

XXXI Всероссийская олимпиада по астрономии
Заключительный этап — 2024 г.
Практический тур
Решения и критерии

9.7. БЛЕСК ЛИНЫ

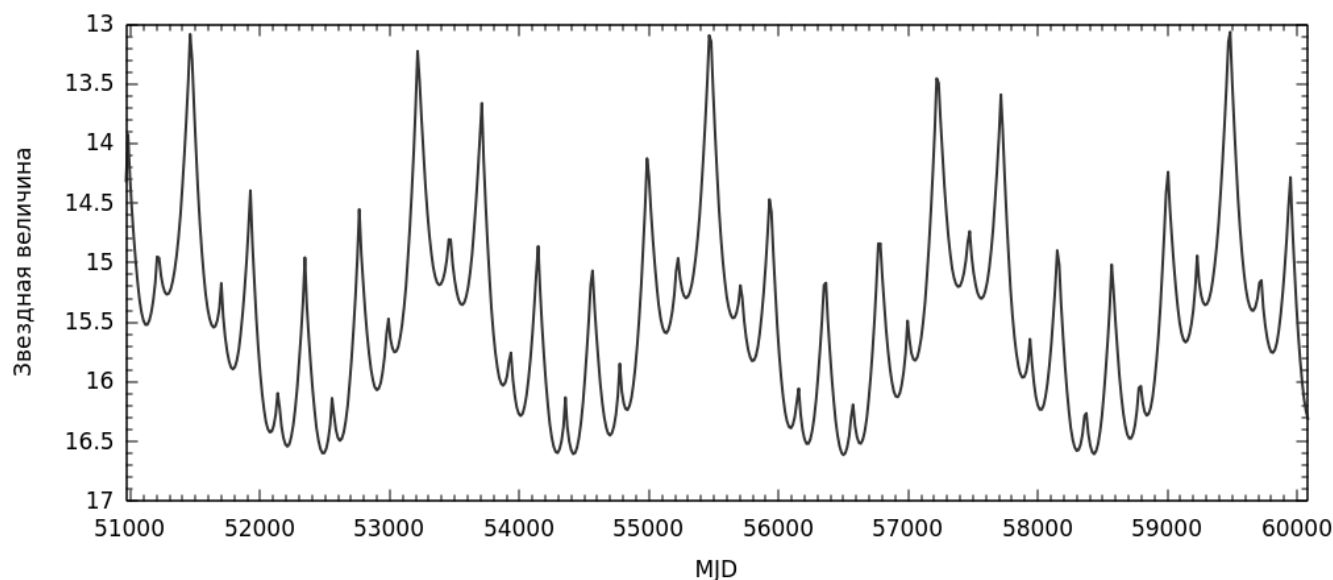
(М. В. Силантьев, Е. Н. Фадеев)



Условие. На графике показано изменение блеска астероида главного пояса на протяжении 25 лет. Наблюдения проводились с интервалом 15 дней. По горизонтальной оси откладывается модифицированная юлианская дата (юлианская дата, уменьшенная на 2400000.5).

1. Объясните причину возникновения больших и маленьких узких пиков.
2. Определите период обращения астероида вокруг Солнца, большую полуось и эксцентриситет его орбиты.

Орбиту Земли считайте круговой. Орбита астероида лежит в плоскости эклиптики. На графике отметьте все измеренные размеры. Используйте максимально точные методы.



Решение. Изменение блеска астероида может быть вызвано двумя эффектами. Во-первых, изменяются расстояние между Землей и астероидом, а также между астероидом и Солнцем. Во-вторых, изменяется угол Солнце-астероид-Земля. Видимая освещенная площадь дисков астероидов, находящихся за орбитой Марса, почти не меняется из-за фазового эффекта. Большее значение имеет тот факт, что при малых фазовых углах, то есть в соединении и противостоянии, поверхность астероидов отражает больше света.

Таким образом, большие пики возникают главным образом потому, что астероид в эти моменты находится ближе к наблюдателю. В моменты, когда наблюдаются малые пики, астероид, наоборот, находится за Солнцем, но благодаря фазовому эффекту отражает несколько больше света в сторону наблюдателя, чем до или после соединения.

Долгопериодические модуляции возникают из-за изменения расстояния астероида от Солнца. Их период равен периоду обращения астероида. Таким образом, можно попытаться измерить этот период напрямую, но сделать это точно довольно затруднительно. Поэтому выберем другой метод.

По определению, синодический период — это время, прошедшее между последовательными одноименными конфигурациями планеты. Однако, из-за эллиптичности орбиты астероида время, прошедшее между соседними максимумами, не одинаковое. Для измерения синодического периода с максимальной точностью необходимо измерить время между максимально удаленными друг от друга максимумами. Главными или вторичными — не имеет значения, важно, чтобы одинаковыми. Получаем, что 19 синодических периодов завершаются за 8500 дней. Тогда синодический период Лины равен $P \approx 447$ суток ≈ 1.22 года.

Сидерический период астероида получим из уравнения синодического движения:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}.$$

Здесь T и T_0 — сидерические периоды астероида и Земли соответственно. Тогда

$$T = \frac{PT_0}{P - T_0} = \frac{1.22 \cdot 1}{1.22 - 1} = \frac{1.22}{0.22} \approx 5.5 \text{ года}.$$

С помощью третьего закона Кеплера вычислим большую полуось орбиты:

$$a = a_0 \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2} = \sqrt[3]{5.5^2} \approx 3.1 \text{ а. е.}$$

Мы видим, что блеск астероида меняется от противостояния к противостоянию. Это происходит из-за того, что в различных противостояниях астероид располагается на разных расстояниях от Земли и Солнца. Выберем противостояние и соединение, в которых Лина обладает максимальным блеском. Будем считать, что в эти моменты она располагается вблизи перигелия своей орбиты. Разность звездных величин составляет 1.7^m . При этом, в обеих конфигурациях диск астероида освещен одинаково, он находится на одинаковом расстоянии от Солнца и изменение освещенности происходит только из-за изменения расстояния до Земли. Тогда из формулы Погсона получим

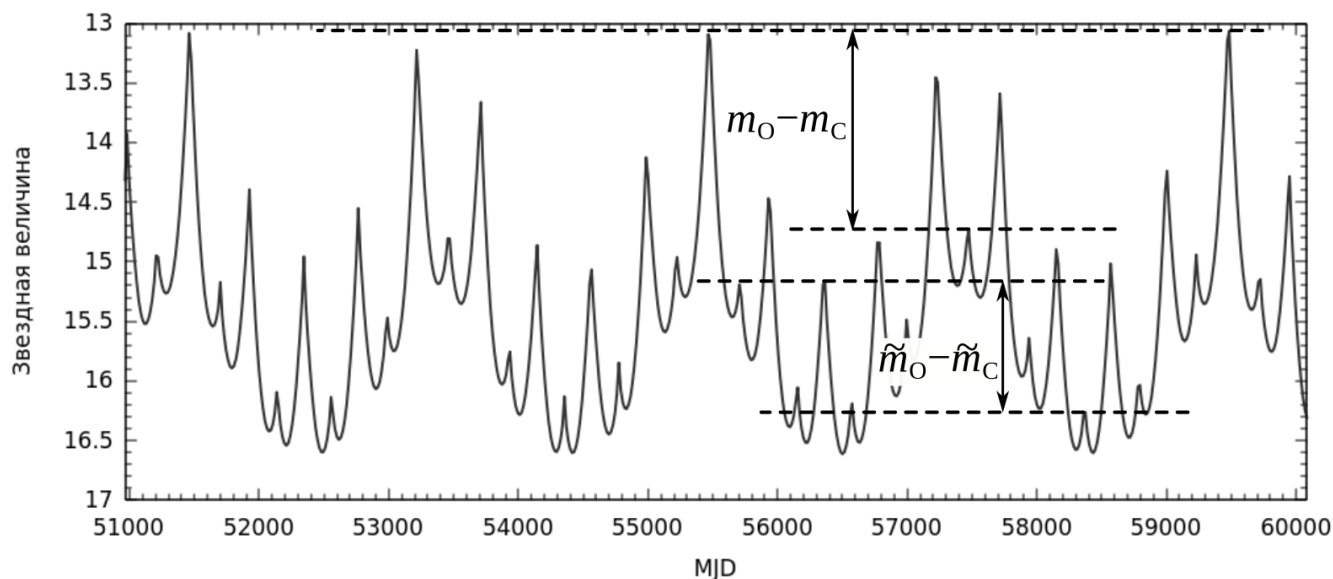
$$\frac{p+1}{p-1} = 10^{-0.2(m_o - m_c)} = A \approx 2.2.$$

Здесь p — перигелийное расстояние астероида в астрономических единицах, m_o и m_c — блеск астероида в противостоянии и соединении. Получаем

$$p = \frac{A+1}{A-1} \approx 2.7 \text{ а. е.}$$

Таким же образом получим, что разность звездных величин в максимально тусклых соединении и противостоянии составляет 1.1^m . Тогда получаем расстояние афелия:

$$\frac{q+1}{q-1} = 10^{-0.2(\tilde{m}_o - \tilde{m}_c)} = B \approx 1.66, \quad \Rightarrow \quad q = \frac{B+1}{B-1} \approx 4.0 \text{ а. е.}$$



Отсюда получаем значение эксцентриситета орбиты

$$e = \frac{q - p}{q + p} = 0.20,$$

а также большую полуось орбиты

$$a = \frac{p + q}{2} = 3.4 \text{ а. е.}$$

Как видим, значение близкое, но отличное от полученного ранее. Дело в том, что при оценке минимального и максимального возможного блеска астероида мы каждый раз несколько недооценивали эти величины. Поэтому для определения большой полуоси больше подходит первый метод.

Обратим внимание, что если уже измерена величина большой полуоси, то, казалось бы, для определения эксцентриситета достаточно определить только одно дополнительное расстояние: перигелия или афелия.

$$e = 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{2.7}{3.1} \approx 0.13, \quad e = \frac{q}{a} - 1 = \frac{4.0}{3.1} - 1 \approx 0.29.$$

Как видим, ответ здесь выходит менее точным и более случайным. Получается это из-за того, что значения p и q определяются из фотометрии с меньшей точностью, чем a из анализа периодов, и, главное, содержат значительную систематическую погрешность.

Для справки. В качестве исходных данных использовались эфемериды астероида (468) Лина. Его параметры орбиты: $a = 3.13 \text{ а. е.}$, $e = 0.196$, $i = 0.43^\circ$.

Система оценивания

- | | |
|---|-----------------|
| 1. Причина возникновения пиков | 1 балл |
| 2. Определение орбитального периода астероида | 5 баллов |

Вариант 1

- | | |
|---|---------|
| 1. Определение синодического периода в пределах [435–465] суток | 3 балла |
|---|---------|

Если ответ менее точен, то при попадании в диапазон $[410-490]$ — 2 балла, в диапазон $[380-520]$ — 1 балл. В остальных случаях — 0 баллов и следующий пункт оценивается из 1 балла.

2. Вычисление орбитального периода 2 балла

Правильное уравнение — 1 балл, вычисление — 1 балл.

Вариант 2

1. Напрямую из графика путем анализа долгопериодических модуляций 3 балла

Вариант 3

Вычисление из определенного значения большой полуоси (п. 2.2) 3 балла

3. Определение большой полуоси орбиты 3 баллов

Вариант 1

При вычисленном орбитальном периоде 2 балла за правильную формулу 3-го закона Кеплера, и 1 балл за верное вычисление. При подстановке неправильного значения периода последний балл не выставляется.

Вариант 2

При вычислении из известных p и q оценивается из 2 баллов.

4. Определение эксцентриситета орбиты 6 баллов

1. Определение расстояния перигелия $[2.5-2.8]$ а. е. и афелия $[3.7-4.4]$ а. е.
орбиты 4 балла

Работа с графиком оценивается 1 баллом, формула — 1 балл, значения — по 1 баллу. Если расстояние перигелия и афелия не попадают в ворота выше, но оказываются в диапазонах $[2.4: 3.0]$ и $[3.4: 4.5]$, то оценка снижается на 1 балл за каждую ошибку.

2. Вычисление эксцентриситета 2 балла

Если для вычисления эксцентриситета используется a , полученное из орбитального периода, то оценивается из 1 балла.

Максимальная оценка за задачу **15 баллов**.

9.8. В МИРЕ ШЕКСПИРА

(Е. Н. Фадеев)



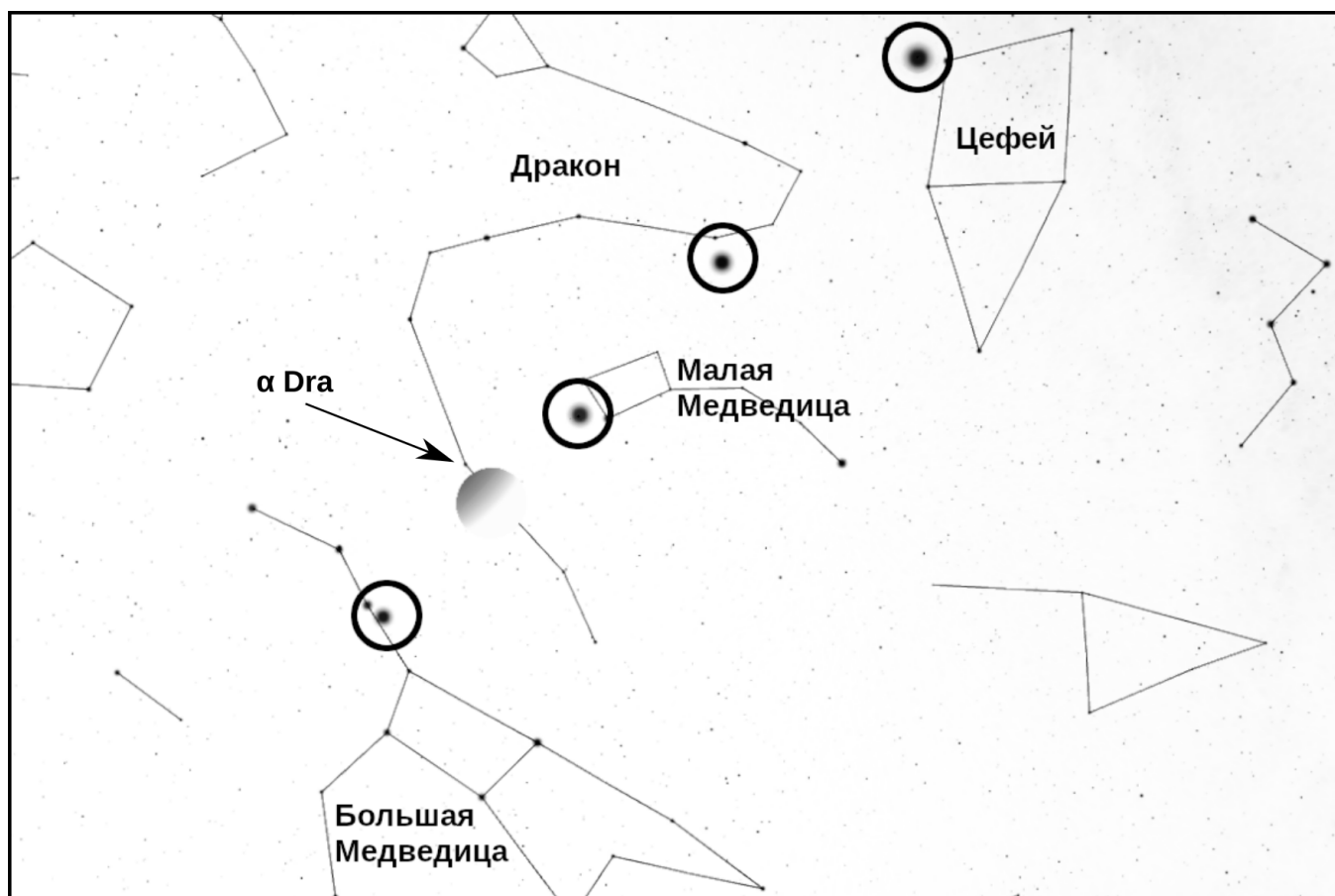
Условие. На рисунке показан участок неба, как он виден в некоторый момент времени со спутника Урана Оберон. С его помощью ответьте на следующие вопросы.

1. Отметьте на карте положение четырех крупных спутников Урана. Подпишите созвездия, в которых они находятся.
2. Звезда альфа какого созвездия видна ближе всего к Урану?
3. В каких созвездиях располагаются полюса мира для гипотетического наблюдателя на Уране?
4. Какая фаза Урана будет наблюдаться с Оберона спустя трое суток?
5. Чему равны угловые размеры кадра по длине и высоте?



Решение. Ниже Урана можно найти легко узнаваемый астеризм Большой Ковш — часть созвездия Большой Медведицы. В нем лишняя яркая звезда — спутник Миранда. Чуть выше и правее Урана также лишняя звезда — спутник Ариэль. С помощью Большого Ковша можно найти Полярную звезду, а вместе с ней и Малый Ковш — созвездие Малой Медведицы. Ариэль находится в этом созвездии. Уран находится в Драконе. Альфа Дракона видна рядом с освещенной частью диска Урана. Продолжаем движение направо вверх и находим еще два спутника: Умбриэль в Драконе и Титанию в Цефее.

Экватор Урана наклонен к плоскости эклиптики на 98° (см. справочные данные). Значит, полюса мира надо искать в 8° от эклиптики, то есть почти наверняка они попадают в созвездия, через которые проходит эклиптика.



Орбиты крупных спутников Урана, как и крупных спутников Юпитера и Сатурна, лежат почти точно в экваториальных плоскостях своих планет. Оберон, с которого ведутся наблюдения, не исключение. Поэтому выстроившиеся в ряд спутники показывают направление экватора Урана. Если продлить эту линию дальше влево вниз, то она пересечет эклиптику в созвездии Льва. Отсчитываем три зодиакальных созвездия в обе стороны от Льва и получаем созвездия Скорпиона и Тельца. Эклиптика пересекает созвездие Скорпиона в узком месте, поэтому с тем же успехом полюс мира может оказаться в созвездии Змееносца.

В действительности, полюса мира Урана находятся в Змееносце (южный полюс, выше эклиптики) и в Орионе на самой границе с Тельцом.

Мы уже выяснили, что терминатор проходит приблизительно по экватору Урана. Оберон движется в плоскости экватора, а значит, за четверть оборота спутника фаза Урана не изменится.

Из справочных данных можно узнать, что диаметр Урана равен 51 100 км, а радиус орбиты Оберона — 583 500 км. Тогда угловой диаметр Урана равен 5° . Используя его как линейку, получим угловые размеры кадра: $100^\circ \times 67^\circ$.

Система оценивания

Все ответы оцениваются только при наличии правильного объяснения. Без объяснения даже правильные ответы не оцениваются.

1. Ответ на первый вопрос

4 балла

1. Правильно отмеченный спутник

по 0.5 балла

Неправильно отмеченный спутник — штраф 0.5 балла.

2. Правильно указанное созвездие при правильной отметке по 0.5 балла
Общая оценка за вопрос округляется до целого в большую сторону. Оценка не может быть меньше 0.
2. Альфа Дракона 1 балл
3. Правильно определенные положения полюсов по 2 балла
Оценка выставляется при разумном обосновании. Ответы Близнецы и Стрелец оцениваются по 1 баллу.
4. Фаза не изменится 2 балла
5. Определение угловых размеров кадра 4 балла
Участники могут использовать в качестве линейки известные расстояния между звездами. Например, расстояние между α и β Большой Медведицы составляет примерно 5.5° , между Полярной и α Большой Медведицы — 29° и т. д. В любом случае значения длины и высоты должны попадать в диапазоны $[90^\circ: 110^\circ]$ и $[60^\circ: 75^\circ]$ соответственно.
1. Вычисление углового размера Урана / правильное отождествление звезд и выбор углового расстояния между ними 2 балла
2. Определение угловых размеров каждой стороны по 1 баллу
- Второй пункт оценивается только при правильном выполнении первого.

Максимальная оценка за задачу **15 баллов**.

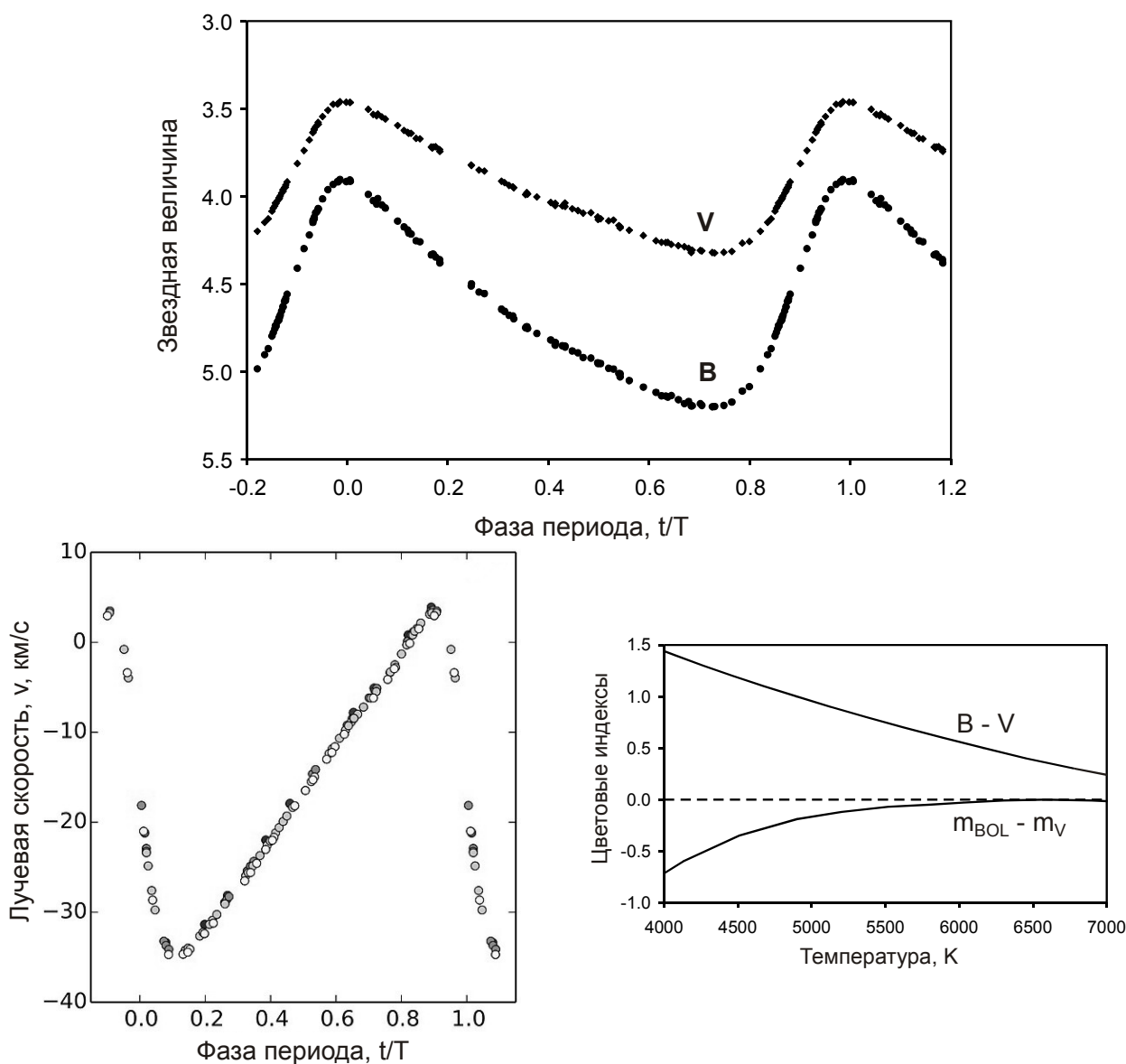
Всероссийская олимпиада школьников по астрономии
Заключительный этап – 2024 год
Второй (практический) тур

ПРАКТИЧЕСКИЙ ТУР

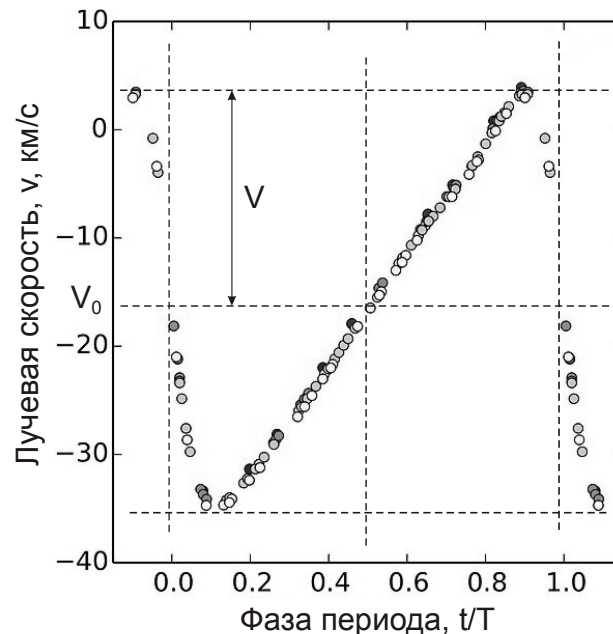


10.7. ГЛАВНАЯ ИЗ ЦЕФЕИД (О.С. Угольников)

7. Условие. Перед Вами – кривые блеска в полосах В и V и гелиоцентрической лучевой скорости звезды δ Цефея – родоначальницы класса переменных звезд – цефеид. По оси абсцисс отложена фаза – время в единицах периода изменения блеска. По этим данным определите минимальный и максимальный радиусы звезды. При решении вы можете воспользоваться диаграммой, на которой показана связь показателя цвета В–V и болометрической поправки с эффективной температурой звезды. Период составляет 5.366 суток. Потемнением звезды к краю, ее вращением и межзвездным поглощением пренебречь.



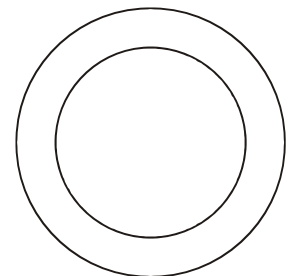
7. Решение. Обратим внимание вначале на кривую лучевой скорости. Мы видим, что максимальная лучевая скорость составляет +4 км/с, минимальная –36 км/с. Изменение лучевой скорости от максимума к минимуму и обратно происходит за разное время, однако кривая вполне симметрична относительно горизонтальной оси. Поэтому средняя лучевая скорость звезды –16 км/с характеризует движение самой звезды относительно Солнца, а вариации с амплитудой $v = 20$ км/с вызваны ее пульсациями.



Лучевая скорость сравнивается с v_0 при фазах 0.0 и 0.5. В эти моменты скорость, связанная с пульсациями, обращается в ноль, то есть звезда достигает минимального и максимального радиуса. Фаза 0.0 соответствует минимуму радиуса, так как после этого лучевая скорость, связанная с пульсациями, становится отрицательной, то есть звезда начинает расширяться, и поверхность звезды движется к нам. Обратим внимание, что фаза 0.0 соответствует максимуму блеска звезды, то есть звезда достигает максимального блеска при минимальном радиусе.

Рост лучевой скорости от фазы 0.1 до фазы 0.9 происходит практически линейным образом. Быстрое убывание скорости несколько отлочно от линейного, однако влияние нелинейности невелико вследствие кратковременности этой стадии пульсаций. В итоге, при определении максимального и минимального радиуса мы можем считать, что звезда расширяется и сжимается с постоянной средней видимой лучевой скоростью $v/2 = 10$ км/с.

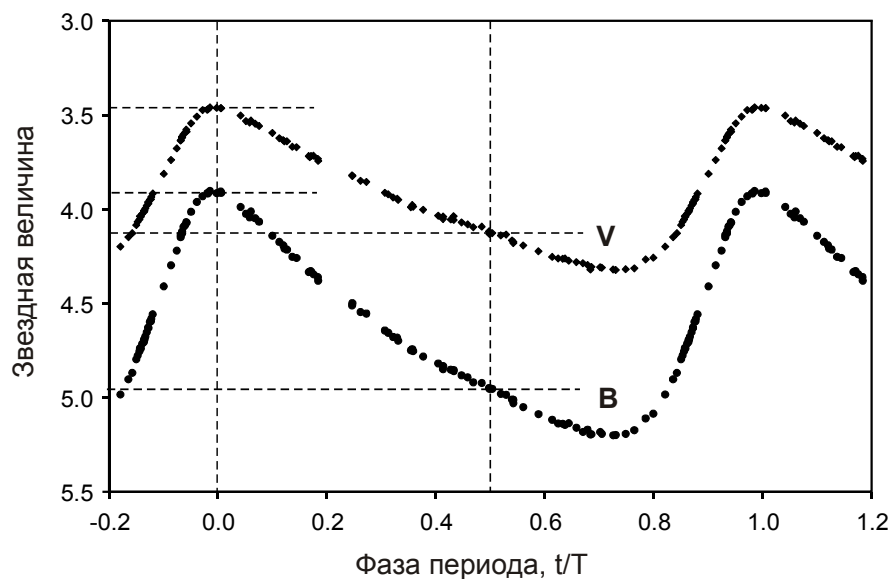
Но здесь нам нужно учесть, что лучевая скорость, измеренная спектроскопическим способом, не равна физической скорости расширения или сжатия звезды. Мы фиксируем излучение от всего видимого диска звезды. И если ее видимый центр движется к нам со скоростью расширения u , то края не имеют лучевой скорости, связанной с расширением. Мы фиксируем среднюю лучевую скорость по диску звезды, равную $k \cdot u$, где k – некоторая постоянная величина, меньшая единицы. Ее можно определить с хорошей точностью, достаточной для решения задачи.



К примеру, мы можем рассмотреть окружность на диске звезды с радиусом $1/\sqrt{2} \sim 0.7$ от видимого радиуса звезды. Эта окружность будет делить диск звезды на две части, равные по площади.

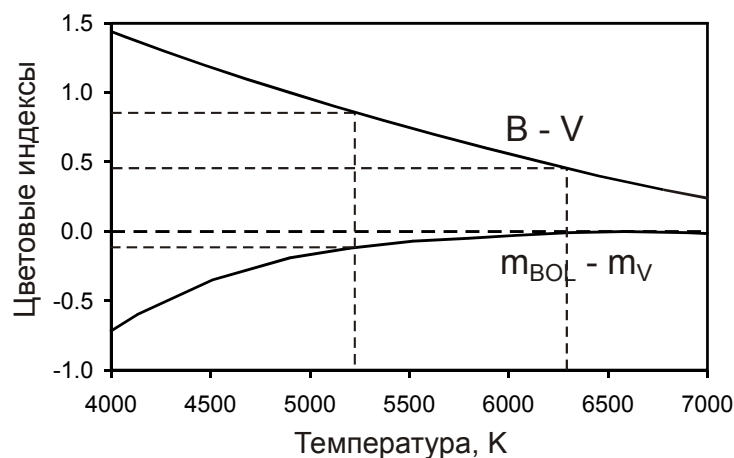
На окружность попадут элементы поверхности звезды, расположенные под углом 45° относительно линии от центра звезды к наблюдателю. Лучевая скорость этой части будет равна $u/\sqrt{2} \sim 0.7u$, и мы можем считать это приближением средней скорости. Можно считать, что раз скорость во внутренней части диска меняется от $0.7u$ до $1.0u$, то средняя скорость там составит $0.85u$. Во внешней части она составит $0.35u$. Средняя скорость по всему диску тогда будет равна $0.6u$. Все это – вполне допустимые приближения к точной средней скорости, равной $2u/3 = v/2 = 10$ км/с. Таким образом, средняя скорость расширения и сжатия звезды составляет 15 км/с.

Время расширения и сжатия составляет половину периода или 2.683 дня. Умножая его на среднюю скорость, мы получаем разницу максимального и минимального радиусов ΔR , равную 3.5 млн км.



Отметим теперь моменты достижения минимального и максимального радиуса на кривой блеска звезды и запишем ее фотометрические характеристики:

Фаза	B	V	B – V	$m_{\text{BOL}} - m_V$	m_{BOL}	T, K
0.0	3.90	3.45	0.45	0.00	3.45	6300
0.5	4.95	4.10	0.85	-0.10	4.00	5220



Зная температуру и болометрическую звездную величину в оба момента, мы можем записать соотношение радиусов звезды:

$$\frac{R_{0.5}}{R_{0.0}} = \left(\frac{L_{0.5}}{L_{0.0}} \cdot \frac{T_{0.0}^4}{T_{0.5}^4} \right)^{1/2} = \left(10^{-0.4(m_{0.5}-m_{0.0})} \cdot \frac{T_{0.0}^4}{T_{0.5}^4} \right)^{1/2} \approx 1.13 \approx \frac{8}{7}.$$

Зная, что в фазе 0.5 радиус на $\Delta R = 3.5$ млн км больше, чем в фазе 0.0, получаем:

$$\begin{aligned} R_{0.0} &= 7\Delta R = 24.5 \text{ млн км,} \\ R_{0.5} &= 8\Delta R = 28.0 \text{ млн км.} \end{aligned}$$

Это соответствует 35 и 40 радиусам Солнца, что весьма близко к истине. Учет межзвездного поглощения увеличит температуру звезды в данные два момента, но мало скажется на радиусах.

Существует еще один способ (хотя и менее логичный с научной точки зрения) получить ответ, если вспомнить, что δ Цефея – классическая цефеида, и к ней применима зависимость «период – светимость». Она позволяет определить абсолютную звездную величину в максимуме (фаза равна 0.0) в полосе V:

$$M_V = -1.43 - 2.81 \lg P = -3.5.$$

По абсолютной величине в полосе V эта звезда на 8.2^m ярче Солнца. Болометрическая поправка у цефеиды в максимуме пренебрежительно мала, из чего мы получаем, что звезда в максимуме в 1900 раз ярче Солнца. Найдя по показателю цвета ее температуру (как сделано выше), 6300 K (1.09 температуры Солнца) получаем значение радиуса в максимуме светимости: 37 радиусов Солнца. Сравнив радиусы в максимуме и в фазе 0.5 по формуле, записанной выше, получаем радиус в фазе 0.5: 42 радиуса Солнца. Ответы достаточно близки, но данный метод, как уже сказано выше, менее логичен, так как в реальности зависимость «период-светимость» для цефеид была получена на основе измерений радиусов и светимостей этих звезд, а не наоборот.

7. Источники данных.

1. Engle, S.G., 2014. The Secret Lives of Cepheids. A Multi-Wavelength Study of the Atmospheres and Real-Time Evolution of Classical Cepheids // PhD Thesis, Villanova University, USA.
2. Anderson, R.I., Sahlmann, J., Holl, B., Eyer, L., Palaversa, L., Mowlavi, N., Suveges, M., Roelens, M., 2015. Revealing δ Cephei's Secret Companion and Intriguing Past // Astrophysical Journal, V.804, P.144.

7. Система оценивания. Задание может быть решено двумя разными способами – определением разницы радиусов по данным о лучевой скорости и на основе зависимости «период – светимость». Некоторые элементы решений этими способами являются общими, поэтому система оценивания по обоим способам рассматривается вместе.

1 этап – 3 балла (оба способа). Указание фаз, при которых радиус будет достигать минимума и максимума. Фазы должны быть равны 0.0 для минимума и 0.5 для максимума радиуса (не наоборот!) с точностью до 0.05. За указание каждой правильной фазы выставляется по 1 баллу, третий дополнительный балл ставится, если верны оба значения фазы.

Если участник отмечает иные фазы максимума и минимума, то оценивание зависит от того, как эта ошибка влияет на ход дальнейшего решения. Жюри должно проверить, появляются ли долговременные тренды радиуса звезды в результате неверного определения фазы (при

которых радиус звезды в каждом периоде увеличивается на большую величину, чем убывает, и тем самым звезда становится больше на каждом цикле либо наоборот). При наличии такого тренда данный этап не засчитывается, остальные оцениваются не более чем по 1 баллу. Если тренд отсутствует – данный этап не засчитывается, остальные оцениваются не более чем на 2 балла.

Пример 1: участник забывает о собственной лучевой скорости звезды и считает моментами максимума и минимума радиуса фазы, при которых лучевая скорость обращается в ноль. Очевидно, такое предположение приводит к быстрому росту звезды до неограниченных размеров.

Пример 2: за моменты максимума и минимума радиусов принимаются моменты максимума и минимума лучевой скорости. Предположение очевидно ошибочное и вследствие разного времени возрастания и убывания лучевой скорости оно также дает тренд радиуса.

Этап 2 – 4 балла (первый способ). Определение разницы между максимальным и минимальным радиусом, точность $\pm 15\%$.

Возможная ошибка: участник предполагает, что средняя скорость расширения просто равна амплитуде лучевой скорости (20 км/с). Оценка за этап составляет 1 балл при условии правильного учета времени расширения и сжатия (половина периода переменной звезды).

Возможная неточность: участник предполагает, что средняя скорость расширения равна половине амплитуды лучевой скорости (10 км/с), то есть пренебрегая тем, что не вся поверхность звезды расширяется в сторону наблюдателя. Оценка составляет 2 балла при условии правильного учета времени расширения и сжатия (половина периода переменной звезды).

При приближенном учете неравномерности лучевой скорости по диску звезды этап оценивается полностью, если средняя лучевая скорость оказывается в интервале от 0.6 до 0.75 от скорости расширения (точный ответ – $2/3$ от скорости расширения), и тем самым средняя скорость расширения попадает в интервал от 13 до 17 км/с. Оценка составляет 3 балла для скорости расширения от 11 до 19 км/с.

Этап 2 – 4 балла (второй способ). Определение светимости звезды в максимуме на основе зависимости «период – светимость», точность 10%. Если участник находит эту светимость как среднюю или как минимальную за период – этап не оценивается, остальные оцениваются в полной мере.

Этап 3 – 4 балла (оба способа). Определение показателей цвета (1 балл за каждый) и температуры звезды (1 балл за каждую) в момент максимума и минимума радиуса. Точность определения показателей цвета – 0.1^m , точность определения температуры – 300 К.

Этап 4 – 2 балла (оба способа). Определение отношения радиусов звезды. Если данная оценка записывается как отношение максимального радиуса к минимальному, оно должно попадать в интервал от 1.08 до 1.20, если ответ выражен по иному – необходимо определить отношение, эквивалентное ответу участника.

Возможная ошибка: участник не учитывает болометрическую поправку, которая заметна на фазе максимального радиуса. Данный этап не засчитывается, остальные оцениваются в полной мере.

Этап 5 – 2 балла (оба способа). Определение максимального и минимального радиусов звезды. При решении вторым способом минимальный радиус определяется из светимости, найденной на этапе 2. Ответ может сильно измениться, если на предыдущем этапе получено значение отношения радиусов, заметно отличное от 1.13. Это не может быть основанием для снижения оценки на данном этапе. Точность составляет 20% без учета допущенных ранее погрешностей, если только это не приводит к отсутствию ответа как такового (максимальный радиус оказывается меньше минимального).

Возможная ошибка при решении: светимость и температура для максимального радиуса определяются не для фазы 0.5, а для минимума блеска звезды в фазе 0.75. Если данная ошибка делается после первого этапа решения (то есть, при анализе лучевой скорости используется фаза 0.5), то этапы 3 и 4 оцениваются наполовину. При данной ошибке на первом этапе решения оно фактически лишается смысла, так как звезда в этом случае необратимо меняет свои размеры. Оценивание в данном случае описано на первом этапе.

Максимальная оценка за все решение – 15 баллов.



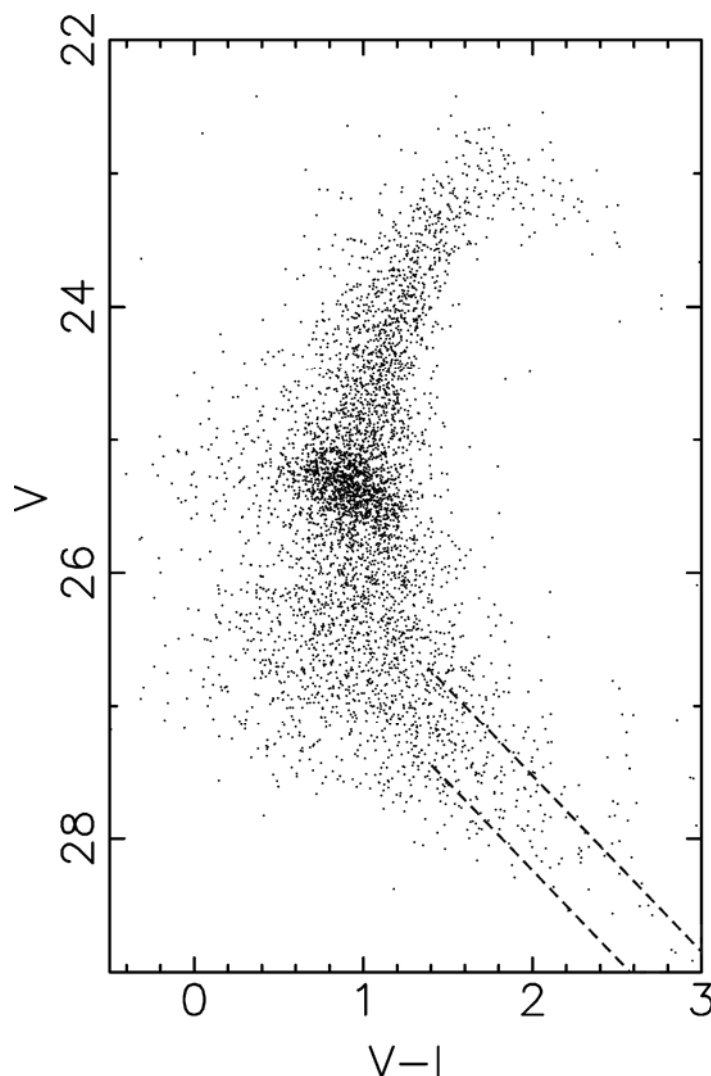
10.8. ЗВЕЗДНОЕ СКОПЛЕНИЕ

(В.Б. Игнатъев / О.С. Угольников)

8. Условие. На графике показана диаграмма «цвет – звездная величина» для звездного скопления Mayall II. Приведен показатель цвета $V - I$, причем инструментальная полоса I такова, что подобный показатель цвета у Солнца равен $+3.0$. Известно, что видимая звездная величина скопления в полосе V равна $+13.5$, его угловой диаметр $36''$, а дисперсия скоростей (среднеквадратичная полная скорость звезды относительно центра скопления) 25 км/с. Исходя из этого, определите:

- 1) Светимость скопления в расчете на одну солнечную массу;
- 2) Время, прошедшее с последней эпохи звездообразования в скоплении;
- 3) Примерные экваториальные координаты скопления в небе Земли.

Межзвездным поглощением света и болометрической поправкой скопления пренебречь.



8. Решение. Начнем с определения расстояния до скопления. Это можно сделать двумя способами. Во-первых, нам дан показатель цвета Солнца ($+3.0$), из которого мы можем найти его видимую величину, находясь оно в этом скоплении: $m_s = +29.2$. Мы это можем сделать благодаря нанесенному пунктирными линиями положению главной последовательности. В итоге, мы получаем величину модуля расстояния по Солнцу $(m - M) = 24.4$.

Нужно понимать, что в реальности это не лучший метод определения расстояния, так как звезды солнечного типа слабые и по сути не попали в анализ, приведенный на графике (хотя здесь такой вариант считается допустимым благодаря добавленным на рисунок пунктирным линиям). Другой способ состоит в анализе горизонтальной ветви диаграммы «цвет – звездная величина», которая на графике заметно выделяется и соответствует средней звездной величине $m_H = +25.3$. Считая отношение светимостей звезд горизонтальной ветви и Солнца $\lg(J_H/J_S) = 1.6$, мы получаем абсолютную звездную величину звезд горизонтальной ветви $M_H = +0.8$ и практически тот же модуль расстояния $(m - M) = 24.5$. В реальности, для подобного расчета необходим также учет химического состава звезд. Для решения настоящей задачи достаточно любого одного из двух методов. Зная видимую звездную величину скопления m_C , найдем его абсолютную звездную величину в полосе V:

$$M_C = m_C - (m - M) = -10.9.$$

Светимость скопления по сравнению с Солнцем есть

$$\frac{J_C}{J_S} = 10^{-0.4(M_C - M_S)} = 1.9 \cdot 10^6.$$

Очевидно, мы имеем дело с очень большим, очевидно, шаровым звездным скоплением. Взяв модуль расстояния по Солнцу, получаем величину расстояния до скопления:

$$\lg D = 1 + \frac{m - M}{5} = 5.88; \quad D = 750 \text{ кпк.}$$

Определим пространственный радиус скопления, зная его видимый диаметр (36''):

$$R = \frac{D \cdot (36/2)}{206265} = 65 \text{ пк.}$$

Коль скоро скопление шаровое и гравитационно-связанное, мы можем оценить массу скопления, зная среднеквадратичную скорость звезд v :

$$M_C = \frac{v^2 R}{G} = 1.9 \cdot 10^{37} \text{ кг} = 9.5 \cdot 10^6 M_S.$$

Теперь мы можем найти светимость скопления на одну массу Солнца:

$$\left(\frac{J_C}{M_C} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{J_S}{M_S} \right).$$

Определим теперь время с момента последней эпохи звездообразования. Это можно сделать по точке поворота на диаграмме «цвет – звездная величина», она соответствует звездной величине $m_R = 26.2$. Стадию главной последовательности завершают звезды, на 3^m или в 16 раз более яркие, чем Солнце. Учтем, что светимость звезд главной последовательности пропорциональна массе в степени 4, а время жизни на главной последовательности – массе в степени (-3) или светимости в степени $(-3/4)$. Тогда у нас получается, что возраст сходящих с главной последовательности звезд есть 10 миллиардов лет (время жизни Солнца на главной последовательности), умноженное на $16^{-3/4} = 1/8$, то есть 1.2 миллиарда лет. С главной последовательности сходят звезды с массами около 2 масс Солнца.

Нам остается ответить на последний вопрос задания. Казалось бы, в условии не сказано ничего, что напрямую указывало бы на координаты скопления на небе. Но посмотрим на его физические характеристики. Это очень большое скопление, в нашей Галактике такие не найдены. Тем не менее, в нем до недавнего времени происходило звездообразование. Это говорит о том, что мы имеем дело не с классическим шаровым скоплением, а ядром галактики, которая потеряла свою периферию, попав в поле гораздо более крупной звездной системы. Что это за галактика, нам указывает расстояние до скопления – 750 кпк. Речь идет о галактике Андромеды – M31, приблизительные координаты которой $\alpha=1^h$, $\delta=+40^\circ$.

8. Источники данных.

1. Meylan, J., Sarajedini, A., Jablonka, P., Djorgovski, S.G., Bridges, T., Rich, R.M., 2001. Mayall II $\equiv$ G1 in M31: Giant Globular Cluster or Core of Dwarf Elliptical Galaxy? // *Astronomical Journal*, V.122, P.830.

8. Система оценивания.

1 этап – 3 балла. Определение расстояния до скопления. Точность определения модуля расстояния ($m-M$) – 0.2^m при использовании Солнца и 0.5^m при использовании горизонтальной ветви. Соответствующая точность самого расстояния есть 20% и 50% соответственно. Если участник использует сразу оба способа – оценка определяется наилучшей из оценок, при условии, что именно ее или усреднение участник использует в дальнейшем решении.

2 этап – 2 балла. Определение светимости скопления. Точность (без учета ошибок предыдущего этапа) – 10%.

3 этап – 1 балл. Определение радиуса скопления. Точность (без учета ошибок предыдущего этапа) – 10%. В случае двукратной ошибки из-за путаницы радиуса и диаметра данный этап не засчитывается, оценка за последующий, если она не равна нулю, уменьшается на 1 балл.

4 этап – 2 балла. Определение массы скопления. Точность (без учета ошибок предыдущего этапа) – 10%. Если среднеквадратичная скорость берется не как круговая, а как параболическая – оценка уменьшается на 1 балл.

5 этап – 1 балл. Итоговое определение светимости на единицу массы скопления.

6 этап – 2 балла. Определение звездной величины точки поворота диаграммы, точность 0.5^m .

7 этап – 2 балла. Определение времени с эпохи звездообразования. Точность без учета ошибок на предыдущем этапе – 20%.

8 этап – 2 балла. Определение приблизительных координат скопления, точность 1^h по прямому восхождению и 10° по склонению. Этап можно засчитать, если в качестве координат указаны координаты галактики M33 в созвездии Треугольника ($\alpha=1.5^h$, $\delta=+30^\circ$). Если координаты верно не указаны, но отмечена принадлежность скопления к одной из этих двух галактик – за этап выставляется 1 балл.

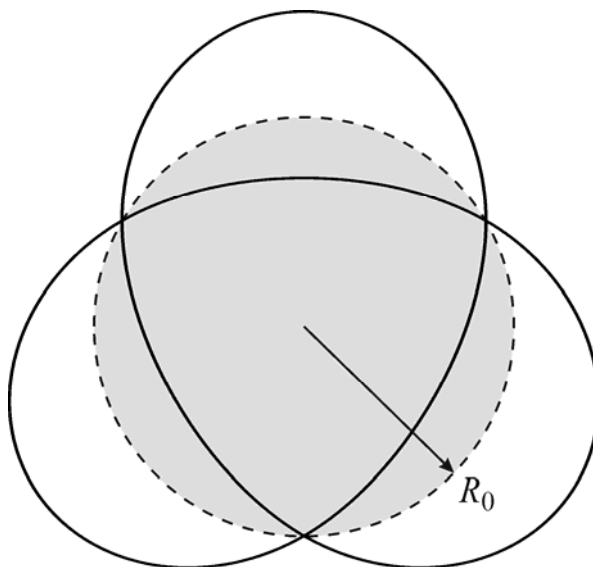
Максимальная оценка за все решение – 15 баллов.



11.7. ТЕМНЫЙ ШАР I: ГАЛАКТИЧЕСКИЙ ЦВЕТОК

(О.С. Угольников)

7. Условие. Звезда движется в галактике с массивным сферическим гало из темной материи с массой M и радиусом R_0 . Плотность гало постоянна внутри этой сферы. Известно, что часть траектории звезды, расположенная вне гало, представляет собой дугу эллипса с большой полуосью, равной радиусу гало R_0 . Вся траектория звезды замкнута и представляет собой «цветок» с нечетным числом лепестков $N > 1$. На рисунке в масштабе показана траектория звезды для случая $N=3$. Определите максимально возможное расстояние звезды от центра гало в зависимости от нечетного числа N . Каким при этом будет период прохождения всей замкнутой траектории в зависимости от N ? Действие на звезду иных тел, кроме гало, не учитывать.



7. Решение. Так как рисунок выполнен в масштабе, мы по нему сразу можем решить задачу для частного случая $N=3$. По рисунку мы видим, что максимальное расстояние между центром гало и звездой $R_3 = 3R_0/2$. Учитывая, что большая полуось участка орбиты по условию задачи равна R_0 , мы имеем значение эксцентриситета этого участка: $e_3=1/2$. Эти данные для частного случая, как и некоторые другие, мы можем использовать в качестве проверки общих соотношений для произвольного N .

Участок траектории орбиты вне гало является эллипсом, и звезда движется по нему в соответствии с законами Кеплера, так как гало действует на звезду как точечная масса, расположенная в центре. Как только звезда влетает в гало, ситуация изменяется. На расстоянии r от центра гало на звезду действует притяжение только той части гало, которая находится к центру ближе, чем звезда, равнодействующая от притяжения внешних частей равна нулю. В итоге, ускорение силы притяжения на расстоянии r есть

$$g(r) = -\frac{4\pi G}{3} \cdot \frac{\rho r^3}{r^2} = -\frac{GM}{R_0^2} \frac{r}{R_0}.$$

Здесь ρ – плотность темной материи в гало, знак « $\rightarrow$ » означает противоположное направление ускорения по отношению к радиус-вектору. В поле такой силы, линейно увеличивающейся с расстоянием от центра, тело совершает гармонические колебания вдоль каждой из осей. Таким образом, траектория звезды внутри гало будет также эллипсом, но теперь центр гало

уже окажется в центре, а не в фокусе эллипса. Пусть ось x направлена вдоль большой оси этого эллипса. Тогда движение звезды внутри гало можно описать уравнениями:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \omega t, \\y &= b \sin \omega t.\end{aligned}$$

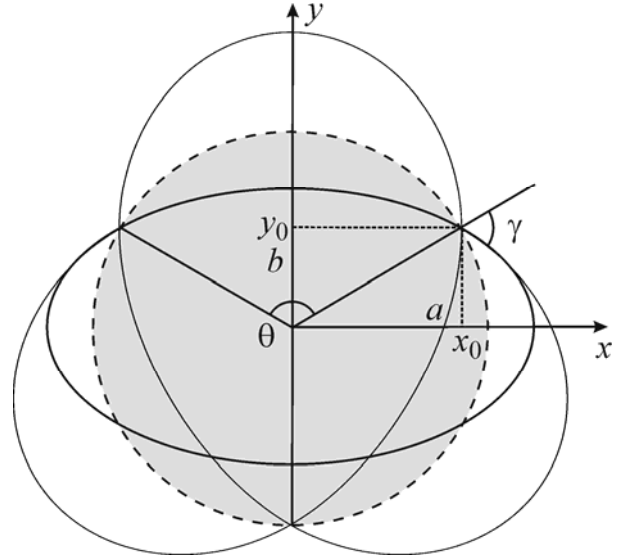
Здесь ω – угловая скорость вращения вокруг гало на расстоянии R_0 :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}}.$$

Скорости движения вдоль каждой из осей есть

$$\begin{aligned}v_x &= -a \cdot \omega \cdot \sin \omega t, \\v_y &= b \cdot \omega \cdot \cos \omega t.\end{aligned}$$

Пусть в момент входа в гало координаты звезды x и y положительны, а острый угол между траекторией и радиус-вектором равен γ . Данная точка удалена на расстояние R_0 от центра гало. По условию задачи, величина R_0 равна большой полуоси орбиты звезды вне гало. Поэтому модуль скорости равен величине круговой скорости на данном расстоянии, $v_0 = \omega \cdot R_0$.



Поле тяжести гало центральное, и для движения звезды применим закон сохранения момента импульса. Сопоставим точку входа звезды в гало с моментом ее пересечения малой оси ($\omega t = \pi/2$), когда расстояние до центра равно b , а модуль скорости – $a \cdot \omega$, причем скорость перпендикулярна радиус-вектору. Тогда

$$a \cdot b \cdot \omega = \frac{a \cdot b \cdot v_0}{R_0} = v_0 R_0 \sin \gamma; \quad a \cdot b = R_0^2 \sin \gamma.$$

Помимо этого, для звезды применим закон сохранения энергии. В данной картине нам проще принять за ноль потенциальной энергии ($E_p = 0$) центр гало. Тогда, исходя из записанного выше уравнения для гравитационного ускорения, потенциальная энергия единицы массы на расстоянии r от центра будет равна

$$\frac{E(r)}{m} = \frac{GM}{2R_0^3} \cdot r^2 = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{r^2}{R_0^2}.$$

Вновь сравнив точку входа звезды в гало и ее положение на малой оси, имеем:

$$\frac{(a \cdot \omega)^2}{2} = \frac{(a \cdot v_0)^2}{2R_0^2} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{R_0^2 - b^2}{R_0^2} = \frac{v_0^2}{2} \cdot \left(2 - \frac{b^2}{R_0^2}\right).$$

Отсюда мы получаем:

$$a^2 + b^2 = 2R_0^2.$$

Законы сохранения момента импульса и энергии дали нам два уравнения с неизвестными величинами a и b . Мы можем решить эту систему, выразив величину b через a в законе сохранения момента импульса. Тогда

$$a^2 + \frac{R_0^4 \sin^2 \gamma}{a^2} = 2R_0^2; \quad a^4 - 2R_0^2 a^2 + R_0^4 \sin^2 \gamma = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно a^2 , получаем:

$$a = R_0 \sqrt{1 \pm \cos \gamma}.$$

Большая полуось эллипса a больше, чем R_0 , и к ней относится решение со знаком «+». Решение со знаком «-» соответствует малой полуоси b . Теперь мы можем определить координаты точки входа звезды в гало. Это проще всего сделать, найдя соответствующий параметр ωt . Для этой точки расстояние до центра и скорость равны

$$R_0^2 = a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t, \\ v_0^2 = \omega^2 R_0^2 = a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t.$$

Разделив второе уравнение на ω^2 и вычитая из него первое, имеем:

$$(a^2 - b^2) \cdot (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) = 0.$$

Мы знаем, что a не равно b , а координаты входа звезды в гало мы выбрали положительными (см. рисунок). В итоге, искомая точка соответствует $\omega t = \pi/4$, и ее координаты

$$x_0 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{R_0 \sqrt{2 \cdot (1 + \cos \gamma)}}{2}; \quad y_0 = \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{R_0 \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \gamma)}}{2}.$$

В ходе пролета сквозь гало звезда повернется относительно его центра на угол

$$\theta = 2 \arctan \frac{x_0}{y_0} = 2 \arctan \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{1 - \cos \gamma}}.$$

Преобразуем данную формулу:

$$\frac{1}{\cos^2(\theta/2)} = 1 + \tan^2(\theta/2) = \frac{2}{1 - \cos \gamma} = \frac{1}{\sin^2(\gamma/2)}; \quad \theta = \pi - \gamma.$$

Мы можем также определить время прохождения звездой внутренней дуги траектории. Оно соответствует интервалу величины ωt от $\pi/4$ до $3\pi/4$, то есть четверти периода колебаний с частотой ω . Это время составит

$$T_{\text{IN}} = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_0}{v_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_0^3}{GM}}.$$

Здесь $T_0 = 2\pi/\omega$ – период обращения вокруг гало по круговой орбите с радиусом R_0 (вдоль его границе), он же – период движения по любой траектории, полностью лежащей внутри гало.

Рассмотрим теперь часть траектории звезды вне гало. Это также эллипс, но здесь центр гало оказывается в его фокусе. У этого эллипса большая полуось равна R_0 . Если бы вся масса гало была сосредоточена в центре, звезда продолжила бы движение по этому эллипсу, и по III закону Кеплера орбитальный период был бы равен T_0 . Это позволяет нам определить, какое время звезда будет находиться вне гало. По II закону Кеплера, это время есть половина

орбитального периода плюс еще одна его часть, соответствующая отношению площади закрашенного треугольника на рисунке к площади всего эллипса:

$$\frac{T_{\text{OUT}}}{T_0} = \frac{1}{2} + \frac{s}{S} = \frac{1}{2} + \frac{R_0^2 e \sqrt{1-e^2}}{\pi R_0^2 \sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{2} + \frac{e}{\pi}.$$

Точка входа в гало находится на его малой оси, расстояние от центра равно величине большой полуоси. Скорость звезды в этот момент параллельна большой оси эллипса. Если бы звезда продолжила бы движение по этому эллипсу, перед вылетом за сферу радиусом R_0 повернулась бы на угол

$$\varphi = 2\pi - 2\gamma = 2\theta.$$

В итоге, пролет внутри гало повернет эллиптическую орбиту звезды вне гало на угол

$$\beta = \varphi - \theta = \theta = \pi - \gamma.$$

Так как точка входа находится на малой оси эллипса, для угла γ справедливо равенство

$$\gamma = \arccos e,$$

где e – эксцентриситет внешней части орбиты звезды. В итоге, угол поворота орбиты есть

$$\beta = \pi - \arccos e = \arccos (-e).$$

Данный угол лежит в интервале от $\pi/2$ до π . Чтобы вся траектория звезды оказалась замкнутой и имела N «лепестков», за N пролетов внутри гало орбита должна повернуться на угол $2n\pi$, где n – целое число, не меньшее $N/4$, не превосходящее $N/2$ и взаимно простое с N :

$$N \cdot \beta = N \cdot (\pi - \arccos e) = 2n\pi.$$

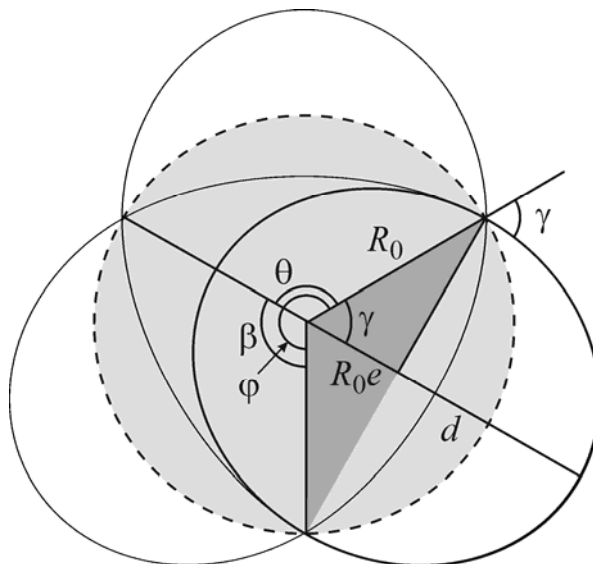
Отсюда мы получаем выражение для эксцентриситета:

$$e = \cos \frac{\pi (N - 2n)}{N}.$$

В задаче нас интересует максимально возможное расстояние от центра гало до звезды. Для фиксированной большой полуоси орбиты (R_0) оно будет достигнуто при максимальном эксцентриситете, то есть выражение под косинусом должно быть минимально возможным. В случае нечетного N это достигается при $n = (N - 1)/2$, очевидно, что целые числа N и n будут взаимно просты. Эксцентриситет и максимальное расстояние звезды от центра гало составят:

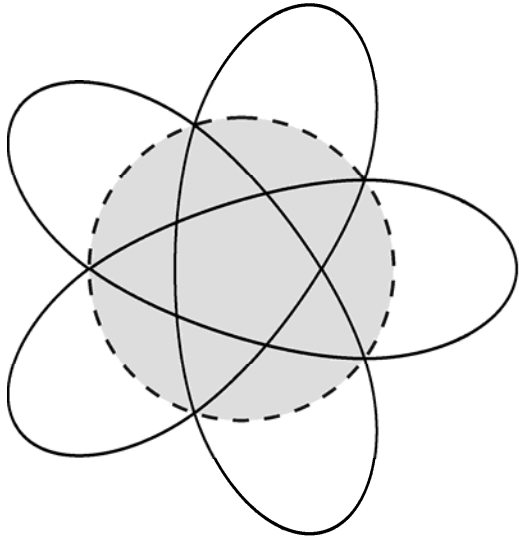
$$e = \cos \frac{\pi}{N}; \quad d = R_0(1+e) = R_0 \cdot \left(1 + \cos \frac{\pi}{N}\right) = 2R_0 \cos^2 \frac{\pi}{2N}.$$

За это время звезда N раз пройдет по дуге внутри гало и N раз выйдет за его пределы. Полный период этого движения составит

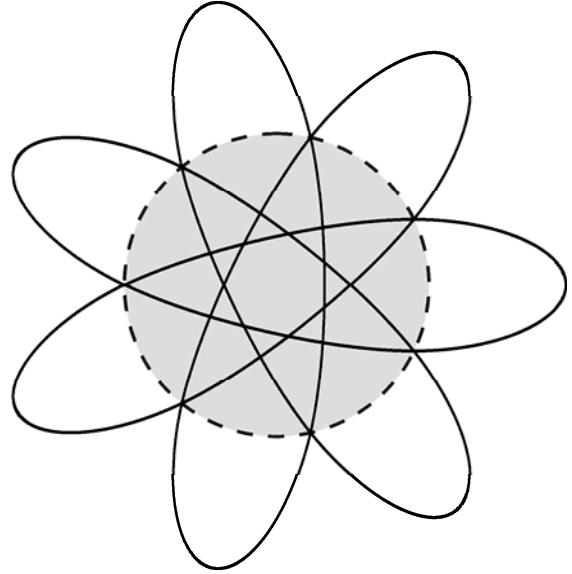


$$T_N = N \cdot (T_{\text{IN}} + T_{\text{OUT}}) = N \cdot T_0 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\cos(\pi / N)}{\pi} \right] = N \sqrt{\frac{R_0^3}{GM}} \cdot \left[\frac{3\pi}{2} + 2 \cos(\pi / N) \right].$$

В случае $N = 3$ мы имеем $e = 0.5$ и $d = 3R_0/2$, в чем мы убедились по рисунку. Угол γ для этого случая равен $\pi/3$, углы θ и β составляют $2\pi/3$. Период T_3 есть $2.727 T_0$. Далее представлены траектории звезды для случаев $N = 5$ и $N = 7$. Обратим внимание, что в случае $N = 7$ это не единственная возможная фигура с таким числом лепестков (в отличие от $N = 3$ и $N = 5$, где она может быть только одна), но именно такой вид дает максимальный эксцентриситет и максимальное удаление звезды от центра гало, что требовалось в условии задачи. При $N = 7$ и $n = 2$ звезда будет удаляться от центра на расстояние всего в $1.22 R_0$.



$N = 5, n = 2$
 $e = 0.809, d = 1.809 R_0, T_5 = 5.038 T_0$



$N = 7, n = 3$
 $e = 0.901, d = 1.901 R_0, T_7 = 7.258 T_0$

7. Система оценивания. Оценка за решение образуется из двух основных составляющих: качество решения и качество ответа. Ошибка, сделанная на каком-либо этапе решения (часть 1) не влияет на оценки за другие этапы решения, но может сказаться на оценке за часть 2, если она приводит к ошибке в ответе. Максимальная оценка за все решение составляет 15 баллов.

Часть 1 – качество решения (9 баллов). Оценка составляется, исходя из правильного анализа на соответствующем этапе решения. Ошибка, сделанная на том или ином этапе, не влияет на оценивание других этапов, но может сказаться на оценке за вторую часть (качество ответа).

Этап 1 – 1 балл. Восстановление зависимости гравитационной силы от расстояния от центра внутри гало.

Этап 2 – 2 балла. Анализ движения звезды внутри гало, составление уравнения для угла поворота звезды в процессе пролета внутри гало. В качестве аргумента может быть эксцентриситет внешней части орбиты либо угол между скоростью и радиус-вектором в момент входа звезды в гало.

Этап 3 – 2 балла. Анализ движения звезды внутри гало, определение времени пролета сквозь гало.

Этап 4 – 1 балл. Анализ движения звезды вне гало, составление уравнения для угла поворота звезды в процессе пролета по внешней дуге эллипса. В качестве аргумента логичнее всего использовать эксцентриситет, хотя возможны и другие варианты.

Этап 5 – 1 балл. Анализ движения звезды вне гало, определение времени нахождения на внешней дуге.

Этап 6 – 2 балла. Формирование условия для движения по замкнутой траектории с N лепестками, причем с максимальным эксцентриситетом (либо апоцентрическим расстоянием).

Комментарий: для количества лепестков, равного 3 или 5, существует только одна замкнутая траектория. При большем нечетном N таких траекторий несколько, и задание предполагает выбор правильного варианта. Если участник олимпиады рассматривает все варианты без выбора, оценка за данный этап не изменяется, но это сказывается на оценке за качество ответа. Если выбор делается, но не в пользу траекторий с максимальным расстоянием, оценка за этап уменьшается на 1 балл.

Часть 2.1. Качество ответа – максимальное расстояние (3 балла).

0 баллов:

- а) Ответ отсутствует либо не соответствует расстоянию по размерности;
- б) Ответ содержит какие-либо параметры, кроме R_0 и N .
- в) Ответ допускает (при определенных нечетных $N > 1$) величины d , меньшие R_0 или большие $2R_0$, что напрямую противоречит условию.

1 балл:

Для любых N величина попадает в интервал от R_0 до $2R_0$, но не является монотонно возрастающей с ростом N . К этому же случаю относится независимость величины d от N .

2 балла:

Для любых N величина попадает в интервал от R_0 до $2R_0$ и является монотонно возрастающей с ростом N , но формула не является эквивалентной правильной.

3 балла:

Полностью верная формула $d(R_0, N)$.

Часть 2.2. Качество ответа – период (3 балла).

0 баллов:

- а) Ответ отсутствует либо не соответствует времени по размерности;
- б) Ответ содержит какие-либо параметры, кроме R_0 , M и N . К этому случаю не относится вариант, если ответ содержит величину круговой скорости v_0 , и эта величина определена в явном виде через заданные в условии параметры.
- в) Ответ допускает при подстановке нечетного $N > 1$ нулевые или отрицательные периоды.
- г) Величина периода в ответе может убывать с ростом N .

1 балл:

Ответ записан, имеет размерность времени и является положительной величиной, не убывающей с N (при этом ответ не удовлетворяет критериям выставления 2 или 3 баллов).

Комментарий: данное свойство выполняется, даже если участник пропустит множитель N в выражении для времени, не сделав иных ошибок.

2 балла:

Ответ записан, имеет размерность времени, возрастает с N строго быстрее, чем N в первой степени. При этом отношение $(T/(N \cdot T_0))$ не выходит за пределы от 0.75 до 1.25 ни при каких N (в реальности оно возрастает от 0.91 при $N = 3$ до 1.07 при $N \rightarrow \infty$). При этом ответ не эквивалентен верному.

3 балла:

В точности верный ответ для любого нечетного $N > 1$.

Возможное частичное решение задания: участник не проводит общего анализа или проводит его неверно для произвольного N , но делает графический анализ случая $N = 3$, приведенного в условии. В этом случае ему поэтапно выставляются:

- а) 1 балл за правильный ответ $d = 3R_0/2$, при условии оценки 0 за часть 2.1 решения. В противном случае данный балл не выставляется.
- б) 1 балл за анализ времени нахождения на внутреннем участке траектории, если получен правильный ответ $(T_0/4)$, и при условии, что за этап 3 части 1 общего решения стоит 0 баллов;
- в) 1 балл за анализ времени нахождения на внешнем участке траектории, если получен правильный ответ, и при условии, что за этап 5 части 1 общего решения стоит 0 баллов;
- г) 1 балл за верную оценку времени прохода всей траектории, при условии оценки 0 за часть 2.2. решения.

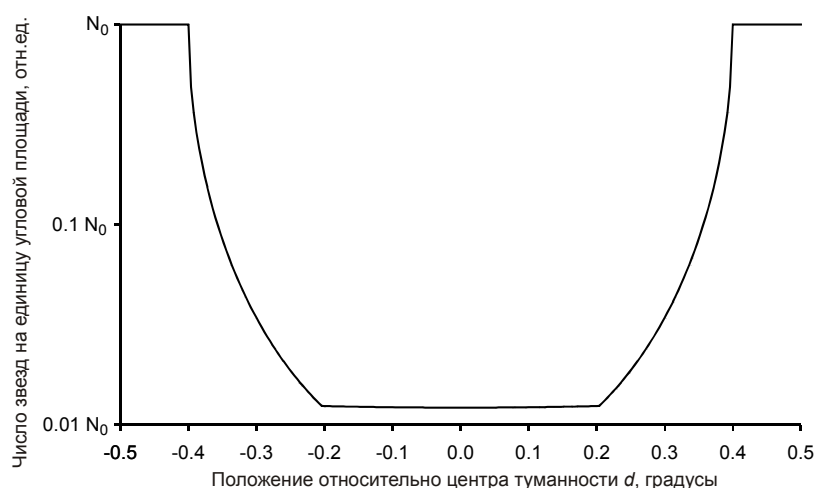
Если участник пытается наугад получить при этом соотношения для $N > 3$ без обоснований – они оцениваются, исходя из критериев оценивания качества ответов (части 2.1 и 2.2).



11.8. ТЕМНЫЙ ШАР II: ЗВЕЗДНОЕ ПОЛЕ

(О.С. Угольников)

8. Условие. Некоторая гигантская галактика шарообразной формы плотно заполнена звездами, аналогичными по своим свойствам Солнцу. Концентрация звезд на единицу объема одинакова во всей галактике. Астрономы, живущие неподалеку от центра галактики, измеряют плотность звезд на единицу угловой площади неба, их прибор работает в видимой области спектра и имеет проникающую способность 19.0^m . В ходе наблюдений они замечают шарообразное облако межзвездной пыли. На графике показана зависимость измеренной плотности звезд на единицу видимой площади вдоль некоторой линии неба, проходящей через центр пылевого облака. Определите физический диаметр облака и оптическую толщину вдоль его диаметра, считая распределение пыли внутри него однородным. Считать, что пыль одинаково поглощает свет любых длин волн. Межзвездным поглощением света вне облака и возможным взаимным экранированием звезд пренебречь.



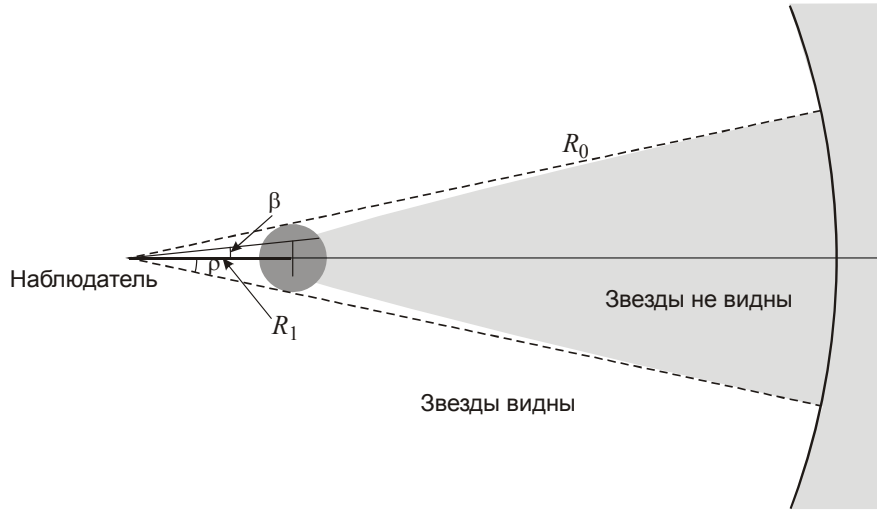
8. Решение. Наблюдения ведутся в видимой области спектра, абсолютная звездная величина Солнца для этой области равна $M = +4.8$. Это значение можно взять как известное, а можно получить, зная блеск Солнца на Земле. Мы можем определить максимальное расстояние, с которого Солнце будет иметь звездную величину $m = 19.0$, что позволит ему быть зафиксированным прибором.

$$\lg R_0 = 1 + \frac{m - M}{5} = 3.84; \quad R_0 = 6.9 \text{ кпк.}$$

Это достаточно большое расстояние, но все же меньшее радиуса крупных галактик. Поэтому мы можем считать, что все обозреваемое прибором пространство заполнено звездами.

Еще одно важное свойство, которое существенно облегчает решение – угловые размеры туманности в небе малы. Это значит, что ее пространственные размеры существенно меньше расстояния до нее, и мы можем считать, что все поглощение происходит на каком-то одном расстоянии R от наблюдателя.

Пусть в некотором направлении на расстоянии R_1 происходит поглощение с оптической толщиной τ . Тогда все звезды, расположенные позади туманности, на расстоянии r , ослабнут в $e^{-\tau}$ раз. Их звездная величина станет равной



$$m = M - 5 + 5 \lg r - 2.5 \lg e^{-\tau} = M - 5 + 5 \lg r + 2.5\tau/\ln 10.$$

Максимальное расстояние до видимой звезды R будет соответствовать ее видимому блеску 19^m :

$$19 = M - 5 + 5 \lg R + 2.5\tau/\ln 10 = M - 5 + 5 \lg R_0.$$

Отсюда мы получаем выражение для максимального расстояния, соответствующего этой оптической толщине:

$$5 \lg \frac{R}{R_0} = -\frac{2.5 \cdot \tau}{\ln 10}; \quad R = R_0 e^{-\tau/2}.$$

Это соотношение выполняется, пока расстояние R остается больше, чем R_1 . Как только поглощение достигнет величины $\tau_1 = -2 \ln(R_1/R_0)$, туманность начнет скрывать все звезды позади нее, так как их видимый блеск станет слабее 19^m . В итоге, максимальное расстояние до наблюдаемых звезд станет равным R_1 и дальше практически не будет меняться с ростом оптической толщины.

Если максимальное расстояние до наблюдаемых звезд равно R , то их число на небе в телесном угле Ω равно

$$N = \frac{n \cdot \Omega \cdot R^3}{3} = N_0 \frac{R^3}{R_0^3}.$$

Здесь n – концентрация звезд в единице объема, N_0 – наблюдаемая плотность звезд на небе вне туманности. Теперь мы можем записать выражение для плотности наблюдаемых звезд в зависимости от оптической толщины на пути луча:

$$N = N_0 e^{-3\tau/2}, \quad \tau < -2 \ln(R_1/R_0);$$

$$N = N_0 (R_1/R_0)^3 \quad \tau \geq -2 \ln(R_1/R_0).$$

На графике мы видим характерный излом на угловом расстоянии $\beta = 0.2^\circ$ от центра туманности. Ближе к центру туманности величина N практически постоянна. Учитывая, что ось ординат имеет логарифмический масштаб, мы измеряем по графику величину $\lg(N/N_0)$, которая равна -1.91 . Таким образом, наблюдаемая плотность звезд перед центром туманности есть 0.012 от этой же величины вне туманности. Расстояние до туманности есть

$$R_1 = R_0 \sqrt[3]{0.012} = 0.23 \cdot R_0 = 1.6 \text{ кпк}.$$

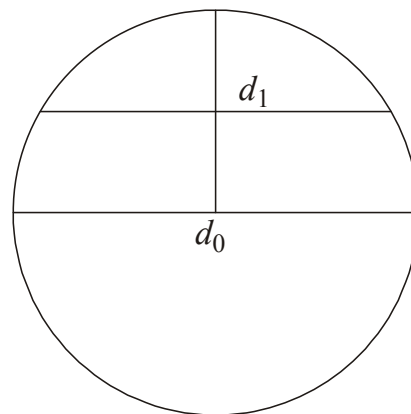
Угловой диаметр туманности 2ρ равен 0.8° или 0.014 радиан. Пространственный диаметр пылевой туманности равен 22 пк.

Нам остается найти оптическую толщину туманности по диаметру. Для этого обратимся к точке излома зависимости на графике. Она соответствует оптической толщине

$$\tau_1 = -2\ln(R_1 / R_0) = 2.95.$$

Эта оптическая толщина соответствует пути луча d_1 на расстоянии в половину радиуса от центра туманности:

$$d_1 = 2\sqrt{(d_0/2)^2 - (d_0/4)^2} = d_0\sqrt{1 - (1/4)} = d_0\sqrt{3}/2.$$



При постоянной плотности пыли оптическая толщина пропорциональна длине пути сквозь туманность. В итоге, мы получаем

$$\tau_0 = \frac{2\tau_1}{\sqrt{3}} = 3.4.$$

8. Система оценивания.

1 этап – 2 балла. Определение максимального расстояния до наблюдаемых звезд, точность 10%. При выполнении участники могут взять болометрическую абсолютную звездную величину Солнца, что увеличит все линейные масштабы, рассматриваемые в задаче, на 5%. Это на оценку не влияет.

2 этап – 3 балла. Связь оптической толщины на пути луча и предельного расстояния до наблюдаемых звезд для случая, когда туманность не скрывает все звезды за собой.

Вероятная ошибка: пропуск коэффициента 1/2 перед оптической толщиной. Данный этап не засчитывается, этапы 3 и 4 оцениваются в полной мере, этапы 5 и 6 – из максимума в 2 балла за этап.

3 этап – 2 балла. Правильный учет фактора полного исчезновения звезд позади туманности при определенной оптической толщине, независимость предельного расстояния от дальнейшего увеличения оптической толщины.

4 этап – 2 балла. Выражение для количества звезд на единицу площади в зависимости от оптической толщины. Запись через телесный угол и концентрацию звезд не является обязательной, достаточно выражения через N_0 .

Вероятная ошибка: отношение расстояний берется не в 3-й, а какой-либо иной степени (например, 2-й). Данный этап не засчитывается, оставшиеся оцениваются из максимума в 2 балла за этап.

5 этап – 3 балла. Определение диаметра туманности, точность 10%. При ошибке в 2 раза, вызванной путаницей радиуса и диаметра, оценка уменьшается на 2 балла (максимум 1 балл за этап).

6 этап – 3 балла. Определение оптической толщины туманности по диаметру, точность 0.1. Если в качестве ответа указывается величина, соответствующая хорде и излому зависимости на рисунке (ее правильное значение около 3) – оценка уменьшается на 2 балла (максимум 1 балл за этап).

Максимальная оценка за все решение – 15 баллов.