

Практический тур – 1

На выполнение этой части отводится 2.5 часа

Задача 1. Таинственные огни (М. Пирогов)

В 1941 году компьютеры были совсем не так доступны и не столь совершенны, как в 2017. Конечно, и тогда нередко встречались задачи, где современная техника оказалась бы очень кстати. Одна из них — моделирование взаимодействующих галактик.

Именно тогда Эрик Холмберг, шведский астроном, создал первую подобную модель. Чтобы сократить количество вычислений, он использовал известное сходство между двумя физическими законами:

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{и} \quad J = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

В его модели каждая галактика состояла из 37 лампочек с фотоэлементами; он определял в каждый момент времени, сколько света приходит с какой стороны, а после этого рассчитывал силу, пользуясь тем, что показатели степени при r одинаковы. После этого он передвигал лампочки, применяя один из численных методов интегрирования дифференциальных уравнений.

Уже в наше время астрошкольник Ашот захотел убедиться в том, что метод работает. Конечно, галактики были сложны для него; поэтому он решил смоделировать обычное кеплерово движение космического корабля, облетающего Солнце.

Для наглядности Ашот выбрал систему единиц, в которой основными единицами расстояния и времени являются астрономическая единица и земной год соответственно. Если размерность величины не указана — значит, величина представлена в этой системе единиц, например, гелиоцентрическая (кеплерова) постоянная

$$\kappa = GM_{\odot} = 39.475.$$

Начальные координаты и компоненты скорости корабля (в плоской прямоугольной системе координат с центром в Солнце) были такими:

$$\begin{cases} x^{(0)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & y^{(0)} = -\frac{1}{2}; \\ v_x^{(0)} = 0, & v_y^{(0)} = 6.283. \end{cases}$$

В качестве Солнца Ашот использовал лампу с мощностью $P = 100$ Вт. Фотодатчик (КПД преобразования сеть – лампа – датчик $\eta = 2\%$), измеряющий освещённость в месте своего расположения,

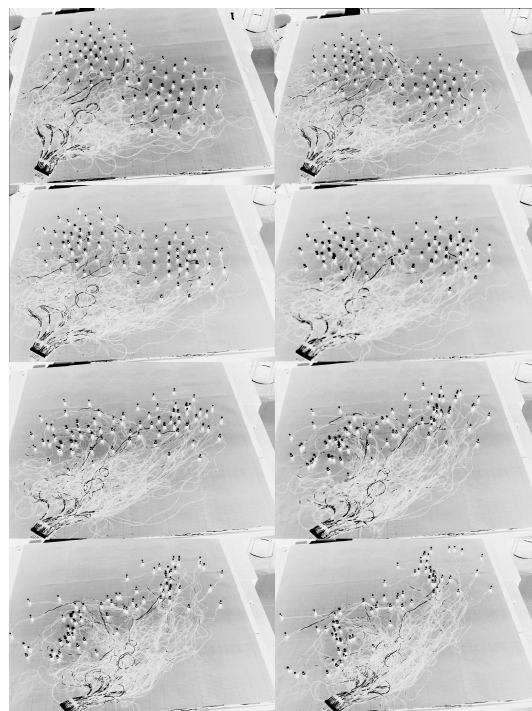


Рис. 1: Фотография аналогичного эксперимента, проведённого в 2013 году (негатив)

размещался на таком же расстоянии от лампы *в метрах*, на каком корабль находился от Солнца *в астрономических единицах*. Это позволило использовать формулу

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4\pi J}{L},$$

не пересчитывая блеск и светимость ни в какую другую систему и получать r сразу в астрономических единицах.

Таким образом, для ускорения корабля верно следующее выражение (здесь векторы обозначаются жирным шрифтом; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор корабля, $\mathbf{a}$ — его ускорение):

$$\mathbf{a} = -\frac{G\mathfrak{M}_{\odot}}{r^3}\mathbf{r} = \frac{4\pi G\mathfrak{M}_{\odot}}{L} \cdot J \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1)$$

куда все величины можно подставлять без изменения системы единиц.

Чтобы вычислить положение и скорость корабля в последующие моменты времени, Ашот использовал так называемый метод «чехарды»:

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} + \mathbf{v}^{(i)}\Delta t + \frac{\mathbf{a}^{(i)}}{2}\Delta t^2, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}^{(i+1)} = \mathbf{v}^{(i)} + \frac{\mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{a}^{(i+1)}}{2}\Delta t, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{r}^{(0)} \equiv \mathbf{r}(0) = (x^{(0)}, y^{(0)}),$$

$$\mathbf{v}^{(0)} \equiv \mathbf{v}(0) = (v_x^{(0)}, v_y^{(0)}),$$

$$\mathbf{a}^{(i)} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{r}^{(i)}),$$

$$\Delta t = 0.03.$$

Ашот вычислил значения для первых 10 точек (см. измерения фотоэлемента в таблице справа).

i	J , Вт/м ²
0	0.150
1	0.203
2	0.231
3	0.308
4	0.429
5	0.542
6	0.547
7	0.464
8	0.391
9	0.260

1. Изобразите на графике реальную орбиту космического корабля.
2. На том же графике отметьте точки, рассчитанные Ашотом.
3. Считая, что абсолютная погрешность фотоэлемента постоянна, оцените её отношение к точному значению освещённости в начальный момент времени.
4. Отметьте на графике реальные положения корабля в те моменты времени, для которых провёл вычисления Ашот.
5. Какой модификации требует метод для задачи n тел? Почему в ситуации с галактиками он оказывается эффективен, хотя в эксперименте Ашота это явно не так?

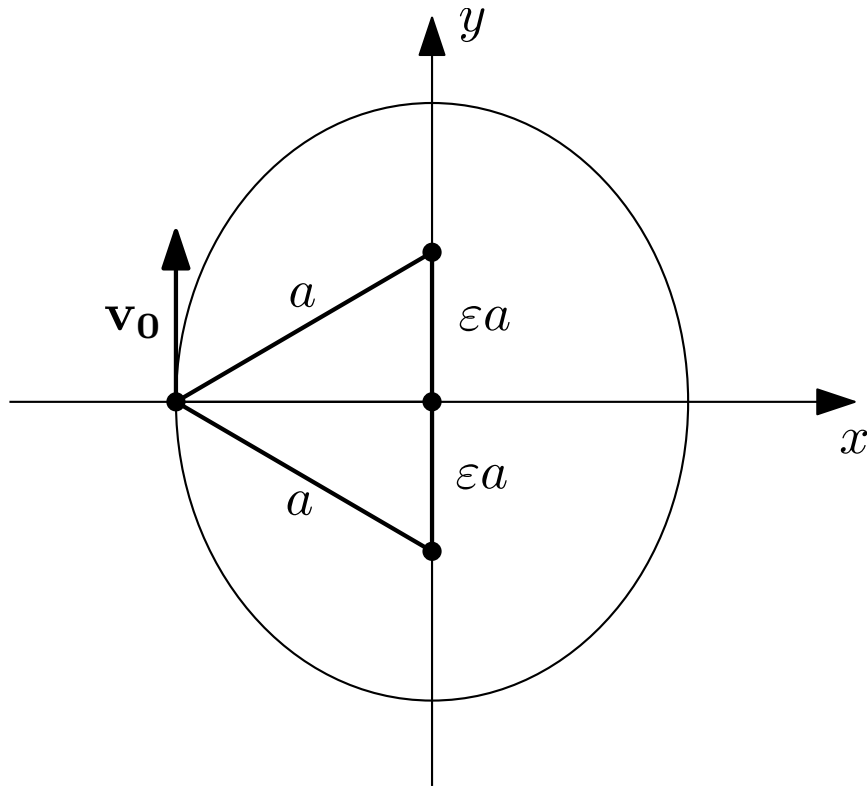
Подсказка. Вам могут пригодиться соотношения между истинной, эксцентрической и средней аномалиями:

$$M = E - \varepsilon \sin E, \quad (4)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \frac{E}{2}. \quad (5)$$

Решение:

1. Самый простой способ решить первый пункт — увидеть красивые числа в начальных координатах и предположить, что система координат выбрана разумным образом. Пусть, например, большая полуось орбиты вертикальна. Поскольку скорость тоже направлена вертикально, ясно, что выглядеть это будет так:



В этой ситуации большая полуось a выражается как

$$a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1.$$

При этом скорость будет равна

$$\sqrt{\frac{\kappa}{a}} \approx 6.283,$$

что говорит о том, что именно этот случай и реализуется.

Нам пригодится эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \frac{f}{a} = \frac{|y_0|}{a} = 0.5.$$

2. Пусть $\frac{4\pi\kappa}{L} = K$. Из формулы (25) для ускорения можно записать

$$\mathbf{a}^{(i)} = -\frac{K J^{(i)} \mathbf{r}^{(i)}}{r^{(i)}},$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} a_x^{(i)} = -\frac{K J^{(i)} x^{(i)}}{\sqrt{(x^{(i)})^2 + (y^{(i)})^2}}, \\ a_y^{(i)} = -\frac{K J^{(i)} y^{(i)}}{\sqrt{(x^{(i)})^2 + (y^{(i)})^2}}. \end{cases}$$

Найдём константу:

$$K = \frac{4\pi\kappa}{L} \approx 248.029.$$

Проведём для примера первый этап вычислений. $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ мы знаем, поэтому можем найти вектор ускорения

$$\mathbf{a}^{(0)} = \begin{pmatrix} 32.220 \\ 18.602 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим $\mathbf{r}^{(1)}$ по формуле (26):

$$\mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.852 \\ -0.303 \end{pmatrix}.$$

Зная $\mathbf{r}^{(1)}$, можно найти $\mathbf{a}^{(1)}$:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 47.434 \\ 16.886 \end{pmatrix}.$$

Остаётся найти $\mathbf{v}^{(1)}$ по формуле (27):

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.195 \\ 6.815 \end{pmatrix}.$$

Продолжая такую «деятельность», построим таблицу:

i	x	y
0	-0.866	-0.500
1	-0.852	-0.303
2	-0.794	-0.090
3	-0.686	+0.127
4	-0.510	+0.332
5	-0.254	+0.485
6	+0.059	+0.485
7	+0.358	+0.456
8	+0.593	+0.299
9	+0.750	+0.103

Отметить эти точки на графике уже не представляет труда, мы приведём его в конце решения.

3. Зная точки, в которых Ашот измерял освещённость, можно найти её точное значение в них, используя мощность лампочки. Для этого нам потребуется формула

$$J_{true}^{(i)} = \frac{L}{4\pi(r^{(i)})^2} = \frac{P\eta}{4\pi\left((x^{(i)})^2 + (y^{(i)})^2\right)},$$

где η — КПД.

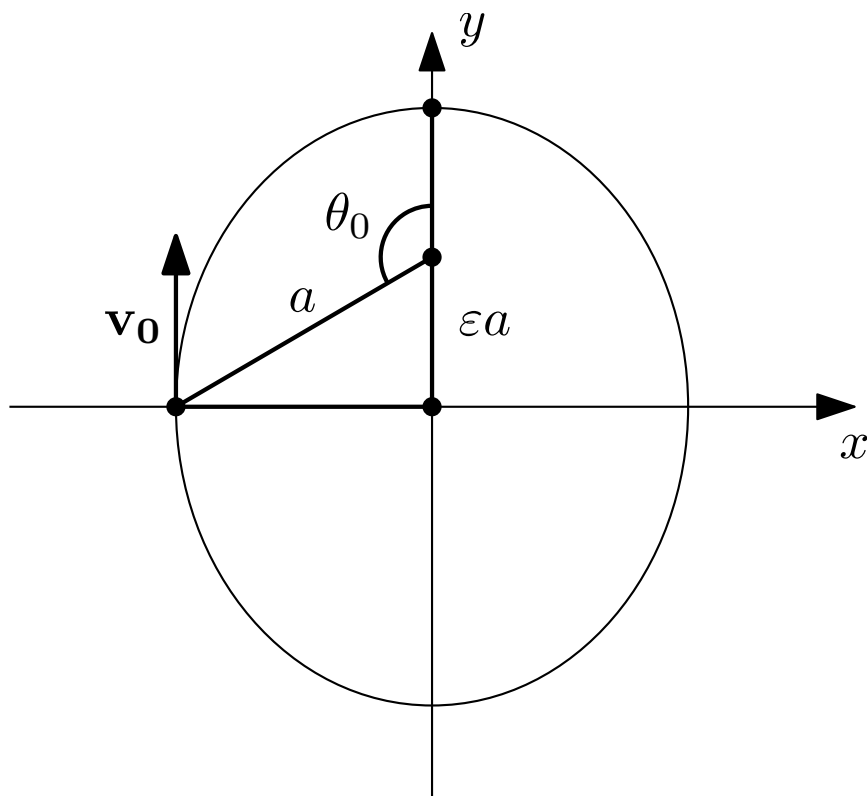
Используя (??), вычисляем истинные значения J и квадраты отклонений

i	J_{true}	$(J_{true} - J)^2$
0	0.159	$8.4 \cdot 10^{-5}$
1	0.195	$6.0 \cdot 10^{-5}$
2	0.249	$3.3 \cdot 10^{-4}$
3	0.330	$4.9 \cdot 10^{-4}$
4	0.444	$2.1 \cdot 10^{-4}$
5	0.556	$1.9 \cdot 10^{-4}$
6	0.571	$6.1 \cdot 10^{-4}$
7	0.472	$7.1 \cdot 10^{-5}$
8	0.354	$1.4 \cdot 10^{-3}$
9	0.265	$2.6 \cdot 10^{-5}$

Чтобы оценить искомое отношение, найдём стандартное отклонение:

$$\frac{S}{J_{true}^{(0)}} = \frac{1}{J_{true}^{(0)}} \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^9 (J_{true}^{(i)} - J^{(i)})^2}{9}} \approx 0.12.$$

4. Это самая трудная часть задачи. Сначала найдём среднюю аномалию в начальный момент времени.



Из картинки ясно, что истинная аномалия

$$\theta_0 = \pi - \arccos(\varepsilon) = \frac{2\pi}{3}.$$

По формуле (4) находим эксцентрическую:

$$E_0 = 2 \arctan \frac{\tan \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}.$$

И по формуле (5) находим среднюю:

$$M_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Нам также известно, что средняя аномалия зависит от времени как

$$M(t) = M_0 - \omega t,$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{a^3}}.$$

Зная $E^{(i)}$ в каждой точке, можно выразить по формуле (5) $\theta^{(i)}$ в каждой точке; $E^{(i)}$ же можно искать, решая уравнение Кеплера методом простой итерации или методом Ньютона по известному $M^{(i)}$.

Теперь запишем уравнение эллипса в полярных координатах:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

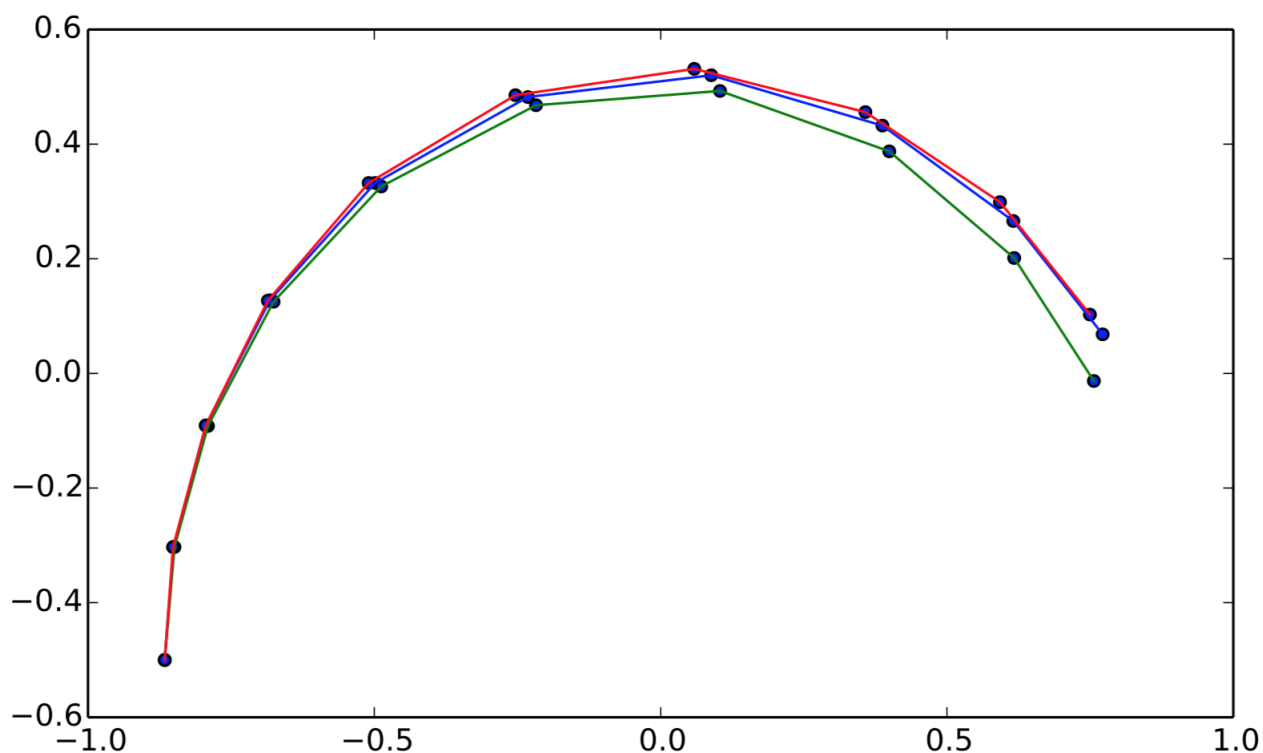
Значит, для каждого момента времени мы знаем истинную аномалию и расстояние от фокуса. Нетрудно теперь записать, как будут выглядеть координаты точки:

$$\begin{cases} x = -r(\theta) \sin \theta, \\ y = r(\theta) \cos \theta. \end{cases}$$

В таблице приведены результаты вычислений:

i	x	y
0	-0.866	-0.500
1	-0.849	-0.303
2	-0.791	-0.092
3	-0.676	+0.125
4	-0.488	+0.326
5	-0.218	+0.468
6	+0.104	+0.493
7	+0.399	+0.387
8	+0.617	+0.201
9	+0.756	-0.013

На графике зелёным соединены точки истинной траектории, красным — те, что нашёл Ашот, а синим — те, что получились бы, если бы у фотометра не было погрешности.



5. В задаче n тел необходимо каким-то образом понимать, с какой стороны пришёл свет; просто измерять полную освещённость в точке недостаточно.

В этой ситуации вычисления с измерениями были почти эквивалентны вычислениям без них, потому что мы «руками» считали вектор направления. Если источников света много, а фотометр каким-то образом понимает, с какой стороны пришёл свет, он сделает эту (гораздо большую, чем в задаче двух тел) работу за нас.