

Практический тур – 1

На выполнение этой части отводится 2.5 часа

Задача 1. Таинственные огни

В 1941 году компьютеры были совсем не так доступны и не столь совершенны, как в 2017. Конечно, и тогда нередко встречались задачи, где современная техника оказалась бы очень кстати. Одна из них — моделирование взаимодействующих галактик.

Именно тогда Эрик Холмберг, шведский астроном, создал первую подобную модель. Чтобы сократить количество вычислений, он использовал известное сходство между двумя физическими законами:

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{и} \quad J = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

В его модели каждая галактика состояла из 37 лампочек с фотоэлементами; он определял в каждый момент времени, сколько света приходит с какой стороны, а после этого рассчитывал силу, пользуясь тем, что показатели степени при r одинаковы. После этого он передвигал лампочки, применяя один из численных методов интегрирования дифференциальных уравнений.

Уже в наше время астрошкольник Ашот захотел убедиться в том, что метод работает. Конечно, галактики были сложны для него; поэтому он решил смоделировать обычное кеплерово движение космического корабля, облетающего Солнце.

Для наглядности Ашот выбрал систему единиц, в которой основными единицами расстояния и времени являются астрономическая единица и земной год соответственно. Если размерность величины не указана — значит, величина представлена в этой системе единиц, например, гелиоцентрическая (кеплерова) постоянная

$$\kappa = GM_{\odot} = 39.475.$$

Начальные координаты и компоненты скорости корабля (в плоской прямоугольной системе координат с центром в Солнце) были такими:

$$\begin{cases} x^{(0)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & y^{(0)} = -\frac{1}{2}; \\ v_x^{(0)} = 0, & v_y^{(0)} = 6.283. \end{cases}$$

В качестве Солнца Ашот использовал лампу с мощностью $P = 100$ Вт. Фотодатчик (КПД преобразования сеть – лампа – датчик $\eta = 2\%$), измеряющий освещённость в месте своего расположения,

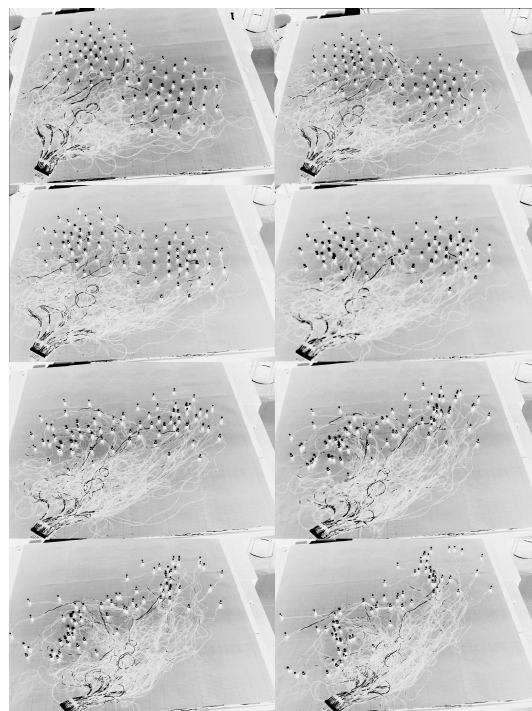


Рис. 1: Фотография аналогичного эксперимента, проведённого в 2013 году (негатив)

размещался на таком же расстоянии от лампы *в метрах*, на каком корабль находился от Солнца *в астрономических единицах*. Это позволило использовать формулу

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4\pi J}{L},$$

не пересчитывая блеск и светимость ни в какую другую систему и получать r сразу в астрономических единицах.

Таким образом, для ускорения корабля верно следующее выражение (здесь векторы обозначаются жирным шрифтом; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор корабля, $\mathbf{a}$ — его ускорение):

$$\mathbf{a} = -\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{r^3}\mathbf{r} = \frac{4\pi G\mathfrak{M}_{\odot}}{L} \cdot J \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1)$$

куда все величины можно подставлять без изменения системы единиц.

Чтобы вычислить положение и скорость корабля в последующие моменты времени, Ашот использовал так называемый метод «чехарды»:

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} + \mathbf{v}^{(i)}\Delta t + \frac{\mathbf{a}^{(i)}}{2}\Delta t^2, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}^{(i+1)} = \mathbf{v}^{(i)} + \frac{\mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{a}^{(i+1)}}{2}\Delta t, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{r}^{(0)} \equiv \mathbf{r}(0) = (x^{(0)}, y^{(0)}),$$

$$\mathbf{v}^{(0)} \equiv \mathbf{v}(0) = (v_x^{(0)}, v_y^{(0)}),$$

$$\mathbf{a}^{(i)} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{r}^{(i)}),$$

$$\Delta t = 0.03.$$

Ашот вычислил значения для первых 10 точек (см. измерения фотоэлемента в таблице справа).

i	J , Вт/м ²
0	0.150
1	0.203
2	0.231
3	0.308
4	0.429
5	0.542
6	0.547
7	0.464
8	0.391
9	0.260

1. Изобразите на графике реальную орбиту космического корабля.
2. На том же графике отметьте точки, рассчитанные Ашотом.
3. Считая, что абсолютная погрешность фотоэлемента постоянна, оцените её отношение к точному значению освещённости в начальный момент времени.
4. Отметьте на графике реальные положения корабля в те моменты времени, для которых провёл вычисления Ашот.
5. Какой модификации требует метод для задачи n тел? Почему в ситуации с галактиками он оказывается эффективен, хотя в эксперименте Ашота это явно не так?

Подсказка. Вам могут пригодиться соотношения между истинной, эксцентрической и средней аномалиями:

$$M = E - \varepsilon \sin E, \quad (4)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \frac{E}{2}. \quad (5)$$