 оцениваются только по 1 баллу. Рисунок при этом должен соответствовать той картине отражения, которую получил участник. Если отражение Солнца у него получается круглой формы – достаточно указания его радиуса вместо двух осей эллипса. 1 балл за этап 5 (определение звездной величины) ставится только в том случае, если отражение Солнца оказалось во столько же раз слабее самого Солнца, во сколько раз уменьшилась его видимая площадь по сравнению с Солнцем.



10.6. СИНХРОЗАТМЕНИЕ

(В.Б. Игнатъев / О.С. Угольников)

6. Условие. Как известно, Луна удаляется от Земли в среднем на 3.8 см в год. Из-за этого в какую-то эпоху в будущем может сложиться интересная ситуация: строго через каждый драконический год (период возвращения Солнца к одному определенному узлу лунной орбиты на небе) будет происходить центральное солнечное затмение, видимое на Земле в зените.

- 1) Определите, когда такое впервые может случиться в будущем;
- 2) Для этого момента найдите наибольшую фазу данного центрального затмения;
- 3) Определите, сколько других солнечных затмений будет наблюдаться в течение драконического года между этими центральными затмениями, и какие у них будут наибольшие фазы.

Орбиты Земли и Луны считать круговыми, удаление Луны от Земли – равномерным, наклон ее орбиты к эклиптике, расстояние Земли от Солнца, а также радиусы Солнца, Земли и Луны – постоянными. Угловая скорость движения узлов лунной орбиты равна $\omega_N = -C \cdot \Omega^2 / \omega$, где Ω и ω – угловые скорости орбитального движения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли соответственно, а C – постоянная величина.

6. Решение. Для начала определим численное значение константы C из выражения, заданного в условии задачи. Учтем при этом, что период некоторого вращения равен 2π , деленное на модуль угловой скорости этого вращения. Знак минус в выражении в условии говорит о том, что узлы лунной орбиты двигаются с востока на запад, навстречу движению Луны и Солнца на небе. Константа C положительна и равна:

$$C = \left| \frac{\omega_N \omega}{\Omega^2} \right| = \frac{T^2}{t_{N0} t_0} = 0.718.$$

Здесь мы воспользовались современными значениями периода вращения Луны вокруг Земли t_0 (0.0748 года) и периода вращения лунных узлов t_{N0} (18.6 лет). T – период обращения Земли вокруг Солнца. Определим длительности драконического года (периода между прохождениями Солнца одного узла орбиты) и драконического месяца (периода между прохождениями Луны одного узла орбиты) в настоящий момент, учитывая встречное движение лунных узлов и отрицательное значение ω_N :

$$Y_{D0} = \frac{2\pi}{\Omega - \omega_N} = \frac{1}{(1/T) + (1/t_{N0})} = 0.949 \text{ года} = 346.6 \text{ сут};$$

$$M_{D0} = \frac{2\pi}{\omega - \omega_N} = \frac{1}{(1/t_0) + (1/t_{N0})} = 0.0745 \text{ года} = 27.21 \text{ сут}.$$

В настоящий момент драконический год содержит в себе около 12.7 драконических месяцев. Это число не целое, поэтому если в какой-то момент у нас происходит центральное солнечное затмение в зените, то через драконический год Луна не оказывается в этом узле и рядом с Солнцем на небе. До ближайшего новолуния проходит еще около 10 дней, за это время Солнце и узел орбиты смещаются, и условия наступления затмения становятся иными.

С течением времени Луна удаляется от Земли, ее угловая скорость ω уменьшается, а скорость движения узлов (по модулю) ω_N немного увеличивается. Продолжительность

драконического месяца будет расти, а продолжительность драконического года – медленно убывать. В итоге, ближайшая «синхронная» ситуация может возникнуть в момент, когда драконический год Y_D будет содержать в себе ровно $N=12$ драконических месяцев M_D . Запишем соответствующее уравнение:

$$Y_D = \frac{2\pi}{\Omega - \omega_N} = N \cdot \frac{2\pi}{\omega - \omega_N};$$

$$\omega - \omega_N = N \cdot (\Omega - \omega_N).$$

Подставим сюда выражение для угловой скорости вращения узлов:

$$\omega + \frac{C \cdot \Omega^2}{\omega} = N \cdot \left(\Omega + \frac{C \cdot \Omega^2}{\omega} \right).$$

Преобразуем это в квадратное уравнение для ω :

$$\omega^2 - N\Omega\omega - C(N-1) \cdot \Omega^2 = 0.$$

Мы знаем, что величина ω положительна – Луна не будет менять направление вращения вокруг Земли. Поэтому мы выбираем единственный положительный корень уравнения:

$$\omega = \frac{N\Omega + \sqrt{N^2\Omega^2 + 4C(N-1)\Omega^2}}{2} = \Omega \cdot \frac{N + \sqrt{N^2 + 4C(N-1)}}{2} = \Omega \cdot 12.625.$$

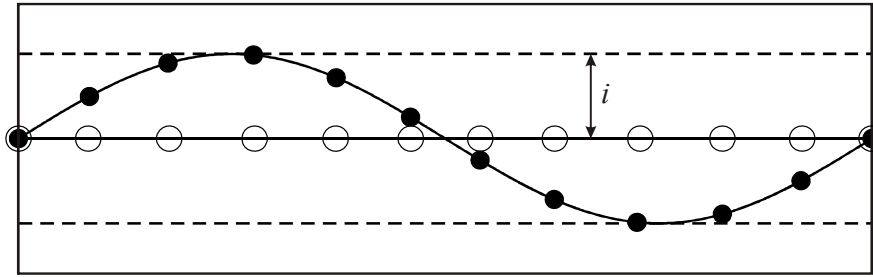
Период обращения Луны вокруг Земли будет равен 1/12.625 года или 28.93 суток. Определим расстояние от Земли до Луны в это время по III закону Кеплера:

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-2/3} = 1.039.$$

Расстояние окажется равным 399360 км. Если мы наблюдаем Луну в зените, то оказываемся ближе к ней на радиус Земли, то есть на расстоянии 392990 км. Угловой диаметр Луны с такого расстояния будет равен $\delta_L = 30.41'$. Угловой диаметр Солнца с расстояния в 1 а.е. равен $\delta_S = 31.94'$. В итоге, затмение в зените будет кольцеобразным, и его фазу можно определить просто как отношение диаметров: $\Phi = 0.952$. Отметим, что с учетом реальной эллиптичности орбиты Луны такие затмения могут происходить и в настоящее время.

Определим, когда такая ситуация случится. Расстояние до Луны к этому времени должно увеличиться на $0.039 \cdot L_0 \approx 15$ тысяч км. При удалении на 3.8 см в год искомый интервал времени есть $(1.5 \cdot 10^7 / 3.8 \cdot 10^{-2}) \approx 400$ млн лет.

Нам остается рассмотреть другие затмения в ходе драконического года. По аналогии с современной эпохой, может показаться, что через половину драконического года может произойти еще одно похожее затмение. Но обратим внимание, что половина драконического года в ту будущую эпоху будет содержать ровно 6 драконических месяцев. В итоге, Луна окажется у того же самого узла орбиты, где она была во время центрального кольцеобразного затмения. Солнце же в это время окажется у противоположного узла. В этот момент затмение действительно произойдет, но оно будет полным лунным. Нас же по условию задачи интересуют солнечные затмения.



Можно показать, что драконический год, равный 12 драконическим месяцам, будет содержать ровно 11 синодических периодов Луны. Новолуния, при которых будут возможны затмения, произойдут через 5 и 6 синодических периодов Луны после центрального кольцеобразного затмения. Они произойдут на угловом расстоянии от узла орбиты:

$$\lambda = \frac{360^\circ}{2 \cdot 11} = 16.36^\circ.$$

Учитывая малость угла наклона орбиты Луны, геоцентрическое угловое расстояние Луны от эклиптики во время этих новолуний есть

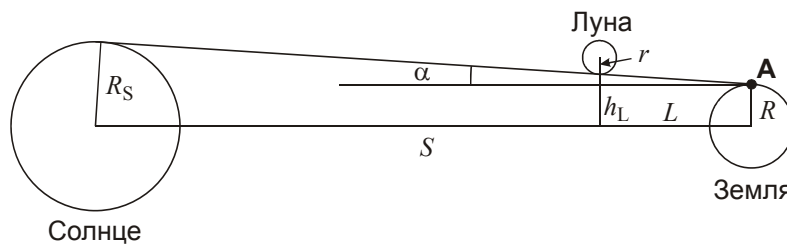
$$\beta = i \cdot \sin \lambda = 1.45^\circ.$$

Переводя эту величину в угловые минуты, получаем $87.0'$. Понять, будет ли при этом происходить солнечное затмение, можно несколькими способами. Один из них, самый простой, состоит в вычислении суточного параллакса Луны, который равен $R/L = 0.0160 = 54.8'$. Даже при самых благоприятных обстоятельствах, когда параллактическое смещение приблизит на небе Луну к Солнцу, между их центрами угловое расстояние составит $32.2'$. Эта величина больше суммы видимых радиусов Солнца ($16.0'$) и Луны у горизонта ($15.0'$). Таким образом, солнечных затмений у противоположного узла орбиты Луны вообще не будет!

К этому же выводу можно прийти более стандартным, хотя и сложным способом. Пространственное расстояние центра Луны от плоскости эклиптики есть

$$h = L \sin \beta = 10110 \text{ км.}$$

Рассмотрим предельную ситуацию, при которой наступает частное солнечное затмение. Максимальное расстояние Луны от плоскости эклиптики есть:



$$h_L = R + r + \alpha \cdot L = R + r + \frac{R_s - R}{S} \cdot L = \frac{R_s L + R(S - L) + rS}{S} = 9950 \text{ км.}$$

Здесь S – расстояние от Земли до Солнца, R_s , R и r – радиусы Солнца, Земли и Луны. Итак, в 5-м и 6-м новолунии расстояние Луны от плоскости эклиптики будет больше предельного, и солнечных затмений у противоположного узла орбиты не будет, случится только лунное. О других новолуниях, на еще большем расстоянии от узла, говорить и смысла нет. Итак, при такой ситуации на Земле будут происходить только кольцеобразные затмения раз в драконический год (около 345 с половиной суток).

6. Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Определение угловой скорости движения Луны, при которой будет выполнено условие задания. Численное значение угловой скорости записывать необязательно, достаточно выражения, которое можно будет далее использовать для определения расстояния до Луны, фазы затмения и времени, через которое случится данная ситуация. Этап полностью засчитывается, если получена верная формула для угловой скорости. При неверном численном значении, если такое указывается, участник получит неправильное расстояние до Луны, и ему не будет засчитан следующий этап решения.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: участник предполагает, что период вращения узлов лунной орбиты остается равным 18.6 годам. Эффект от подобной ошибки невелик, угловая скорость Луны получается равной $12.591 \cdot \Omega$, а расстояние до Луны – 400100 км. Оценка уменьшается на 1 балл, дальнейшие этапы оцениваются, исходя из точности их выполнения.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: анализ второго корня квадратного уравнения, который не имеет смысла. Если это делается наряду с правильным корнем, решение оценивается, из итоговой оценки вычитается 2 балла. Если рассматривается только неправильный корень, общая оценка за решение не превосходит 2 баллов.

2 этап – 1 балл. Определение расстояния до Луны, точность 1%.

3 этап – 2 балла. Определение фазы затмения. Ее значение должно в точности соответствовать величине угловой скорости или расстояния до Луны, полученной участником.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: опускание фактора радиуса Земли, который увеличивает наибольшую фазу примерно на 0.015. Оценка уменьшается на 1 балл.

4 этап – 1 балл. Определение времени, через которое наступит подобная ситуация, точность 20 млн лет.

5 этап – 2 балла. Анализ ситуации, которая наступает через половину драконического года после описанного выше затмения. Участник должен сделать вывод, что в момент прохождения Солнцем противоположного узла солнечное затмение не произойдет, так как Луна будет располагаться с другой стороны от Земли. Таким образом, необходимо рассматривать два соседних новолуния, в которых условия для наступления затмения будут одинаковыми. Этап засчитывается только в этом случае. Если вывод участника сводится к тому, что около противоположного узла орбиты произойдет еще одно или какое-либо иное нечетное число затмений – этот и последующий этапы полностью не засчитываются.

6 этап – 2 балла. Определение количества и фазы затмений у противоположного узла. Этап засчитывается только в том случае, если делается обоснованное доказательство, что других затмений не происходит (участник может написать ответ – фаза равна нулю, что не вполне корректно, но за ошибку не считается, если при этом доказывается, что даже касательных затмений быть не может). При любых вариантах решения, в которых затмения у противоположного узла происходят, последний этап не засчитывается.

Возможное неполное решение: участник указывает, что пересечение Солнцем противоположного узла орбиты произойдет между новолуниями (выполняя тем самым 5 этап), и сразу делает вывод, что солнечных затмений не будет, не делая вычислений минимального расстояния между Солнцем и Луной на небе либо расстояния Луны от плоскости эклиптики, то есть хотя бы одним из двух способов. Последний этап засчитывается 1 баллом.

Максимальная оценка за все решение – 10 баллов.



11.1. ЛЕТНЯЯ НОЧЬ (О.С. Угольников)

1. Условие. Наблюдатель находится в северном полушарии Земли на широте φ , меньшей широты Полярного круга, в момент летнего солнцестояния. На какой максимальной высоте над горизонтом он может увидеть планету Солнечной системы в сумеречный и ночной период, когда Солнце располагается не выше горизонта? Орбиты планеты и Земли – круговые с радиусами R и R_0 соответственно. Считать Солнце и планету точечными объектами, орбита планеты лежит в плоскости эклиптики, рефракцией пренебречь.

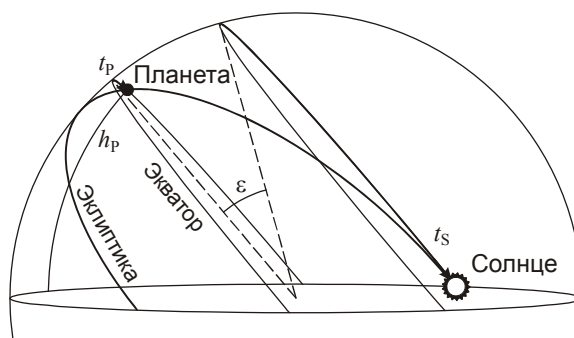
1. Решение. Решим вначале задачу для случая внешней планеты ($R > R_0$). Задачу проще всего было бы решить для момента солнечной полуночи (или, то же самое, для противостояния планеты). Это соответствует звездному времени 18 часов, эклиптика пересекает горизонт в точках равноденствий, а самой высокой точкой эклиптики окажется точка зимнего солнцестояния, которая в этот момент будет проходить верхнюю кульминацию на высоте

$$h_0 = 90^\circ - \varphi - \varepsilon.$$

Здесь ε – угол наклона экватора к эклиптике. Однако, эта высота не будет максимально возможной для планеты. В указанный момент эклиптика будет образовывать минимальный угол с горизонтом для данной широты, равный h_0 . Если мы располагаемся южнее Полярного круга, то в другие моменты ночи угол между эклиптикой и горизонтом будет больше, и планета (вдали от противостояния) может оказаться и на большей высоте.

По условию задачи, планета располагается в плоскости эклиптики. Тогда задачу можно решить, зафиксировав максимальный угол наклона эклиптики к горизонту и предположив, что планета располагается в наивысшей точке эклиптики в данный момент.

Угол наклона эклиптики к горизонту в летнее солнцестояние в северном полушарии минимален в полночь и возрастает к полудню. На всех рассматриваемых в задании широтах длительность ночи меньше половины суток, поэтому нас будет интересовать момент восхода (захода) Солнца.



Допустим, Солнце заходит за горизонт, его часовой угол t_s положителен и превышает 6 часов (так как мы находимся в северном полушарии, и склонение Солнца $\delta = \varepsilon > 0$). Рефракцией и угловыми размерами Солнца мы пренебрегаем, поэтому зенитное расстояние Солнца $z_s = 90^\circ$. Для этой величины известно соотношение:

$$\cos z_s = \sin \varphi \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon \cos t_s.$$

Тогда часовой угол Солнца есть

$$\cos t_s = \frac{\cos z_s - \sin \varphi \sin \varepsilon}{\cos \varphi \cos \varepsilon} = -\tan \varphi \tan \varepsilon.$$

Солнце находится на эклиптике и одновременно – на горизонте. Эклиптика с горизонтом не совпадает, коль скоро мы не находимся на Полярном круге. Следовательно, она пересекает его в двух точках – в Солнце и противосолнечной точке. Наивысшая точка эклиптики будет удалена от Солнца на 90° (в случае захода Солнца – к востоку), в ней и будет достигнут максимум положения точки эклиптики над горизонтом в летнюю ночь. В соответствии с условием, именно там и должна располагаться планета, проходящая точку квадратуры.

Очевидно, что речь идет о точке осеннего равноденствия (в случае восхода Солнца это была бы точка весеннего равноденствия). По прямому восхождению она отстоит от Солнца на 6 часов, и часовой угол этой точки t_L есть $t_s - 90^\circ$. Из этого мы имеем

$$\sin t_p = -\cos t_p = \tan \varphi \tan \varepsilon.$$

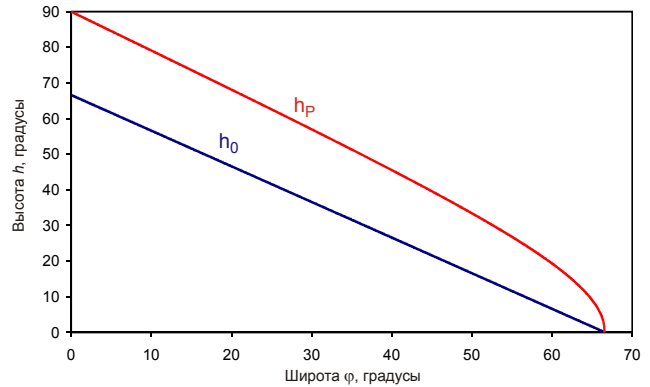
Склонение этой точки $\delta_p = 0$, угол t_p положителен, но не превышает 6 часов (или 90°). Вновь воспользуемся формулой для зенитного расстояния, приведенной выше, и определим высоту данной точки над горизонтом:

$$\sin h_p = \cos z_s = \sin \varphi \sin \delta_p + \cos \varphi \cos \delta_p \cos t_p = \cos \varphi \cos t_p = \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \tan^2 \varepsilon}.$$

Более наглядной будет формула для косинуса этой величины:

$$\cos h_p = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \tan^2 \varepsilon} = \sin \varphi \sqrt{1 + \tan^2 \varepsilon} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varepsilon}.$$

Эта высота больше, нежели высота h_0 , рассчитанная в начале решения для планеты в противостоянии в кульминации, в чем можно убедиться по графику. На экваторе ($\varphi = 0$) планета может располагаться в зените, а на полярном круге ($\varphi = 90^\circ - \varepsilon$) высота обращается в ноль. Примечательно, что наивысшее положение внешней планеты в летнюю ночь соответствует ее западной или восточной квадратуре, ответ для внешней планеты не зависит от радиуса ее орбиты R .

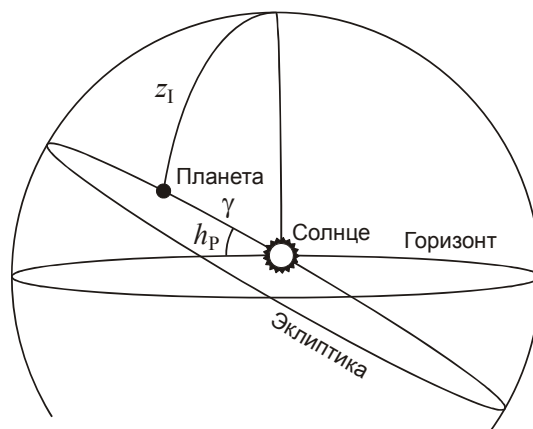


Теперь мы можем решить задачу и для случая внутренних планет ($R < R_0$). В квадратуре такие планеты оказаться не могут, их максимальное угловое удаление от Солнца есть

$$\gamma = \arcsin (R/R_0).$$

Тем не менее, максимальная высота такой планеты над горизонтом будет достигнута в тот же момент, когда эклиптика образует с горизонтом максимальный за летнюю ночь угол h_L . Зенитное расстояние планеты можно определить из сферического треугольника «планета – зенит – Солнце»:

$$\cos z_1 = \cos \gamma \cos(\pi/2) + \sin \gamma \sin(\pi/2) \sin h_p = \sin \gamma \sin h_p.$$



Высота планеты h_I есть дополнение зенитного расстояния до $\pi/2$. Для нее мы имеем:

$$\sin h_I = \sin \gamma \sin h_p = \frac{R}{R_0} \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \tan^2 \varepsilon}.$$

Окончательный ответ выглядит следующим образом:

$$h = \arcsin \left[\frac{R}{R_0} \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \tan^2 \varepsilon} \right], \quad R < R_0;$$

$$h = \arcsin \left[\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \tan^2 \varepsilon} \right] = \arccos \left[\frac{\sin \varphi}{\cos \varepsilon} \right], \quad R > R_0.$$

1. Система оценивания. Данная задача решается в общем виде, без численных выкладок. При проверке необходимо учесть, что способ решения участника может отличаться от приведенного выше, необходимо проверять правильность полученных соотношений и их эквивалентность приведенным выше (при возможно иной записи). Требуется точное соответствие, задача не предполагает приближенных вычислений. Оценка складывается из двух основных составляющих. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе.

Максимальная оценка за все решение – 10 баллов.

Часть 1 – Качество решения (6 баллов).

Этап 1 – 1 балл. Указание момента восхода/захода Солнца как момента, когда эклиптика образует максимальный угол с горизонтом, и наивысшее положение планеты (как внутренней, так и внешней) должно соответствовать именно этому моменту.

Этап 2 – 1 балл. В случае внешней планеты она должна располагаться на небе строго в 90° от Солнца (что может, в частности, указываться как квадратура планеты).

Этап 3 – 1 балл. В случае внутренней планеты она должна располагаться в наибольшей элонгации.

Этап 4 – 1 балл. Правильное выражение для склонения внешней планеты, которое должно быть равно нулю (иными словами, внешняя планета должна располагаться на небесном экваторе).

Этап 5 – 1 балл. Правильное указание, что часовой угол внешней планеты должен отличаться от часового угла Солнца на 90° .

Этап 6 – 1 балл. Правильный анализ для случая внутренней планеты при том же положении эклиптики.

Часть 2 – Качество ответа (4 балла)

0 баллов: ответ отсутствует, либо в ответе участника высота планеты (как внешней, так и внутренней) не совпадает с верной ни при одном значении широты.

1 балл: ответ записан только для частных значений широт или в виде формулы для произвольной широты, но совпадает с правильным только для одного типа планет и только на одной широте (например, на Полярном круге, к этому же случаю относится рассмотрение планеты в кульминации, описанное выше).

2 балла:

а) ответ полностью соответствует верному для одного из типов планет (например, для внешних) для любой широты, но не записан либо неверен ни для одной широты для другого типа планет;

б) записан для обоих типов планет и верен хотя бы для одной широты и в одном, и в другом случае.

3 балла: записанный ответ полностью соответствует верному для одного из типов планет для любой широты, а также является верным хотя бы при одном значении широты для другого типа планет.

4 балла: дан точный правильный ответ для обоих типов планет (при этом его запись может отличаться от приведенной выше, необходима проверка однозначного соответствия).

Фактически, оценка за качество решения является суммой 2-балльных оценок для каждого из типов планет, где ставится 0 за полностью неверную формулу, 1 – за частично верную и 2 – за полностью верную формулу.

Замечание: участник может рассматривать момент восхода Солнца. Структура решения при этом не меняется, внешняя планета располагается в точке весеннего равноденствия, часовые углы Солнца и планеты меняют знак.

Замечание: участник может не записывать формулы для самой высоты, а выписать соотношение для их синуса или косинуса, что считается достаточным.

Возможное неправильное решение: определение высоты точки зимнего солнцестояния в верхней кульминации (эквивалентно максимальной высоте планеты в противостоянии), первая формула решения. Верного выполнения какого-либо из этапов нет, ставится 0 баллов за качество решения и 1 балл за качество ответа.

Возможное неправильное решение: участник устанавливает, что внешняя планета располагается в точке равноденствия, но далее вычисляет максимальную высоту, соответствующую верхней кульминации этой точки ($h = 90^\circ - \varphi$), считая часовой угол нулевым. Планета в точке равноденствия может быть на такой высоте, но момент кульминации летом попадет на дневное время, что не соответствует условию задачи. В этом случае могут быть засчитаны этапы 1, 2 и 4 при условии их правильного выполнения и 1 балл за качество ответа (он оказывается верен в зените). К этим 4 баллам добавляются баллы за правильный анализ случая внутренних планет, если он был сделан.



11.2. РАДИАНТ В ДВИЖЕНИИ (О.С. Угольников)

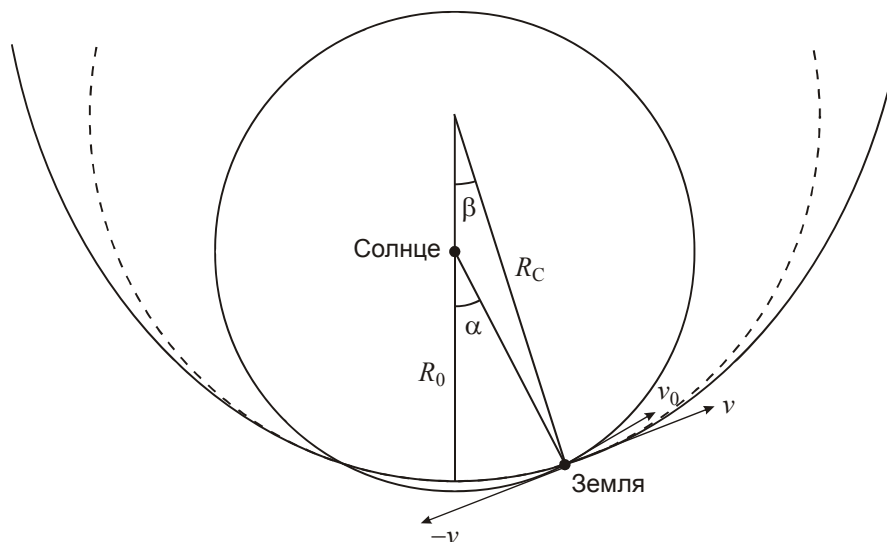
2. Условие. В момент максимума активности метеорного потока его радиант наблюдается на эклиптике в 90° от Солнца и смещается по ходу периода активности вдоль эклиптики с угловой скоростью ω (она считается положительной, если радиант движется в том же направлении, что и Солнце, и отрицательной при встречном движении). Определите характерную большую полуось орбит метеорных частиц, считая, что метеорный рой компактен, и все его частицы имеют одинаковую гелиоцентрическую долготу перигелия. Орбиту Земли считать круговой с радиусом R_0 , масса Солнца равна M , взаимодействие частиц с Землей и осевое вращение Земли не учитывать.

2. Решение. В условии задачи не сказано, с какой стороны от Солнца располагался радиант. Тем не менее, мы можем сделать вывод, что геоцентрическая скорость метеоров в момент максимума перпендикулярна линии Солнце-Земля. Следовательно, гелиоцентрическая скорость метеоров в центре роя, равная векторной сумме геоцентрической скорости и скорости движения Земли, также перпендикулярна линии Солнце-Земля, и в момент максимума Земля оказывается на долготе перигелия или на долготе афелия орбиты, общей для всех частиц роя.

Так как нам неизвестно, находятся ли частицы в перигелии либо в афелии, обозначим через e эксцентриситет их орбит, но будем считать его положительным, если встреча произошла в перигелии и отрицательным для случая афелия. Расстояние Земли от Солнца обозначим как R_0 . Тогда искомая большая полуось орбиты метеорных тел (тех, что попали в центр роя и встретились с Землей в максимуме) и их скорость равны

$$a = \frac{R_0}{1-e}; \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R_0}(1+e)} = v_0 \sqrt{1+e}.$$

Здесь v_0 – орбитальная скорость Земли. Рассмотрим момент времени, отстоящий от максимума на очень малый промежуток времени t . Земля сместится по орбите на угол $\alpha = \omega_0 t$, где $\omega_0 = v_0/R_0$ – угловая скорость Земли. На такой же угол повернется вектор скорости Земли $\mathbf{v}_0$. В этот момент она будет встречаться с другими частицами роя с несколько иным перигелийным (либо афелийным) расстоянием.



Нам надо выяснить направление вектора скорости этих метеоров v , не забывая, что они могут двигаться как навстречу Земле, так и в ту же сторону. Это можно сделать, используя уравнение эллипса в полярных координатах, однако мы можем поступить проще, избавляя себя от громоздких выкладок. Учтем, что рой компактен, величина t очень мала, и мы находимся вблизи точки перигелия либо афелия орбиты частиц. На рой действует сила притяжения Солнца. Создаваемое ей ускорение связано с мгновенным радиусом кривизны траектории R_C известным соотношением

$$g = \frac{GM}{R_0^2} = \frac{v^2}{R_C} = \frac{v_0^2(1+e)}{R_C}.$$

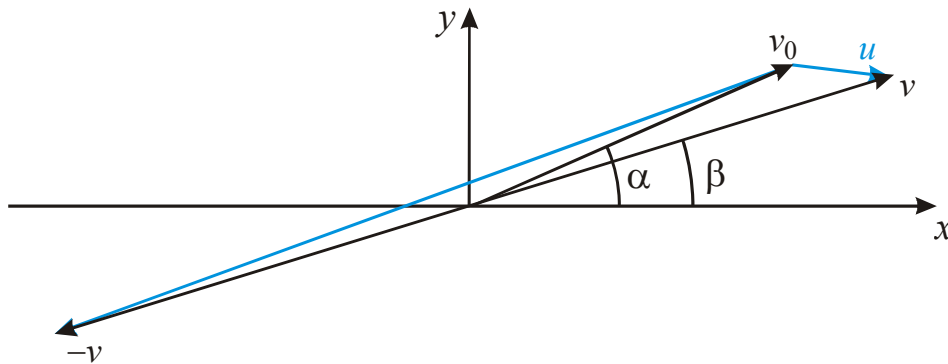
Отсюда мы получаем выражение для радиуса кривизны:

$$R_C = \frac{v_0^2(1+e)R_0^2}{GM} = R_0(1+e).$$

На коротких масштабах мы можем считать траекторию метеорных тел окружностью с радиусом R_C , центр которой смещен относительно Солнца (см. рисунок). Тогда через время t вектор скорости метеорных тел, с которыми будет встречаться Земля, повернется на малый угол

$$\beta = \frac{R_0 \cdot \omega_0 t}{R_C} = \frac{\alpha}{1+e}.$$

Обратим внимание, что мы не знаем направления движения частиц. Будем считать, что их скорость v положительна, если они движутся в одну сторону с Землей и отрицательна, если они движутся навстречу Земле. Определим направление геоцентрической скорости метеоров.



Выберем систему координат, ось x которой направлена в сторону движения Земли в момент максимума потока. Через малое время t она будет образовывать с этой осью малый угол α , а скорость метеорных частиц – малый угол β . Ввиду малости этих углов проекция геоцентрической скорости частиц на ось x остается равной

$$u_x = \pm v - v_0 = v_0 \cdot (\pm \sqrt{1+e} - 1).$$

Обратим внимание, что при $e \neq 0$ эта проекция не может быть нулевой. Знаки «+» и «-» здесь соответствуют сонаправленному и встречному движению частиц по отношению к Земле. Проекция геоцентрической скорости на ось y есть

$$u_y = \pm v \cdot \beta - v_0 \cdot \alpha = v_0 \cdot \alpha \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{1+e}}{1+e} - 1 \right).$$

Если величина u_x положительна, то угол поворота геоцентрической скорости метеоров за время t есть

$$\gamma = \frac{u_y}{u_x} = \alpha \cdot \frac{\pm \frac{\sqrt{1+e}}{1+e} - 1}{\pm \sqrt{1+e} - 1} = \frac{\alpha}{1+e} \cdot \frac{\pm \sqrt{1+e} - (1+e)}{\pm \sqrt{1+e} - 1} = \frac{\alpha}{1+e} \cdot (\mp \sqrt{1+e}) = \frac{\mp \alpha}{\sqrt{1+e}}.$$

Если же величина u_x отрицательна, то угол поворота составит

$$\gamma = \frac{-u_y}{u_x} = \frac{\pm \alpha}{\sqrt{1+e}}.$$

Отсюда мы находим угловую скорость движения радианта для всех возможных случаев:

$$\omega = \frac{\gamma}{t} = \frac{\pm \omega_0}{\sqrt{1+e}}.$$

Нас не интересует, в каком случае эта угловая скорость будет положительной, а в каком отрицательной, так как нам нужно найти эксцентриситет, а он не зависит от знака угловой скорости:

$$e = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1.$$

Вспомним, что величину e мы считали положительной для случая перигелия и отрицательной для случая афелия. Нам остается взять выражение для большой полуоси орбиты и записать окончательный ответ:

$$a = \frac{R_0}{1-e} = \frac{R_0}{2 - (\omega_0/\omega)^2} = \frac{R_0}{2 - \frac{GM}{R_0^3 \omega^2}} = \frac{R_0^4}{2R_0^3 - GM/\omega^2}.$$

Обратим внимание на интересный факт – полученное соотношение напоминает выражение для большой полуоси в зависимости от угловой скорости движения тела в перигелии либо афелии, но там выражение $(\omega/\omega_0)^2$ в знаменателе стояло бы в обратном виде. Для параболической орбиты ($e=1$) угловая скорость движения в перигелии есть $\omega_0 \cdot \sqrt{2}$, а для геоцентрической угловой скорости радианта метеоров мы получаем $\omega_0/\sqrt{2}$. Если мы представим себе очень быстрые метеорные потоки на гиперболических орбитах, то в этом случае угловая скорость движения радианта была бы меньше, чем для эллиптических орбит.

Если орбита метеорных тел близка к круговой с $a = R_0$ и $e = 0$, то скорости метеоров будут поворачиваться вместе с Землей, что соответствует $\omega = \omega_0$. Максимальной скоростью движения радианта была бы для гипотетического потока, для которого положение Земли совпадало с афелием орбиты, а дальше метеорные тела просто падали на Солнце.

Примечателен симметричный вид картины относительно направления движения частиц. Если представить себе два метеорных потока с идентичными орбитами в плоскости эклиптики и разным направлением движения, то у этих потоков существенно различались бы геоцентрические скорости, но вот движение радианта происходило бы с одинаковыми по модулю и разными по направлению угловыми скоростями.

2. Система оценивания. Оценка за решение образуется из двух составляющих – качество решения и качество ответа (6 и 4 балла соответственно). Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – качество решения (6 баллов).

Этап 1 – 3 балла. Правильное соотношение между углами поворота гелиоцентрических скоростей метеоров и Земли при смещении относительно момента максимума потока. Соотношение удобней всего выражать через эксцентриситет, при этом можно либо считать его отрицательным в случае афелия, либо записывать для афелия отдельную формулу. Выражение может быть получено как из уравнений эллипса, так и с применением параметра кривизны траектории, как сделано выше. Вместо эксцентриситета можно использовать соотношение большой полуоси и радиуса орбиты Земли a/R_0 . В этом случае формулы получаются более громоздкими, но отпадает надобность отдельно оговаривать случаи перигелия и афелия частиц.

Вероятная ошибка при выполнении этапа: участник рассматривает только случай перигелия частиц либо записывает универсальные формулы, не оговаривая, что величина e может быть отрицательной, и это соответствует афелию. Данный этап оценивается в 1 балл, однако последующие могут быть оценены полностью при условии верного выполнения, так как верные соотношения могут являться универсальными.

Этап 2 – 3 балла. Выражение угловой скорости радианта в зависимости от эксцентриситета или отношения a/R_0 .

Вероятная ошибка при выполнении этапа: аналогично первому этапу, участник не рассматривает возможность встречных и попутных потоков или разных направлений геоцентрической скорости относительно движения Земли. Аналогично, этап оценивается в 1 балл, но другие могут быть оценены полностью, так как рассмотрение одного частного случая может в итоге дать верную универсальную формулу.

Вероятная ошибка при выполнении всего решения: при движении радианта анализируется гелиоцентрическая скорость вместо геоцентрической. Первый этап засчитывается не выше 2 баллов, так как в нем анализируется только орбита метеоров. Второй этап не оценивается. Вторая часть решения оценивается, исходя из полученного ответа.

Часть 2 – качество ответа (4 балла).

0 баллов: ответ отсутствует либо не соответствует размерности. К этому же случаю относится ситуация, когда в формуле ответа складываются величины разной размерности.

Примечание: участник может выразить ответ в астрономических единицах, записав выражение $1/(2-(\omega_0/\omega)^2)$ или аналогичной формы. Это не считается нарушением правила размерностей.

1 балл: ответ записан, соответствует размерности, но не является симметричным относительно знака величины ω (в нем присутствует параметр ω в нечетной степени, подстановка величины $-\omega$ вместо ω дает иной ответ).

2 балла: ответ записан, соответствует размерности и симметричен относительно знака угловой скорости радианта. При этом реализуется одна из ситуаций:

а) существуют значения ω , при котором большая полуось a положительна и возрастает с модулем ω . К этому же случаю относится запись выражения для угловой скорости движения тела в перигелии, которая отличается от правильной перестановкой ω и ω_0 .

б) большая полуось a определена и положительна для любых значений ω . К примеру, участник может просто использовать формулу для угловой скорости для кругового вращения и записать ответ $a = (GM/\omega^2)^{1/3}$.

3 балла: ответ записан, соответствует размерности и симметричен относительно знака угловой скорости радианта. Большая полуось определена и положительна не для любых значений ω , но в области, где она положительна, она всегда уменьшается с увеличением модуля угловой скорости ω . При этом ответ не соответствует правильному.

4 балла: ответ, однозначно эквивалентный правильному (запись может иметь разные формы).

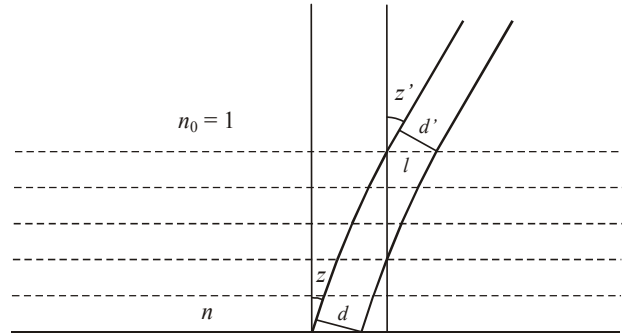


11.3. ДАЛЕКОЕ НЕБО (О.С. Угольников)

3. Условие. В рамках программы поиска обитаемых миров космический аппарат будущего совершил посадку на некоторую планету около звезды сферической формы и измерил физические характеристики планетной атмосферы. Оказалось, что ее вертикальная оптическая толщина равна τ , а показатель преломления воздуха у поверхности – n . Определите зависимость полной звездной величины звезды m и ее поверхностной звездной величины (с квадратной секунды) μ от видимого зенитного расстояния центра звезды z , если в зените эти величины составляли m_0 и μ_0 соответственно.

При решении рассмотрите положения звезды достаточно высоко над горизонтом, когда не нужно принимать в расчет кривизну поверхности планеты, и атмосфера считается состоящей из плоскопараллельных слоев. Считайте, что $\tau \ll 1$ и $(n - 1) \ll 1$, обе величины не зависят от длины волны, однако взаимное соотношение между ними может быть любым. Ответ нужно получить с точностью до слагаемых порядка τ^1 и $(n - 1)^1$. Отражением света от атмосферных слоев пренебречь, угловой диаметр звезды в небе считать малым.

3. Решение. Рассмотрим для начала идеализированный случай абсолютно прозрачной атмосферы: $\tau = 0$. Тогда единственным фактором, который будет влиять на визуальные характеристики звезды, станет атмосферная рефракция. По условию задачи, мы считаем атмосферу плоскопараллельной. Пусть центр звезды виден на зенитном расстоянии z .



Изобразим траекторию луча от центра звезды сквозь атмосферу. По закону Снеллиуса, произведение показателя преломления и синуса угла между траекторией луча и отвесной линией $n(h) \cdot \sin z(h)$ есть постоянная величина. Поэтому мы можем не рассматривать изменение траектории луча в разных слоях атмосферы, а сразу сравнить ее до входа в атмосферу (показатель преломления равен 1) и у поверхности:

$$n \cdot \sin z = \sin z'.$$

Здесь z' – зенитное расстояние источника света за атмосферой. По условию задачи, показатель преломления у поверхности n мало отличается от единицы. Обозначим разность зенитных расстояний за атмосферой и у поверхности $z' - z$ (фактически, величину рефракции) как Δz , и она невелика. Тогда мы можем записать:

$$\sin(z + \Delta z) = n \cdot \sin z = \sin z + (n - 1) \sin z.$$

По свойствам приближенных вычислений

$$\sin(z + \Delta z) = \sin z + \Delta z \cos z.$$

Отсюда мы получаем выражение для величины рефракции:

$$\Delta z = (n - 1) \tan z,$$

которое хорошо известно в несколько ином виде: безразмерная величина $(n - 1)$ переводится в угловые секунды (умножается на $206265''$) и называется постоянной рефракции. На Земле она равна примерно $60''$.

Рефракция сказывается как на суммарной яркости центральной звезды, так и на ее угловых размерах. Действительно, рассмотрим некий второй луч звезды, параллельно смещенный относительно первого на величину l по горизонтали. Тогда расстояние между лучами за атмосферой и у поверхности есть

$$d' = l \cos z', d = l \cos z.$$

Соотношение между плотностями потока энергии будет выглядеть как

$$\frac{J}{J_0} = \frac{\cos z'}{\cos z}.$$

Это не входит в противоречие с тем, что прозрачная плоскопараллельная атмосфера не должна изменять величину потока энергии от звезды на поверхности. Действительно, уменьшение плотности потока энергии будет компенсировано тем, что лучи будут приходить на поверхность под меньшим углом к нормали, соответствующий фактор также описывается соотношением косинусов зенитных расстояний. Подставим в последнюю формулу соотношение для зенитных расстояний:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 z}}{\cos z} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 z - (n^2 - 1) \sin^2 z}}{\cos z} = \frac{\sqrt{\cos^2 z - (n^2 - 1) \sin^2 z}}{\cos z}.$$

Учитывая малость величины $(n - 1)$, имеем:

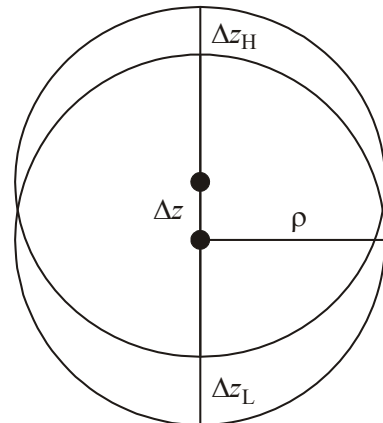
$$\frac{J}{J_0} = \sqrt{1 - (n^2 - 1) \tan^2 z} \approx \sqrt{1 - 2(n - 1) \tan^2 z} \approx 1 - (n - 1) \tan^2 z.$$

Рассмотрим теперь, как будет выглядеть звезда в небе планеты. Пусть ее угловой радиус равен ρ , по условию задачи эта величина небольшая. Верхний край звезды, соответствующий меньшему зенитному расстоянию z_H , будет «приподниматься» за счет рефракции слабее, чем нижний (зенитное расстояние z_L). В итоге, изображение звезды станет эллипсом с вертикально ориентированной малой осью. Пусть реальной угловой радиус звезды равен ρ . Тогда мы имеем:

$$z'_{L,H} = z' \pm \rho = z_{L,H} + (n - 1) \tan z_{L,H}.$$

Обозначим малую полуось эллипса – видимого изображения звезды как b . Тогда

$$\begin{aligned} z_{L,H} &= z \pm \rho; \\ \tan z_{L,H} &= \tan z \pm \frac{b}{\cos^2 z}; \\ z' \pm \rho &= z + (n - 1) \tan z \pm b \pm (n - 1) \frac{b}{\cos^2 z}. \end{aligned}$$



Из этого получаем

$$\rho = b + (n-1) \frac{b}{\cos^2 z} = b \cdot \frac{\cos^2 z + (n-1)}{\cos^2 z}.$$

В итоге, для малой полуоси имеем

$$b = \rho \cdot \frac{\cos^2 z}{\cos^2 z + (n-1)}.$$

Интересно, что даже в зените малая полуось b_0 не оказывается равной истинному угловому радиусу звезды, она там лишь совпадает с большой полуосью a , равной ρ/n . Однако, размер большой полуоси не меняется с зенитным расстоянием, поэтому мы можем сравнить площади изображения звезды на зенитном расстоянии z и в зените:

$$\frac{s}{s_0} = \frac{b}{b_0} = \frac{n \cdot \cos^2 z}{\cos^2 z + (n-1)} = \frac{\cos^2 z + (n-1)(1 - \sin^2 z)}{\cos^2 z + (n-1)} \approx 1 - (n-1) \tan^2 z.$$

Площадь видимого диска звезды уменьшилась так же, как и его суммарная яркость. Поверхностная яркость звезды при наблюдении через прозрачную преломляющую атмосферу не зависит от ее зенитного расстояния. Мы вывели это свойство для случая плоскопараллельной атмосферы и малого отличия показателя преломления от единицы. На самом деле, поверхностная яркость источника (или интенсивность его излучения) остается в точности неизменной при условии фиксированных показателей преломления сред, в которых находятся источник и приемник, а также отсутствия ослабления (поглощения, рассеяния) на пути распространения излучения.

Теперь учтем наличие этого самого поглощения, а точнее – ненулевой вертикальной оптической толщины атмосферы τ . Вообще говоря, траектория распространения излучения не является прямой линией. Но с учетом малой величины $(n-1)$ при расчете поглощения мы можем считать ее таковой, а угол наклона к вертикали – равным z (именно таким он будет в самых низких плотных слоях атмосферы, где и происходит основное поглощение). Погрешность от такого предположения будет иметь порядок величины произведения сразу двух малых величин $\tau \cdot (n-1)$, и мы можем не принимать этот фактор во внимание. Тогда ослабление как полной, так и поверхностной яркости вследствие поглощения будет выражаться законом Бугера:

$$\frac{J_E}{J} = \frac{j_E}{j} = \exp\left(-\tau \cdot \frac{1}{\cos z}\right).$$

Учитываем полученные ранее соотношение для J/J_0 и независимость j от зенитного расстояния, имеем:

$$J_E \approx J_0 \cdot (1 - (n-1) \tan^2 z) \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{1}{\cos z}\right) \approx J_E(z=0) \cdot (1 - (n-1) \tan^2 z) \cdot \exp\left(-\tau \cdot \left(\frac{1}{\cos z} - 1\right)\right);$$

$$j_E \approx j_0 \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\cos z}\right) \approx j_E(z=0) \cdot \exp\left(-\tau \cdot \left(\frac{1}{\cos z} - 1\right)\right).$$

Воспользовавшись формулой Погсона, получаем искомые зависимости:

$$m = m_0 - 2.5 \lg \frac{J_E}{J_E(z=0)} = m_0 + \frac{2.5}{\ln 10} \cdot ((n-1) \tan^2 z + \tau ((1/\cos z) - 1));$$

$$\mu = \mu_0 - 2.5 \lg \frac{j_E}{j_E(z=0)} = \mu_0 + \frac{2.5 \cdot \tau}{\ln 10} ((1/\cos z) - 1).$$

Величина $2.5/\ln 10 = (\ln 2.512)^{-1}$ равна примерно 1.09 и хорошо известна всем, кто занимается фотометрией небесных светил. При фотометрии светил на Земле мы учитываем лишь второе из слагаемых в квадратных скобках формулы для звездной величины. Связано это с тем, что фактор $(n-1)$ на Земле на три порядка меньше, чем τ , и при больших высотах над горизонтом он незаметен на фоне даже современных погрешностей фотометрии. Хотя у горизонта уменьшение размеров и яркости небесных светил за счет рефракции вполне ощутимо.

Можно предположить, что на других планетах с газовыми атмосферами ситуация может быть иной. Действительно, величина τ при фиксированном химическом составе атмосферы пропорциональна количеству частиц в столбе воздуха, то есть отношению атмосферного давления и ускорения свободного падения p/g . Величина $(n-1)$ пропорциональна концентрации молекул у поверхности, то есть отношению давления и температуры p/T . Таким образом, отношение $(n-1)/\tau$, очень малое на Земле, пропорционально g/T и может оказаться значительным в атмосферах холодных планет с большой силой тяжести. Все сказанное не относится к поверхностной яркости протяженных источников, на которую рефракция не влияет.

3. Система оценивания. Решение задачи предусматривает корректный учет двух факторов, которые могут влиять на фотометрические характеристики светил на разных зенитных расстояниях. При тех допущениях, что сделаны в условии задачи, действие этих факторов независимо, и в итоге они дают два отдельных слагаемых в итоговом ответе. Система оценивания состоит из трех частей: независимого анализа влияния каждого фактора и анализа общего ответа.

Часть 1 – анализ влияния поглощения (2 балла). При оценивании работы жюри должно выделить в обеих итоговых формулах слагаемые, содержащие вертикальную оптическую толщину атмосферы τ . Если структура ответа не позволяет сделать это напрямую, то в ответ участника подставляется $n=1$ и анализируется зависимость данного частного ответа от τ . Оценка за данную часть выставляется следующим образом:

0 баллов:

- а) Ответов нет;
- б) Итоговые формулы не имеют вида $m = m_0 + f_1(z)$, $\mu = \mu_0 + f_2(z)$.
- в) Формулы имеют указанный вид, но функции $f_{1,2}(z)$ в двух случаях разные, и ни одна из них не является в точности верной;
- г) Функции одинаковые, но в них неверен как численный коэффициент, так и характер зависимости от z .

1 балл:

- а) Функции $f_{1,2}(z)$ разные, и одна из них является в точности верной. Численный коэффициент может быть записан как в общем, так и в численном (1.09 или 1.086) виде.
- б) Функции $f_{1,2}(z)$ одинаковые, зависимость от z в точности верная, коэффициент ошибочен.
- в) Функции $f_{1,2}(z)$ одинаковые, численный коэффициент верный, зависимость от z неверна, в частности, может иметь вид $(1/\cos z)$ без вычета единицы.

2 балла:

Обе функции одинаковы и в точности верны.

Часть 2 – анализ влияния рефракции (6 баллов). При оценивании работы жюри должно выделить в обеих итоговых формулах слагаемые, содержащие показатель преломления приземной атмосферы n . Если структура ответа не позволяет сделать это напрямую, то в ответ участника подставляется $\tau = 0$ и анализируется зависимость данного частного ответа от

n. При проверке нужно иметь ввиду, что правильный ответ может быть получен сразу несколькими способами, и каждый из них в отдельности достаточен:

- 1) Указание, что светило поднимается над горизонтом, его лучи образуют меньший угол с горизонтальной поверхностью, но при этом поток энергии через эту поверхность не меняется;
- 2) Анализ изменения плотности потока излучения в результате его преломления;
- 3) Использование (без доказательства) того факта, что при отсутствии поглощения поверхностная яркость объекта не зависит от его положения на небе, и тем самым изменение полной яркости определяется только изменением его видимой площади.

Проверка выполнения этого этапа производится по следующей процедуре: правильность зависимости $m(z)$ при $\tau=0$ оценивается от 0 до 3 баллов. Далее эта оценка удваивается, если участник указывает на постоянство величины $\mu(z)$ при $\tau=0$. Если же оценка за зависимость $m(z)$ была нулевой, за указание независимости μ от z добавляется 1 балл. Таким образом, если в ответе участника обе величины $m(z)$ и $\mu(z)$ оказываются постоянными при $\tau=0$ – за весь этап выставляется 1 балл.

Оценивание зависимости $m(z)$ при $\tau=0$:

0 баллов:

- а) Ответа нет;
- б) Ответ есть, но он не соответствует критериям, при котором выставляется хотя бы 1 балл.
- в) Участник предполагает (или это следует из его выводов), что интегральная звездная величина m (в ситуации отсутствия поглощения) не зависит от зенитного расстояния за счет рефракции.

1 балл:

- а) Зависимость имеет вид $m = m_0 + C \cdot (n-1) \cdot q(z)$, где $q(z) \sim z^2$ при малых z , причем $C \neq 0$. При $C = 2.5/\ln 10 = 1.09$ или $q(z) = \tan^2 z$ оценка возрастает до 2 баллов, см. далее.
- б) Зависимость имеет вид $m = m_0 + C \cdot (n-1) \cdot q(z)$, где $q(z) \sim z$ при малых z , а коэффициент C верный ($2.5/\ln 10 = 1.09$).
- в) Зависимость совпадает с верной, но вместо $(n-1)$ указана величина n .

2 балла:

- а) Характер зависимости от z верный, коэффициент положительный, но ошибочный.
- б) Вместо $\tan^2 z$ указана другая функция, растущая как z^2 при малых z (z^2 , $\sin^2 z$, $z \cdot \tan z$ и т.д.), коэффициент при этом верный.
- с) Участник не принимает во внимание тот факт, что в зените угловые размеры объекта также меняются, и вместо $\tan^2 z$ он получает фактор $(1 - (n-1)/\cos^2 z)$, который не обращается в ноль в зените. Вносимая этим ошибка имеет порядок величины $(n-1)$ и считается значимой.

3 балла:

Зависимость в точности верна.

Часть 3 – составление общего ответа (2 балла).

0 баллов: итоговый ответ участника отсутствует, либо его нельзя представить в виде

$$m(z) = m_0 + C_1 (n-1) q(z) + C_2 \tau f(z) + x,$$

где величина x имеет порядок малости $(n-1)\tau$, $(n-1)^2$, τ^2 или менее. То же относится к зависимости $\mu(z)$.

1 балл: оба ответа можно представить в данном виде путем некоторых преобразований с учетом допущений, сделанных в условии задания. К этому же случаю относятся верные коэффициенты C и зависимости q и f с ненулевым фактором x .

2 балла: ответы участником представлены в виде:

$$m(z) = m_0 + C_1 (n - 1) q(z) + C_2 \tau f(z),$$

аналогично для $\mu(z)$. Коэффициенты могут быть любыми (в том числе нулевыми), их правильность оценивалась на предыдущих этапах.



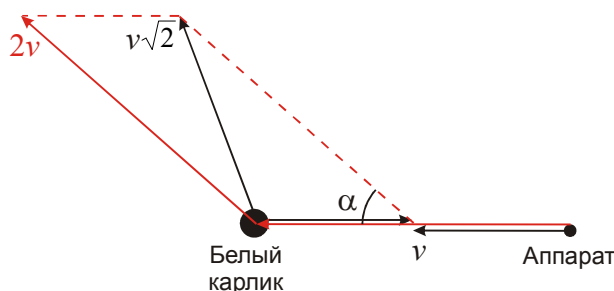
11.5. ЧУДЕСНОЕ СПАСЕНИЕ (Д.Е. Козлов)

5. Условие. Белый карлик массы m обращается по круговой орбите радиуса R вокруг сверхмассивной черной дыры массы M . Космический аппарат в результате неудачных действий экипажа также оказался на круговой орбите вокруг этой черной дыры. Он движется в той же плоскости и почти по той же траектории, что и белый карлик, но в противоположном направлении, и не имеет запасов топлива. При какой максимальной разнице радиусов орбит аппарата и белого карлика ΔR после их первой встречи аппарат улетит от сверхмассивной черной дыры?

При решении считать, что $m \ll M$, $\Delta R \ll R$, сама величина R значительно больше гравитационного радиуса черной дыры, размерами белого карлика и релятивистскими эффектами пренебречь.

5. Решение. Перед сближением белый карлик и аппарат движутся навстречу друг другу с практически одинаковыми скоростями:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

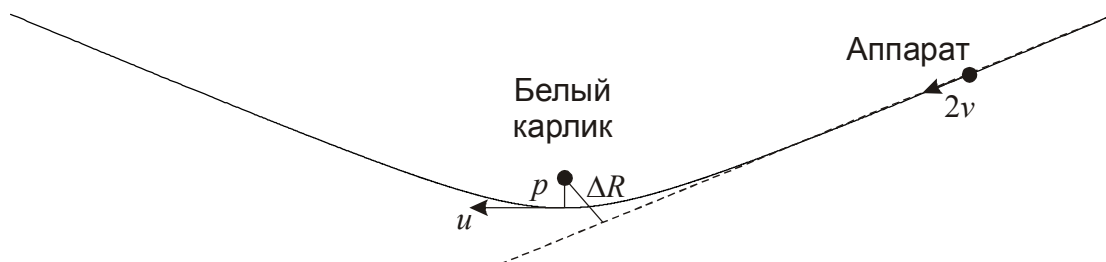


В системе отсчета, двигающейся в этот момент с белым карликом, скорость аппарата составляет $2v$. Такой же по модулю она будет после сближения, но ее направление изменится на угол α . Чтобы аппарат покинул окрестности сверхмассивной черной дыры, его скорость в системе отсчета, связанной с черной дырой, должна быть равна второй космической, $v\sqrt{2}$. Угол поворота скорости аппарата в системе отсчета белого карлика можно определить из теоремы косинусов:

$$2v^2 = v^2 + 4v^2 - 4v^2 \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{3}{4}.$$

Траектория аппарата относительно белого карлика представляет собой гиперболу с эксцентриситетом

$$e = \frac{1}{\sin(\alpha/2)} = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \alpha}} = 2\sqrt{2}.$$



Обозначим минимальное расстояние между аппаратом и белым карликом как p , а его скорость относительно белого карлика как u . Учитывая, что на удалении от белого карлика скорость аппарата была равна $2v$, из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{(2v)^2}{2} + \frac{Gm}{p} = \frac{u^2}{2}.$$

С другой стороны, из свойств гиперболического движения

$$u^2 = \frac{Gm}{p}(1+e).$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем

$$2v^2 + \frac{Gm}{p} = \frac{Gm}{2p}(1+e).$$

Отсюда мы получаем выражение для минимального расстояния между аппаратом и белым карликом:

$$p = \frac{Gm}{v^2} \cdot \frac{e-1}{4} = R \frac{m}{M} \cdot \frac{e-1}{4}.$$

Для скорости аппарата относительно белого карлика имеем:

$$u^2 = \frac{Gm}{p}(1+e) = \frac{4GM}{R} \cdot \frac{e+1}{e-1}; \quad u = 2v \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}.$$

Расстояние между линией – продолжением скорости аппарата на бесконечности и белым карликом есть искомая разность радиусов орбит ΔR . По закону сохранения момента импульса:

$$2v \cdot \Delta R = u \cdot p; \quad \Delta R = \frac{u \cdot p}{2v} = p \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = \frac{R}{4} \cdot \frac{m}{M} \sqrt{e^2 - 1} = \frac{R\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{m}{M}.$$

Корабль фактически выполняет пассивный гравитационный маневр, используя белый карлик для выхода из поля тяготения сверхмассивной черной дыры.

5. Система оценивания. Оценка за задание образуется из двух составляющих – качество решения и качество ответа, по 5 баллов за каждую часть. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, описанные в части 1, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – качество решения (5 баллов).

Этап 1 – 1 балл. Связь условия вылета аппарата из системы (вторая космическая скорость в системе отсчета черной дыры) с углом поворота аппарата в системе отсчета белого карлика.

Этап 2 – 1 балл. Связь угла поворота с эксцентриситетом гиперболической орбиты, выражение для эксцентриситета.

Этап 3 – 1 балл. Выражение для перицентрического расстояния аппарата.

Этап 4 – 1 балл. Связь перицентрического расстояния со скоростью на удалении и массой белого карлика.

Этап 5 – 1 балл. Выражение для «прицельного параметра» гиперболы через закон сохранения момента импульса.

Часть 2 – Качество ответа (5 баллов).

0 баллов – ответ отсутствует, либо размерность выражения ответа не соответствует искомой величине (расстояние), вне зависимости от вызвавшей это ошибки. То же относится к случаю, если в выражении ответа производится сложение или вычитание величин разных размерностей.

1 балл – ответ записан и соответствует требуемой размерности. Однако его отношение к правильному ответу является безразмерной комбинацией размерных параметров, заданных в условии (вероятнее всего – отношению масс m/M ненулевой степени). То же относится к любому варианту, если ответ содержит величину, не заданную в условии задания.

2 балла – ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины и присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую или меньшую сторону более чем в 2 раза.

3 балла – ответ записан, соответствует требуемой размерности, все размерные величины присутствуют в нем в правильной степени. Численный коэффициент отличается от верного в большую и меньшую сторону не более чем в 2 раза.

Примечание: коэффициент $7^{1/2}/4$, содержащийся в ответе, численно близок к $2/3$. Если участник записывает коэффициент в виде десятичной дроби (0.66), необходимо проверить, как этот коэффициент получен. Ответ с коэффициентом $2/3$, вне зависимости от формы его записи, правильным не является.

4 балла – ответ записан, соответствует требуемой размерности. Он может быть сведен к правильному при корректном учете всех упрощений, сделанных в условии задачи. В ответе могут присутствовать лишние факторы и слагаемые, которые исчезают при правильных преобразованиях и использовании допущений. К этому же случаю относится запись ответа с не заданными в условии величинами (например, перицентрическая скорость u), которые описываются в отдельных формулах (неоптимальная запись ответа).

5 баллов – ответ полностью соответствует верному, либо получается из него путем элементарных однозначных преобразований (без учета допущений).



11.6. МНОЖЕСТВО МИРОВ (О.С. Угольников)

6. Условие. Предположим, мы оказались внутри крупной системы из большого числа звезд главной последовательности. Вокруг каждой звезды по круговой орбите с радиусом l движется по одной планете с радиусом r , все планеты одинаковы. Большая сеть одинаковых наземных телескопов на разных широтах Земли провела длительную серию измерений всех доступных им звезд, проникающая способность телескопа (болометрическая звездная величина) равна m . Приборы позволяют фиксировать относительное изменение яркости звезды $\Delta J/J$, не меньшее фиксированной величины $\eta \ll 1$. Планеты существенно меньше звезд по размерам и массе, оси орбит планет ориентированы в пространстве хаотично.

Звезды в пределах возможности наблюдения телескопов расположены однородно, объемная концентрация звезд с массами от M до $M+dM$ соответствует функции Солпитера $dn = n_0(M/M_0)^{-\alpha} dM/M_0$. Для этих звезд выполняется соотношение «масса – светимость» $(L/L_0) = (M/M_0)^4$ и «масса – радиус» $(R/R_0) = (M/M_0)$. Индекс «0» в этих случаях соответствует Солнцу. Минимальная масса звезды равна M_M . Все характеристики Солнца (R_0 , M_0 , абсолютная болометрическая звездная величина m_0) заданы. Межзвездным и атмосферным поглощением света, потемнением звезд к краю пренебречь. Звезды не экранируют друг друга. Определите полное число открытых планет.

6. Решение. В условии задания сказано, что наблюдения были длительными, поэтому мы можем считать, что они больше орбитального периода планет, и мы обязательно зафиксируем транзит, если он произойдет.

Определим для начала максимальное расстояние до звезды солнечного типа, чтобы эта звезда попала в обзор, выразив его в парсеках:

$$\lg D_0 = 1 + \frac{m - m_0}{5}; \quad D_0 = 10^{1+0.2(m-m_0)}.$$

Для простоты дальнейших формул мы будем использовать эту величину, как заданную. Возьмем теперь звезду с массой M . Максимально возможное расстояние до этой звезды, чтобы она попала в обзор, равно

$$D = D_0 \sqrt{\frac{L}{L_0}} = D_0 \left(\frac{M}{M_0} \right)^2.$$

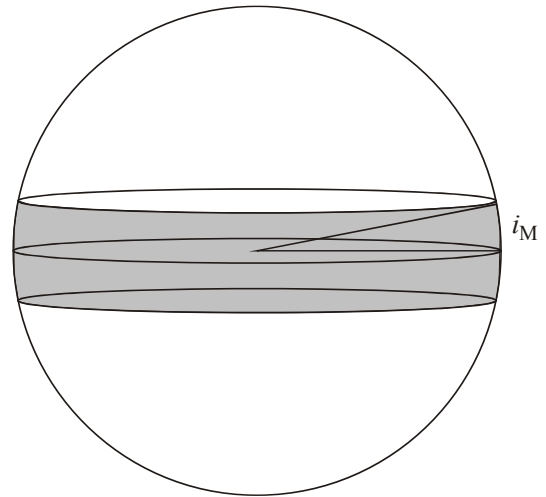
Общее количество звезд с массой от M до $M+dM$, попавших в обзор, есть их концентрация, умноженная на объем шара с радиусом D :

$$dN_T = n_0 \left(\frac{M}{M_0} \right)^{-\alpha} \cdot \frac{4\pi}{3} D^3 \cdot \left(\frac{M}{M_0} \right)^6 \cdot \frac{dM}{M_0} = \frac{4\pi n_0 D_0^3 dM}{3 M_0} \left(\frac{M}{M_0} \right)^{6-\alpha}.$$

По условию задачи, у каждой из этих звезд есть планета на расстоянии r . Но не каждую из них мы можем заметить. Пусть угол между плоскостью орбиты и лучом зрения – i . Тогда, с учетом малости размеров планеты, мы можем записать условие наступления транзита:

$$l |\sin i| \leq R; \quad |\sin i| \leq R/l.$$

Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в положении звезды и осью, направленной к наблюдателю. Ось вращения может быть направлена в любую точку этой сферы, и если она окажется рядом с экватором в этой системе, то может наблюдаться транзит. Вероятность этого события будет равна отношению площади сегмента вокруг экватора этой сферы с толщиной $2i_M$ к площади всей сферы:



$$P = \frac{4\pi \sin i_M}{4\pi} = \sin i_M = \frac{R}{l} = \frac{R_0}{l} \cdot \frac{M}{M_0}.$$

Теперь мы можем определить количество звезд в интервале масс от M до $M+dM$, у которых удастся обнаружить планеты:

$$dN = dN_T P = \frac{4\pi n_0 D_0^3 R_0 dM}{3l \cdot M_0} \left(\frac{M}{M_0} \right)^{7-\alpha}.$$

Нам остается проинтегрировать этот ответ по всем возможным значениям масс. Минимальная масса нам известна, она равна M_M . Максимальная масса M_H будет соответствовать такому радиусу звезды R_H , при котором планета вызовет транзит на пределе возможностей обнаружения приборами:

$$\eta = \frac{r^2}{R_H^2}; \quad M_H = M_0 \frac{R_H}{R_0} = M_0 \frac{r}{R_0 \sqrt{\eta}}.$$

При реальных значениях α (от 2 до 3) величина $(7-\alpha)$ положительна, и мы можем записать итоговый ответ:

$$N = \frac{4\pi n_0 D_0^3 R_0}{3l \cdot M_0^{8-\alpha}} \int_{M_M}^{M_H} M^{7-\alpha} dM = \frac{4\pi n_0 D_0^3 R_0}{3(8-\alpha)l} \left[\frac{r^{8-\alpha}}{R_0^{8-\alpha} \eta^{4-\alpha/2}} - \frac{M_M^{8-\alpha}}{M_0^{8-\alpha}} \right].$$

Если учесть, что в настоящее время точность фотометрических измерений η достаточно высока, и планеты обнаруживаются у звезд с массой, существенно большей M_M , то с учетом высокого показателя степени $(8-\alpha)$ второе слагаемое несравнимо меньше первого, и мы можем записать упрощенный вид ответа:

$$N = \frac{4\pi n_0 D_0^3 r^{8-\alpha}}{3(8-\alpha)l R_0^{7-\alpha} \eta^{4-\alpha/2}}, \quad D_0 = 10^{1+0.2(m-m_0)} \text{ пк}.$$

Обратим внимание, что в таком приближении из ответа выпадает масса Солнца M_0 .

6. Система оценивания. Оценка за решение образуется из двух составляющих – качество решения и качество ответа (6 и 4 балла соответственно). Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 10 баллов.

Часть 1 – качество решения (6 баллов).

Этап 1 – 1 балл. Вывод соотношения для максимального расстояния до звезды солнечного типа.

Этап 2 – 1 балл. Вывод соотношения для максимального расстояния до звезды произвольной массы (либо радиуса).

Этап 3 – 1 балл. Вывод соотношения для вероятности обнаружения экзопланеты у звезды произвольной массы (либо радиуса).

Этап 4 – 1 балл. Вывод соотношения для числа открытых экзопланет у звезд произвольной массы (либо радиуса).

Этап 5 – 1 балл. Вывод выражения для максимальной массы (либо радиуса) звезды, у которой может наблюдаться транзит.

Этап 6 – 1 балл. Интегрирование полученных соотношений по всем возможным массам (либо радиусам) звезд.

Часть 2 – качество ответа (4 балла).

0 баллов: ответ не записан либо не является безразмерным. При проверке размерности нужно иметь в виду, что величина D_0 может быть записана в виде выражения формулы Погсона, и вместо нее может стоять некоторое число, выраженное в парсеках, то есть являющееся размерным.

1 балл: ответ записан, является безразмерным, его отношение к правильному является безразмерной комбинацией размерных величин, заданных в условии (например r/R_0 в ненулевой степени). То же относится к варианту, содержащему массу Солнца M_0 в большем из двух слагаемых (соответствующих верхней границе массы звезд, у которых будут найдены планеты).

2 балла: ответ записан, является безразмерным и отличается от правильного в большую или меньшую сторону более чем 4 раза, не связанной с заданными в условии размерными величинами. Запись или пропуск второго слагаемого в ответе не влияет на оценку.

3 балла: ответ записан, является безразмерным и отличается от правильного в большую или меньшую сторону в 4 раза или менее, не связанной с заданными в условии размерными величинами. Запись или пропуск второго слагаемого в ответе не влияет на оценку.

4 балла: правильный ответ. Второе слагаемое в нем, связанное с минимальной массой звезды, может быть записано либо опущено, что не влияет на оценку. Участник может также отдельно оговорить случай, при котором максимальная масса M_H оказывается меньше M_M , и тогда число открытых планет равно нулю.

Примечание: участник может вместо величины α подставить ее реальное значение (около 2.35) и тем самым получить единый численный коэффициент $(4/(3(8-\alpha)))=0.236$, что на оценку не влияет.

Возможная ошибка участника: рассмотрение случая $\alpha \geq 8$, что явно не соответствует функции Солпитера распределения звезд по массам. Это не влияет на оценку, если подобное рассмотрение производится наряду с правильным вариантом $\alpha < 8$, и записаны оба ответа. Если же правильный вариант не рассматривается, качество ответа оценивается не выше 2 баллов.