

Теоретический тур

Задача 1. Теорема Рыбака (А. Веселова)

При наблюдении галактики, находящейся на расстоянии $R = 90$ Мпк и наблюдающейся «с ребра», было обнаружено, что отношение максимального и минимального смещения некоторой линии относительно лабораторного эталона составляет 1.15. Оцените абсолютную звёздную величину данной галактики.

Решение: Рассчитаем скорость удаления галактики по закону Хаббла:

$$V_H = HR \simeq 6300 \text{ км/с} \ll c. \quad (1)$$

Определим (максимальную) скорость вращения V_{rot} данной галактики. В случаях максимального и минимального смещения линии излучившие части галактики имеют лучевые скорости $V_H \pm V_{\text{rot}}$.

$$k \equiv \frac{(\Delta\lambda)_{\text{max}}}{(\Delta\lambda)_{\text{min}}} = \frac{V_H + V_{\text{rot}}}{V_H - V_{\text{rot}}} = 1.15, \quad (2)$$

$$V_{\text{rot}} = V_H \cdot \frac{k - 1}{k + 1} \approx 440 \text{ км/с}. \quad (3)$$

Замечание. Галактики с такими высокими скоростями вращения действительно могут существовать: так, галактика UGC12591 имеет скорость вращения около 480 км/с.

Используем соотношение Талли–Фишера, связывающее светимость дисковой галактики и её скорость вращения ($L \propto V_{\text{rot}}^4$). Сравним данную галактику с нашей, положив скорость вращения Млечного Пути $V_{\text{MW}} = 250$ км/с:

$$\frac{L}{L_{\text{MW}}} = \left(\frac{V_{\text{rot}}}{V_{\text{MW}}} \right)^4 \simeq 10. \quad (4)$$

Окончательно, искомая абсолютная звёздная величина галактики

$$M = M_{\text{MW}} - 2.5 \lg 10 \simeq -24^m. \quad (5)$$

Задача 2. Азимут 90 (А. Веселова)

Некоторая звезда при наблюдении в Санкт-Петербурге имеет наибольшую высоту 35° . Определите высоту этой звезды в момент, когда её азимут равен 90° .

Решение: Широта Санкт-Петербурга $\varphi \simeq 60^\circ$ с.ш. Верхняя кульминация происходит к югу от зенита (высота верхней кульминации к северу от зенита не может быть меньше φ), значит, склонение звезды равно

$$\delta = h + \varphi - 90^\circ = +5^\circ. \quad (6)$$

Запишем теорему косинусов для треугольника {зенит – северный полюс мира – звезда}:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - h) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - h) \sin(90^\circ - \varphi) \cos(180^\circ - A), \quad (7)$$

$$\sin h = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \simeq 6^\circ. \quad (8)$$

Задача 3. Гравитация падает (И. Утешев)

«В настоящее время основной теорией гравитации считается общая теория относительности. Однако ОТО имеет ряд существенных проблем, что приводит к представлению иных теорий.» Рассмотрим следующую модификацию закона всемирного тяготения:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2 + \frac{r^4}{r_0^2}}.$$

Найдите первую поправку ко второй космической скорости для объекта массой M и радиуса R в рамках данной теории, полагая $R \ll r_0$.

Подсказка: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\arctan \frac{x}{a}}{a} + C.$

Решение: Найдём выражение для потенциальной энергии тела $U(r)$:

$$U(r) = - \int F(r) dr = -GMm \int \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 + r_0^2} \right) dr = -GMm \left(\frac{1}{r} + \frac{\arctan \frac{r}{r_0}}{r_0} \right) + \text{const.} \quad (9)$$

Отметим, что эта функция строго монотонна на $r \in (0; +\infty)$. Тогда по определению

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(R) = \lim_{r \rightarrow \infty} U(r), \quad (10)$$

$$v^2 = 2GM \left(\frac{1}{R} + \frac{\arctan(R/r_0)}{r_0} - \frac{\pi}{2r_0} \right) \simeq \frac{2GM}{R} \left(1 - \frac{\pi R}{2r_0} \right), \quad (11)$$

$$v - v_0 \simeq -\sqrt{\frac{2GM}{R} \frac{\pi R}{4r_0}} = -\sqrt{\frac{\pi^2 GMR}{8r_0^2}}. \quad (12)$$

Задача 4. Полушар (А. Шепелев)

В погоне за звёздами астроном поднялся на стратостате до высоты $h = 30$ км над поверхностью Земли. Пренебрегая поглощением в атмосфере, вычислите количество звёзд, которое он сможет наблюдать, используя подзорную трубу с апертурой $D = 100$ мм и увеличением $\Gamma = 15^{\times}$.

Решение: Оценим предельную звёздную величину подзорной трубы по формуле Погсона:

$$m' = m_{\Gamma} + 5 \lg \frac{D}{d_{\Gamma}} = 12.1^m, \quad (13)$$

где $d_{\Gamma} = 6$ мм и $m_{\Gamma} = 6^m$ — диаметр зрачка и проникающая способность глаза. Однако выходной зрачок трубы

$$d = \frac{D}{\Gamma} = 6.7 \text{ мм} > d_{\Gamma}, \quad (14)$$

поэтому проникание определяется с учётом потерь света:

$$m = m' - 5 \lg \frac{d}{d_{\Gamma}} = 11.9^m. \quad (15)$$

Считая звёзды равномерно распределёнными в пространстве, рассчитаем количество доступных для наблюдения *на всём небе* звёзд, сравнив его с количеством звёзд, видимых невооруженным глазом ($N_{\Gamma} \approx 6 \cdot 10^3$):

$$N_0 = N_{\Gamma} \cdot \left(10^{0.4(m-m_{\Gamma})}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 2 \cdot 10^7. \quad (16)$$

Вычислим не закрытую Землёй долю поверхности сферы (суть телесный угол) с учётом понижения горизонта и *двойной* рефракции, а затем получим окончательный ответ:

$$\Omega \simeq 2\pi + 2\pi \left(2\rho + \arccos \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}\right) = 2.26\pi \text{ ср}, \quad (17)$$

$$N = N_0 \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \simeq 1 \cdot 10^7. \quad (18)$$

Задача 5. Пэ два – Пэ четыре (И. Утешев)

При столкновении высокоэнергетичного протона космических лучей с его земным «собратом» возможно образование протон-антипротонной пары: $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Найдите порог такой реакции, то есть минимальную энергию E_0 протона космических лучей, при которой она осуществима.

Подсказка: Величина $E^2 - P^2 c^2$, связывающая энергию и импульс системы, сохраняется и является релятивистским инвариантом (не зависит от выбора системы отсчёта).

Решение: Запишем инвариантную величину до реакции (в лабораторной СО) и после реакции (в СО центра масс) с учётом соотношения $m_p^2 c^4 = E_0^2 - p^2 c^2$ (тот же инвариант для одного протона):

$$(E_0 + m_p c^2)^2 - (E_0^2 - m_p^2 c^4) = (4m_p c^2)^2 \quad \Rightarrow \quad E_0 = 7m_p c^2 \simeq 7 \text{ ГэВ}. \quad (19)$$

Задача 6. Наблюдаемость (А. Веселова)

Некоторая звезда со склонением $\delta = +40^\circ$ наблюдается в Санкт-Петербурге (широта $\varphi = 60^\circ$ с.ш.). Известно, что когда её высота над горизонтом составила 20° , видимая звёздная величина была равна 6.8^m . Поднявшись на 10° , звезда поярчала на 0.4^m . Будет ли эта звезда доступна для наблюдения невооруженным глазом в какой-либо момент времени? Если да, то как долго это будет продолжаться? Проницающую способность невооружённого петербуржца принять равной 6^m .

Решение: Чем меньше путь, проходимый светом звезды в атмосфере Земли, тем меньше значение видимой звёздной величины. Пусть m_0 — заатмосферная звёздная величина, E_z — поглощение в зените. Тогда, считая атмосферу плоской, запишем:

$$m_{20} = m_0 + \frac{E_z}{\sin 20^\circ}, \quad m_{30} = m_0 + \frac{E_z}{\sin 30^\circ}; \quad (20)$$

$$m_{20} - m_{30} = 0.4 = E_z (\sin^{-1} 20^\circ - \sin^{-1} 30^\circ) \implies E_z = 0.43. \quad (21)$$

Определим, на какой высоте h должна находиться звезда, чтобы быть предельно доступной для наблюдения невооруженным глазом:

$$6 = m_{20} + E_z (\sin^{-1} h - \sin^{-1} 20^\circ); \quad (22)$$

$$\sin h = 0.93 \implies h \approx 68^\circ. \quad (23)$$

Из сферической теоремы косинусов для параллактического треугольника (полюс — зенит — светило) вычислим часовой угол, при котором достигается такая высота:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \implies t \simeq \pm 1^h. \quad (24)$$

Таким образом, период, в течение которого звезда формально доступна наблюдению невооруженным глазом, составляет около 2 часов.

Задача 7. Ускользящая звезда (А. Шепелев)

При фотографических наблюдениях рассеянного скопления М44 с помощью телескопа ТАЛ-1 (рефлектор Ньютона) и соосно закреплённого фотоаппарата (диаметр объектива $\Delta = 100$ мм), бедному астроному пришлось его гидировать вручную. К сожалению, в созвездии Рака неподалеку от скопления не нашлось ярких звёзд, кроме звезды ε Сnc ($m = 6.29^m$).

Вспомнив наставления своего преподавателя, астроном расфокусировал звезду настолько это было возможно и начал наблюдения, в ходе которых получил $N = 10$ фотографий с выдержкой каждой по $T = 2$ мин. Квантовая эффективность используемой камеры $\eta = 42\%$.

Зависимость количества отсчётов в каждом пикселе конечного изображения после компьютерной обработки прямо пропорциональна квадратному корню количества фотографий: $E_f = E_0\sqrt{N}$; ошибка гидирования обратно пропорциональна размеру изображения звезды и для сфокусированной звезды составляет $1'$.

Определите предельную звёздную величину изображения, полученного после компьютерной обработки, используя сведения о телескопе ТАЛ-1, приведённые в таблице:

Диаметр главного зеркала	$D = 110$ мм
Фокусное расстояние	$F = 806$ мм
Малая ось вторичного зеркала	$d = 20$ мм

Решение: Определим эффективную площадь входного отверстия телескопа. Для этого вычтем из площади главного зеркала площадь, затеняемую вторичным зеркалом:

$$S = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 9.2 \cdot 10^3 \text{ мм}^2, \quad (25)$$

где d — малая ось вторичного зеркала — диаметр его проекции на главное зеркало.

Телескоп собирает в ξ раз больше света, чем невооруженный глаз; ξ есть отношение площадей входного отверстия и зрачка невооруженного глаза (диаметр $D_r = 6$ мм):

$$\xi = \frac{S}{\pi D_r^2/4} = 325. \quad (26)$$

Оценим максимальный радиус изображения «в расфокусе», при котором его ещё видно ($m_r = 6^m$), используя формулу Погсона и значение ξ :

$$\frac{R}{R_0} = \sqrt{\xi} \cdot 10^{0.2(m_r - m)} = 15.8, \quad (27)$$

где R_0 — радиус изображения сфокусированной звезды. Согласно утверждению из условия задачи, ошибка гидирования составляет

$$\sigma = 60'' \cdot \frac{R_0}{R} = 3.8''. \quad (28)$$

Найдём дифракционное разрешение объектива фотоаппарата для видимого света (длина волны $\lambda \sim 0.5$ мкм):

$$\beta = \frac{1.22\lambda}{\Delta} \simeq 1.3''. \quad (29)$$

Принимая квантовую эффективность глаза равной $\eta_r = 4\%$, его временное разрешение — $T_r = 0.3$ с, получим с использованием формулы Погсона искомую предельную звёздную величину:

$$m_{\text{lim}} = m_r + 2.5 \lg \xi - 5 \lg \frac{\beta + \sigma}{\beta} + 2.5 \lg \frac{\eta}{\eta_r} + 2.5 \lg \frac{T}{T_r} + 1.25 \lg N = 19.6^m. \quad (30)$$

Задача 8. Yellowknives (А. Шепелев, ред. И. Утешев)

Ходят легенды, что в исчезнувшем племени Йеллоунайф существовал древний обычай: в момент, когда часовой угол Солнца составлял 13^h29^m , а ярчайшая звезда осеннего неба Альдебаран ($4^h36^m; +16^\circ31'$) пересекала небесный меридиан, главный жрец племени обращал свой взор на путеводную звезду — Полярную, в направлении которой небо озарялось разноцветными лентами, парящими в небе. Увидев ленты, согласно древнему поверью, жрец запускал священные часы, отсчитывающие ровно 111 звёздных суток, по истечении которых члены племени должны увидеть первые талые воды. Эти часы отстают с ходом $\pi \cdot 10^{-3}$.

Определите, во сколько по истинному солнечному времени и в какую дату йеллоунайфцы услышали бы первую капель в 2018 году. Уравнение времени η (в минутах) связано с прямым восхождением $\alpha_\odot$ среднего Солнца соотношением

$$\eta = 7.53 \cos \alpha_\odot + 1.5 \sin \alpha_\odot - 9.87 \sin 2\alpha_\odot.$$

В 2017 году астрономическая весна наступила 20 марта в 10:28 по местному времени. Продолжительность тропического года примите равной $T_\oplus = 365.242374$ сут.

Решение: В момент пересечения Альдебараном небесного меридиана его часовой угол составляет $t_1 = 12^h$ (нижняя кульминация) или $t_2 = 0^h$ (верхняя кульминация).

Прямое восхождение среднего Солнца линейно растёт со временем (с точностью до целого числа оборотов):

$$\alpha_\odot = \frac{t - \Omega}{T_\oplus} \cdot 360^\circ, \quad (31)$$

где $(t - \Omega)$ — время, прошедшее с момента весеннего равноденствия.

Звёздное время есть сумма часового угла и прямого восхождения светила:

$$s = \alpha + t. \quad (32)$$

Нетрудно рассчитать прямое восхождение Солнца в первом случае: $\alpha_1 = 3^h07^m$. Заметим, через сотню дней прямое восхождение Солнца составит около 12^h , а осенью, очевидно, не может быть никакой капели в северном (*видна Полярная звезда*) полушарии.

Аналогично, во втором случае $\alpha_2 = 4^h36^m - 13^h29^m + 24^h = 15^h07^m$. Поскольку уравнение времени определено как разность среднего и истинного солнечного времени ($\eta \equiv \text{ССВ} - \text{ИСВ} = \alpha_2 - \alpha_0$),

$$\alpha_2 - \eta(\alpha_0) = \alpha_0, \quad (33)$$

Решим это уравнение методом последовательных приближений: $\alpha_0 = 15^h22.95^m$, откуда время с начала 2017 года есть

$$\tau_0 = \frac{\alpha_0}{24^h} T_\oplus + (31 + 28 + 19) \text{ сут.} + 628 \text{ мин} = 450048 \text{ мин} \simeq 312.534 \text{ сут.} \quad (34)$$

Ожидание продлится

$$\tau_1 = \frac{111 \times 23^h56^m04^s}{1 - \pi \cdot 10^{-3}} = 159906 \text{ мин} \simeq 111.05 \text{ сут.} \quad (35)$$

От начала 2018 года по среднему солнечному времени пройдет

$$T = \tau_0 + \tau_1 - 365 \text{ сут.} = 84354 \text{ мин} \hookrightarrow 28 \text{ февраля } 14:01. \quad (36)$$

Поскольку $\eta(T) \simeq 14$ мин, жители племени услышали бы первую капель 28 февраля в 13:47.

Задача 9. Марибо (И. Утешев)

«Ночью 17 января 2009 года многие люди, находящиеся вблизи Балтийского моря, наблюдали яркий след метеороида, падающего в атмосфере Земли. Камера в Швеции зафиксировала на видео это событие.» Метеороид двигался равномерно и прямолинейно. Определите его скорость v по данным съёмки (см. таблицу). Каково минимальное удаление траектории падения от точки наблюдения, если метеорит был найден на расстоянии 195 км от неё? Кривизной поверхности Земли пренебречь.

$t - t_0$	Азимут	Высота
2.46 с	197.4°	28.4°
5.28 с	222.3°	14.7°
	231.0°	0° точно
±5 мс	±0.05°	±0.05°

Решение: Situation is impossible. :)

В самом деле, проекция траектории метеороида (отрезка прямой) на небесную сферу является дугой большого круга. Рассчитаем расстояния между всеми парами заданных точек, используя сферическую теорему косинусов:

$$\cos \rho_{ij} = \sin h_i \sin h_j + \cos h_i \cos h_j \cos(A_i - A_j); \quad (37)$$

$$\begin{cases} \rho_{12} = 26.82^\circ, \\ \rho_{23} = 17.03^\circ \end{cases} \implies \rho_{12} + \rho_{23} = 43.85^\circ; \quad (38)$$

$$\rho_{13} = 42.89^\circ.$$

Как видно, $\rho_{12} + \rho_{23} - \rho_{13} \simeq 1.0^\circ$, что *значимо* отлично от нуля. Значимость можно продемонстрировать, например, используя метод Корнфельда. Рассчитаем соответствующие расстояния, уменьшая или увеличивая координаты на величину их погрешности:

$$\begin{cases} \rho_{12}^{\min} = 26.69^\circ, \\ \rho_{23}^{\min} = 16.94^\circ \end{cases} \implies (\rho_{12} + \rho_{23})^{\min} = 43.63^\circ; \quad (39)$$

$$\rho_{13}^{\max} = 42.99^\circ.$$

Видим, что $(\rho_{12} + \rho_{23})^{\min} - \rho_{13}^{\max} \simeq 0.6^\circ \gg 0.1^\circ > 0$. Следовательно, эти три точки образуют сферический треугольник и не могут в совокупности принадлежать проекции. $\square$

Задача 10. Солнышко (И. Маркозов, И. Утешев)

1. Одна из ранних гипотез об источнике энергии Солнца гласила, что оно светит из-за астероидов, прилетающих на его поверхность. На значительном удалении от Солнца сферические астероиды массой m каждый распределены в пространстве равномерно с концентрацией n , их скорости равномерно распределены на промежутке $[v_1; v_2]$ и сонаправлены.

Оцените установившуюся светимость Солнца, считая, что высвечивается вся кинетическая энергия аккрецируемых объектов; v_1 и v_2 — первая и вторая космические скорости для Солнца. Выразите ответ через m , n , $M_\odot$, $R_\odot$ и физические постоянные.

2. Теория термоядерного синтеза долго не получала признания, поскольку в рамках классической физики температура на Солнце недостаточно велика для протекания термоядерных реакций. Оцените температуру, при которой возможно сближение двух протонов на расстояние порядка ядерного.
3. Положим радиус ядра Солнца равным $0.3R_\odot$. Мощность энерговыделения единицы объёма ядра q , плотность потока энергии пропорциональна градиенту температуры:

$$F = -\kappa \frac{dT}{dr}, \quad \kappa > 0.$$

Найдите температуру T_1 на границе ядра, если в центре Солнца она составляет T_0 .

4. Ядро окружает зона лучистого переноса, простирающаяся от $0.3R_\odot$ до $0.7R_\odot$. В этой зоне уже не идут ядерные реакции, не происходит переноса вещества. Найдите температуру T_2 на границе зоны лучистого переноса.
5. Томсоновское рассеяние на свободном электроны является самым распространённым типом рассеяния фотонов в недрах Солнца, его эффективное сечение $\sigma \simeq 7 \cdot 10^{-29} \text{ м}^2$. Рассчитайте характерную длину свободного пробега фотона в солнечном веществе, считая концентрацию электронов n_e не зависящей от глубины.
6. Вследствие многократных рассеяний путь фотона выглядит как случайное блуждание. Оцените время, за которое фотон, рождённый в центре Солнца, достигнет поверхности.

Решение:

- 1** Найдём число астероидов, падающих на Солнце за единицу времени, имеющих «на бесконечности» скорость в интервале от v до $v + dv$. Определим радиус сечения захвата:

$$\begin{cases} \text{ЗСМИ :} & vr = uR_\odot, \\ \text{ЗСЭ :} & \frac{v^2}{2} = \frac{u^2}{2} - \frac{GM_\odot}{R_\odot}. \end{cases} \implies r = \frac{R_\odot}{v} \sqrt{v^2 + \frac{2GM_\odot}{R_\odot}}. \quad (40)$$

Тогда темп аккреции N_v астероидов с такими скоростями

$$N_v = \pi r^2 v dn_v = \pi r^2 v \cdot \frac{n dv}{v_2 - v_1}, \quad (41)$$

а соответствующая мощность

$$dL_v = \frac{1}{2} m u^2 \cdot N_v = \frac{m v^2 r^2}{2 R_\odot^2} \pi r^2 v \cdot \frac{n dv}{v_2 - v_1} = \frac{\pi m n R_\odot^2}{2(v_2 - v_1)} \left(v + \frac{2GM_\odot}{R_\odot} \right)^2 \frac{dv}{v}. \quad (42)$$

Введя обозначения $A \equiv \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\odot}}$, $B \equiv \frac{\pi m n R_\odot^2}{2(v_2 - v_1)}$, получим

$$L = \int dL_v = B \int_{\frac{A}{\sqrt{2}}}^A \frac{(v + A)^2}{v} dv = \frac{B}{4} (9 - 4\sqrt{2} + \ln 4) A^2. \quad (43)$$

2 Для сближения протонов на расстояние порядка $l_c \sim 10^{-15}$ м — ядерного масштаба — требуется действительно высокая температура. Для оценки сравним кулоновскую энергию с тепловой:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l_c} \sim k_B T_c \implies T_c \sim 10^{10} \text{ К.} \quad (44)$$

3 Рассмотрим тонкую шаровую оболочку радиуса $r < 0.3R_\odot$ и толщиной dr и запишем условие её теплового равновесия (мощность энергосвечения равна мощности теплоотвода):

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \cdot q = -4\pi r^2 \cdot \kappa \frac{dT}{dr}, \quad (45)$$

$$dT = -\frac{q}{3\kappa} r dr \implies T_1 = T_0 - \frac{q}{3\kappa} \frac{(0.3R_\odot)^2}{2} = T_0 - \frac{3qR_\odot^2}{200\kappa}. \quad (46)$$

4 В зоне лучистого переноса поток энергии через сферические слои этой зоны сохраняется и обусловлен излучением. Тогда с учётом закона Стефана–Больцмана

$$T_1^4 R_1^2 = T_2^4 R_2^2 \implies T_2 = T_1 \sqrt[4]{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \left(T_0 - \frac{3qR_\odot^2}{200\kappa} \right). \quad (47)$$

5 Длина свободного пробега λ определяется математическим ожиданием *одного* взаимодействия при её прохождении:

$$\lambda \sigma n_e \sim 1 \implies \lambda \simeq \frac{1}{n_e \sigma} \simeq \frac{4\pi m_p R_\odot^3}{3\sigma M_\odot} \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \quad (48)$$

6 Усредняя перемещение фотона после n рассеяний ($n \gg 1$), приходим к соотношению

$$\overline{\mathbf{S}^2} = \overline{(\mathbf{s}_1 + \dots + \mathbf{s}_n)^2} = \overline{\mathbf{s}_1^2} + \dots + \overline{\mathbf{s}_n^2} + \sum_{i \neq j} \overline{(\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j)} \overset{0}{=} n\lambda^2, \quad (49)$$

то есть перемещение фотона $S \propto \sqrt{n}$. Искомое время

$$t = n \cdot \frac{\lambda}{c} = \frac{R_\odot^2}{\lambda c} \approx 10^{10} \text{ с} \approx 10^3 \text{ лет.} \quad (50)$$

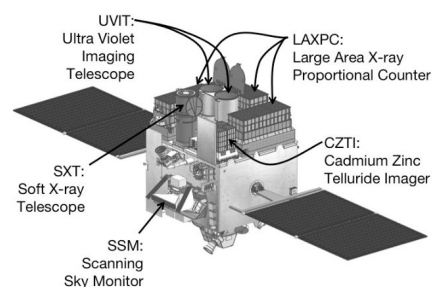
Замечание. Полученная оценка является несколько заниженной. В действительности, конечно, томсоновский механизм реализуется в глубоких слоях Солнца, где концентрация электронов существенно выше средней, а при более низких температурах возможны более эффективные взаимодействия с веществом.

Задача 11. AstroSat (J.S. Bagla @IOAA–2016, пер. М. Костина, ред. И. Утешев)

На индийском астрономическом спутнике AstroSat, запущенном в сентябре 2015 года, есть 5 различных инструментов. В данной задаче мы будем обсуждать 3 из них: SXT, LAXPC и CZTI. Эти инструменты наблюдают в рентгеновском диапазоне и имеют общее поле.

Инструмент	Полоса (кэВ)	Площадь (м ²)	Квантовая эффективность	Уровень насыщения (отсчёты)	Число пикселей
SXT	0.3 ÷ 8.0	0.067	60%	15000 всего	512 × 512
LAXPC	3 ÷ 80*	1.5	40%	50000 в любом из 8 счётчиков или 200000 всего	—
CZTI	10 ÷ 150	0.09	50%	—	4 × 4096

*Энергетический диапазон LAXPC распределён на 8 счётчиков с равной шириной полос без перекрытия.



Пусть спутник наблюдает точечный рентгеновский источник, энергетический спектр которого имеет степенной характер: спектральная плотность потока фотонов с энергией E

$$F(E) = KE^{-2/3}.$$

Из наблюдений известно, что $F(1 \text{ кэВ}) = 10 \text{ фотонов}/(\text{кэВ} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с})$.

1. Найдите спектральные плотности потока фотонов с энергиями 1 кэВ, 5 кэВ, 40 кэВ и 100 кэВ для данного источника. Для каждой плотности потока рассчитайте полное число отсчётов в единичном интервале энергий, зафиксированное каждым из инструментов за время экспозиции $t = 200 \text{ с}$.
2. Вычислите для наблюдаемого источника максимальное время экспозиции t_S , при котором не достигается насыщение матрицы SXT.
3. Предположив, что источник стал в 3500 раз ярче, вычислите ожидаемое полное число отсчётов в секунду на счётчиках 1 и 8 LAXPC. Что окажется причиной насыщения при длительной экспозиции: переполнение какого-либо отдельного счётчика или общее по всем счётчикам?
4. Источник считается зарегистрированным, если отношение «сигнал/шум» $\text{SNR} \geq 3$. Известно, что среднеквадратическая погрешность отсчётов CZTI вследствие случайных флуктуаций составляет $0.00014 \text{ отсчёт}/(\text{с} \cdot \text{кэВ} \cdot \text{пиксель})$. Каково минимальное время накопления t_c , необходимое для регистрации всё того же источника на CZTI?
5. Представим себе, что наш источник демонстрирует переменность, при которой коэффициент K «скачком» возрастает на 20%. AstroSat наблюдал источник в течение 1 с до изменения яркости и 1 с после него. Вычислите количество отсчётов, измеренное каждым из инструментов в обоих наблюдениях. Какой инструмент наилучшим образом подходит для регистрации подобных изменений?
6. У некоторых рентгеновских источников, таких, как Cas A, наблюдается линия излучения, соответствующая радиоактивному распаду ^{44}Ti , с длиной волны 0.01825 нм . Представим себе, что существует источник, который излучает только одну яркую линию, соответствующую этому распаду. Какова должна быть минимальная (по модулю) лучевая скорость v такого источника, чтобы регистрируемая линия и линия лабораторного источника соответствовали различным счётчикам LAXPC?

Решение:

1 Проведём вычисления для детектора с площадью A и квантовой эффективностью α . Число отсчётов в единичном интервале энергий за время t есть

$$C_{\alpha,A}(E) = F(E) \cdot \alpha A \cdot t = Kt \cdot \alpha A \cdot E^{-2/3}, \quad (51)$$

где по условию коэффициент $K = 10$ отсчётов/(кэВ·м²·с). Результаты расчётов занесём в таблицу:

Энергия (кэВ)	Плотность потока (у.е.)	SXT	LAXPC	CZTI
1	10	80	—	—
5	3.42	27	410	—
40	0.86	—	103	8
100	0.46	—	—	4

2 Плотность потока фотонов с энергиями $E \in [E_1; E_2]$

$$G(E_1, E_2) = \int_{E_1}^{E_2} F(E) dE = 3K \left(E_2^{1/3} - E_1^{1/3} \right), \quad (52)$$

поэтому число отсчётов, фиксируемых SXT за секунду

$$C_0 = \alpha A G(E_{\min}^{\text{SXT}}, E_{\max}^{\text{SXT}}) = 1.605 \text{ отсчётов/с}, \quad (53)$$

$$t_S = \frac{C_{\max}^{\text{SXT}}}{C_0} = \frac{15000}{1.605} \simeq 9350 \text{ с}. \quad (54)$$

3 Полоса каждого из восьми счётчиков LAXPC имеет ширину 9.625 кэВ. Расчёт производим аналогично п. 2. Быстрее всего наступит насыщение счётчика 1:

Счётчик	$E_{\min}$ (кэВ)	$E_{\max}$ (кэВ)	Отсчёты/с $\times 10^3$
1	3.0	12.625	55.8
8	70.375	80.0	11.4
Всего	3.0	80.0	180.6

4 Рассчитаем число отсчётов от источника и шум на CZTI, а затем наложим условие на их отношение ($\text{SNR} \geq 3$), помня о том, что матожидание сигнала s линейно зависит от времени накопления, а среднеквадратическое отклонение пропорционально $\sqrt{t}$:

$$E\{s\}_0 = 3K \left(E_{\max}^{1/3} - E_{\min}^{1/3} \right) \alpha A \simeq 4.26 \text{ отсчётов/с}, \quad (55)$$

$$\sigma\{s\}_0 = 0.00014 \cdot (E_{\max} - E_{\min}) \cdot (4 \times 4096) \simeq 321 \text{ отсчёт/с}; \quad (56)$$

$$\text{SNR}(t) = \frac{E\{s\}}{\sigma\{s\}} = \frac{E\{s\}_0 \cdot t/t_0}{\sigma\{s\}_0 \sqrt{t/t_0}} = \frac{E\{s\}_0}{\sigma\{s\}_0} \sqrt{\frac{t}{t_0}}, \quad (57)$$

$$\text{SNR}(t_c) = 3 \implies t_c \approx 51 \cdot 10^3 \text{ с}. \quad (58)$$

Замечание. Соотношение $\text{SNR} \propto \sqrt{t}$ можно использовать без доказательства.

5 Расчёты выполняются аналогично п.п. 2–3. Лучше всего подходит LAXPC:

Инструмент	Число отсчётов до	Число отсчётов после
SXT	$1.60 \simeq 2$	$1.93 \simeq 2$
LAXPC	$51.60 \simeq \mathbf{52}$	$61.92 \simeq \mathbf{62}$
CZTI	$4.26 \simeq 4$	$5.11 \simeq 5$

6 Линии $\lambda = 18.25$ пм соответствует энергия

$$E_{\text{лаб}} = \frac{hc}{\lambda e} = 67.95 \text{ кэВ}. \quad (59)$$

Фотоны с такой энергией регистрируются счётчиком 7. Чтобы попасть в полосу счётчика 6, энергия фотонов должна стать меньше 60.75 кэВ, для счётчика 8 — больше 70.375 кэВ. Очевидно, для минимальности модуля лучевой скорости должен реализовываться второй вариант (источник приближается):

$$\lambda' = \frac{hc}{E'e} = 17.62 \text{ пм}, \quad (60)$$

$$v = \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda}\right) c \simeq 10.4 \cdot 10^3 \text{ км/с}. \quad (61)$$